

Е.А. Микишанина**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
НА ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ СУСЛОВА¹**

Рассматривается обобщенная задача Суслова с изменяющимися параметрами и влияние случайных возмущений на динамику рассматриваемой системы. В случае детерминированной системы показано наличие хаотической динамики в системе и таких эффектов, как появление странного аттрактора и некомпактных (убегающих) траекторий. Также рассматривается динамика возмущенной системы, которая возникает за счет добавления в одно из уравнений «белого» шума, моделируемого винеровским процессом.

Ключевые слова: *Неголономная система, задача Суслова, странный аттрактор, случайные возмущения, стохастическое дифференциальное уравнение.*

1. Введение

Динамика механических систем моделируется, как правило, системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Особый интерес вызывают процессы, моделируемые нелинейными системами. Такой, например, является обобщенная задача Суслова. С точки зрения механики это неголономная задача. А как известно, именно в подобных задачах можно наблюдать различные динамические эффекты: странные аттракторы, ускорения, эффект реверса и другие. Физическая интерпретация задачи Суслова – это движение по внутренней поверхности сферы твердого тела, внутри которого по изменяющемуся по времени периодическому закону движутся точечные массы, причем периодическое возбуждение системы сводится к периодическому изменению гиросtatического момента.

Исследованию как классической задачи Суслова, так и обобщенной задачи Суслова посвящено достаточное количество работ [1–5]. Впервые она была рассмотрена в работе [1]. Позже в статье Вагнера [2] была описана аналогия между задачей Суслова и движением саней Чаплыгина. Чуть позже эта задача исследовалась в работах [3, 4]. Довольно подробное исследование обобщенной задачи Суслова с выявлением возможного ускорения в системе и странных аттракторов проведено в работе [5]. Можно также отметить еще ряд работ по указанной тематике [6–8].

Однако при исследовании механических систем возникает следующий вопрос. На динамику движущегося тела могут влиять различные случайные факторы: сопротивление воздуха, которое часто не учитывается при моделировании, отсутствие абсолютной гладкости поверхностей, незначительные сбои в работе механизмов и другие случайные возмущения. Нелинейные динамические системы могут демонстрировать за счет своей нелинейности случайные эффекты, например появление в системе хаоса. А не будут ли случайные возмущения влиять на эффекты, порожденные нелинейностью системы?

¹ Работа поддержана грантом РФФИ № 18-29-10051 мк.

Данная работа посвящена исследованию влияния случайных возмущений, по-другому «белого шума», на динамику механической системы в обобщенной задаче Суслова. В данной работе показано, что задачу Суслова можно свести к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений. Здесь также приведены некоторые результаты исследования данной детерминированной системы. Также в работе исследуется динамика возмущенной системы, которая представляется собой систему двух стохастических дифференциальных уравнений Ито [9, 10]. Решение как детерминированной, так и возмущенной системы происходит численно с одним и тем же шагом интегрирования. Однако численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений существенным образом отличаются от методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробному исследованию методов численного интегрирования стохастических дифференциальных посвящены работы Д.Ф. Кузнецова [11–13] и ряд работ других авторов [14, 15]. Кузнецовым было показано влияние случайных возмущений на странный аттрактор Лоренца в модели конвективной турбулентности Лоренца, на динамику системы уравнений Ресслера, на моделирование чандлеровских колебаний.

В данной работе сделана еще одна попытка исследования влияния случайных возмущений на динамику обобщенной системы Суслова. На основе численного интегрирования [16] построены фазовые траектории и графики искомых функций в случае как детерминированной, так и возмущенной системы. Описаны интересные динамические эффекты при переходе к возмущенной системе.

2. Математическая модель и уравнения движения

Рассматривается система, состоящая из нескольких тел:

- твердое тело с неподвижной точкой, которое не может вращаться в некотором фиксированном (относительно тела) направлении;

- n материальных точек массами m_i , движущихся внутри твердого тела по заданным законам $p_i(t)$.

Движение происходит в отсутствие внешних сил, материальные точки движутся так, что моменты инерции остаются постоянными.

Для описания движения твердого тела введем две системы координат:

- неподвижную систему координат $OXYZ$ с центром в неподвижной точке O , которая является центром масс системы, и ортами α, β, γ ;

- подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с центром в той же самой неподвижной точке O и ортами e_1, e_2, e_3 , выбранную так, чтобы твердое тело не могло вращаться в направлении вектора $e_3 = (0, 0, 1)$. Это условие будет иметь вид

$$(\omega, e_3) = 0, \quad (1)$$

где ω – угловая скорость твердого тела. Условие (1) переписывается как

$$\omega_3 = 0. \quad (2)$$

Кинетическая энергия всей системы определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{I}(t)\omega, \omega) + (\mathbf{k}(t), \omega),$$

где $\mathbf{I}(t)$ и $\mathbf{k}(t)$ – заданные тензор инерции и гиросtatический момент.

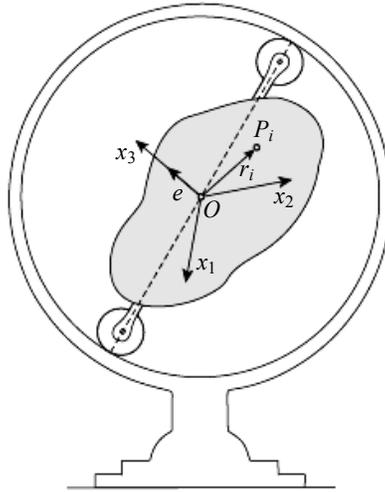


Рис. 1. Механическая конструкция как реализация задачи Суслова
Fig.1. Mechanical design as an implementation of the Suslov problem

Определенным расположением осей и добавлением вдоль этих осей маховиков, уравновешенных с помощью неподвижных масс, можно добиться того, чтобы тензор инерции имел только два недиагональных элемента:

$$\mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а гиростатический момент имел вид $\mathbf{k} = (0, k_2, k_3)$, где I_{ij}, k_i – периодические функции времени одного периода.

Уравнения движения в подвижной системе координат, связанной с телом, могут иметь вид

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k})' = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \lambda \mathbf{e}_3, \quad (4)$$

где λ – постоянная, которую можно определить из уравнения (4) с учетом равенства нулю третьей компоненты вектора угловой скорости. Тогда система уравнений для компонент (ω_1, ω_2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{23}\omega_2^2 - k_3\omega_2, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= I_{23}\omega_1\omega_2 + k_3\omega_1 - \dot{k}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае $I_{23} = 0$ задача сводится к интегрированию неавтономной системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Случай $I_{23} \neq 0$ более интересен. В этом случае с помощью замен

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{I_{22}}{I_{23}}v, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{I_{11}I_{22}}}{I_{23}}u, \\ \dot{k}_2(t) &= \frac{I_{22}\sqrt{I_{11}I_{22}}}{I_{23}}\Phi(t), \quad k_3(t) = \sqrt{I_{11}I_{22}}\Psi(t), \end{aligned}$$

систему (5) можно привести к неавтономной нелинейной системе

$$\begin{aligned}\dot{v} &= u^2 + \Psi(t)u, \\ \dot{u} &= -uv - \Psi(t)v - \Phi(t).\end{aligned}\quad (6)$$

3. Краткий обзор результатов исследования

В работе [5] достаточно подробно была изучена динамика системы (6). Приведем в этом разделе результаты исследования с некоторыми дополнениями.

Пусть функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ заданы в виде

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= a \sin(t) + b \cos(t), \\ \Psi(t) &= c \cos(t) + d \sin(t),\end{aligned}$$

где a, b, c, d – заданные постоянные. В зависимости от значений параметров a, b, c, d отображения через период могут содержать неподвижные точки, инвариантные кривые, некомпактные притягивающие инвариантные кривые и странные аттракторы. Для системы также можно было построить фазовый портрет вместо отображения за период. Но в данном случае отображение нагляднее, нежели чем фазовый портрет. Виды некоторых отображений, содержащих аттракторы и некомпактные кривые, представлены на рис. 2.

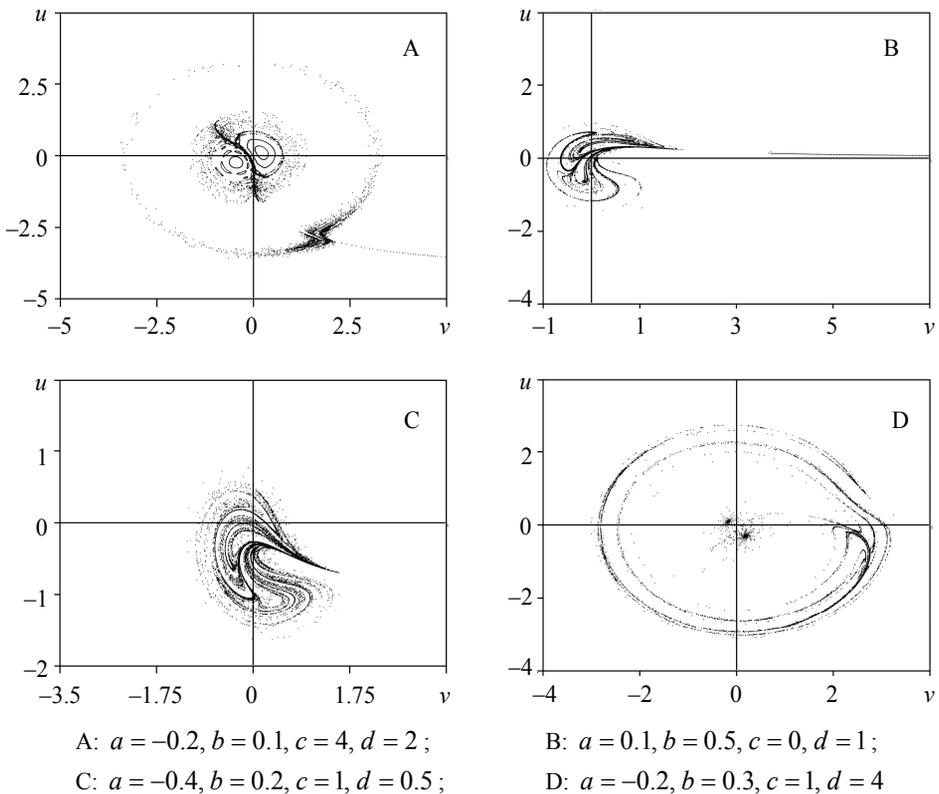


Рис. 2. Отображения Пуанкаре
Fig.2. Poincare maps

Для уточнения сценария перехода к хаосу, например для отображения на рис. 2, С (далее будем также рассматривать возмущенную систему с параметрами $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.5$), построим карту динамических режимов (рис. 3), меняя значения постоянных $d \in [0, 0.5], b \in [-0.2, 0.3]$.

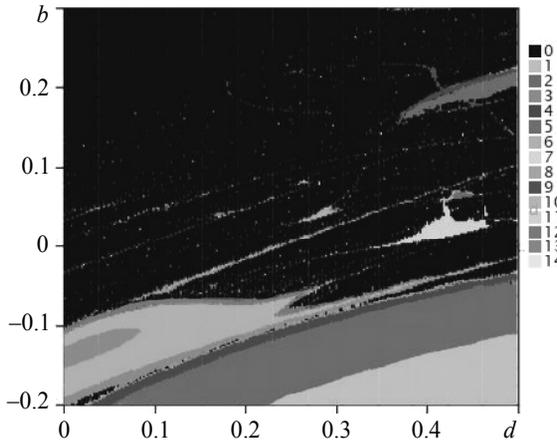


Рис. 3. Карта динамических режимов
 Fig. 3. Chart of dynamical regimes

Цветные области соответствуют устойчивым циклам соответствующего периода (диаграмма соответствия цвета определенному периоду указана справа от рисунка). Черные области с цветными вкраплениями соответствуют областям, занятым, главным образом, хаосом. Именно, при значении параметров, соответствующих указанной области, можно ожидать появление странного аттрактора. Стоит отметить, что переход к области хаоса происходит через последовательную смену областей периодов 3–6–12 и 1–2–4–8. То есть очевиден каскад бифуркаций удвоения периода. Это один из классических сценариев перехода к хаосу в системе [17–19]. В этом случае можно говорить о фейгенбаумовской природе странных аттракторов в данной системе.

Теперь рассмотрим, как на динамику системы будет влиять появление случайных возмущений в уравнении. Рассмотрим, какие эффекты можно наблюдать в этом случае.

4. Математическая модель возмущенной системы и численное интегрирование

Систему (6) с учетом случайных возмущений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_t &= u_t^2 + \Psi(t)u_t + \sigma_1(v_t, u_t, t)\dot{f}_t^1, \\ \dot{u}_t &= -u_t v_t - \Psi(t)v_t - \Phi(t) + \sigma_2(v_t, u_t, t)\dot{f}_t^2, \end{aligned} \tag{7}$$

где u_t, v_t – искомые случайные функции; $\sigma_1(v, u, t), \sigma_2(v, u, t)$ – заданные регулярные функции; \dot{f}_t^1, \dot{f}_t^2 – стандартные независимые винеровские процессы. Система (7) будет называться возмущенной, а уравнения – стохастическими дифференциальными уравнениями.

Решение системы (7) сводится к численному интегрированию. Интегрирование стохастических дифференциальных уравнений несколько отличается от интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе и набором методов интегрирования. Подробному исследованию численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений посвящены труды Д.Ф. Кузнецова [1, 2].

Для использования численных методов перепишем дифференциальные уравнения (7) в виде дифференциальных уравнений Ито:

$$\begin{aligned} dv_t &= (u_t^2 + \Psi(t)u_t)dt + \sigma_1(v_t, u_t, t)df_t^1, \\ du_t &= (-u_t v_t - \Psi(t)v_t - \Phi(t))dt + \sigma_2(v_t, u_t, t)df_t^2, \end{aligned} \quad (8)$$

и зададим коэффициенты случайных компонент в наиболее простом виде, когда они не зависят от самих механических параметров:

$$\sigma_1(v, u, t) = 0, \quad \sigma_2(v, u, t) = \sigma.$$

Так как каждая из искомым функций v, u соответствует компонентам угловой скорости ω_1, ω_2 , то подобное возможно при воздействии на тело случайных возмущений только при вращении в одном направлении (в направлении ω_2).

На основании унифицированных разложений Тейлора – Ито на дискретной равномерной временной сетке $\{t_k\}_0^\infty$ численные схемы для системы

$$\begin{aligned} dv_t &= (u_t^2 + \Psi(t)u_t)dt, \\ du_t &= (-u_t v_t - \Psi(t)v_t - \Phi(t))dt + \sigma df_t \end{aligned}$$

примут вид

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \Delta(u_n^2 + \Psi_n u_n) + \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} \left[(-u_n v_n - \Psi_n v_n - \Phi_n)^2 + \Psi_n (-u_n v_n - \Psi_n v_n - \Phi_n) \right] + \\ &+ \sigma(2u_n + \Psi_n)(\Delta I_0 + I_1), \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta(-u_n v_n - \Psi_n v_n - \Phi_n) + \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} \left[(u_n^2 + \Psi_n u_n)(u_n v_n + \Psi_n v_n + \Lambda_n) - \Psi_n (u_n^2 + \Psi_n u_n) - \Phi_n \right] + \\ &+ \sigma I_0 - \sigma v_n (\Delta I_0 + I_1), \\ I_0 &= \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad I_1 = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \end{aligned}$$

где $\Delta = t_{k+1} - t_k$ – шаг интегрирования; ζ_0, ζ_1 – независимые случайные величины со стандартным гауссовским распределением (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией). Оставим в стороне вопрос о сходимости численных методов и разложений, так как целью работы является демонстрация механических эффектов возмущенной системы. Очень подробно вопрос сходимости численных методов для стохастически дифференциальных уравнений изучен в [11].

Поведение фазовой кривой, очевидно, будет зависеть от значения величины σ , характеризующей интенсивность возмущения, и от величины шага интегрирования.

Для сравнения результатов в детерминированной и стохастической модели построим фазовые траектории и графики искомых функций для заданных значений параметров.

5. Численные результаты

5.1. Появление в системе убегающих траекторий

Построим фазовую кривую и графики искомых функций детерминированной системы для значения параметров $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.06$ (рис. 4) и $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.18$ (рис. 5) для начальных значений $v(0) = u(0) = 0$.

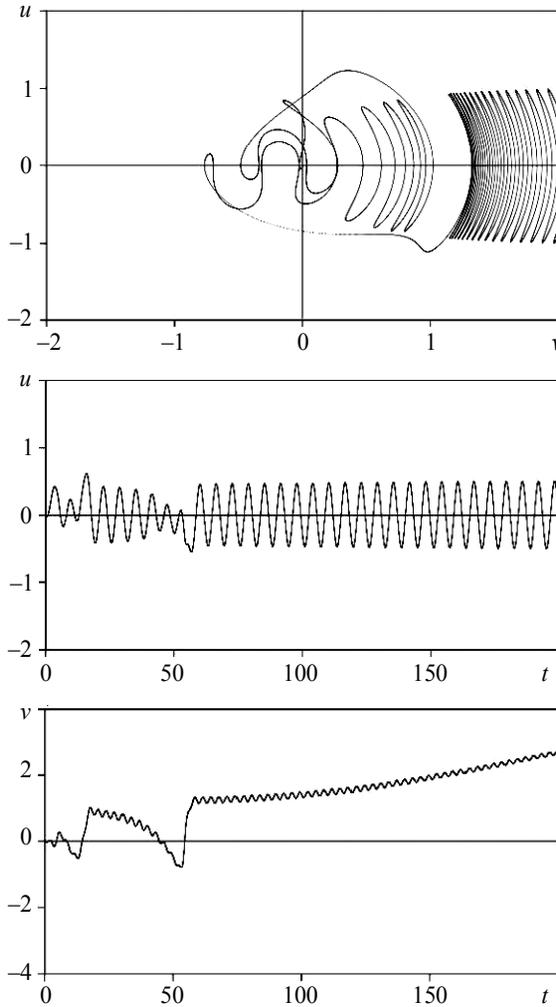


Рис. 4. Фазовая кривая и графики функций $u(t), v(t)$ при $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.06$ и начальных условиях $v(0) = u(0) = 0$

Fig. 4. Phase curve and graphs of functions $u(t), v(t)$ for $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.06$ and under initial conditions $v(0) = u(0) = 0$

На рис. 4 можно наблюдать убегающую траекторию: $v \rightarrow +\infty$. На рис. 5 присутствует только странный аттрактор, убегание траектории на бесконечность не наблюдается. На отображении через период этот странный аттрактор будет иметь форму, аналогичную аттрактору, изображенному на рис. 1, С.

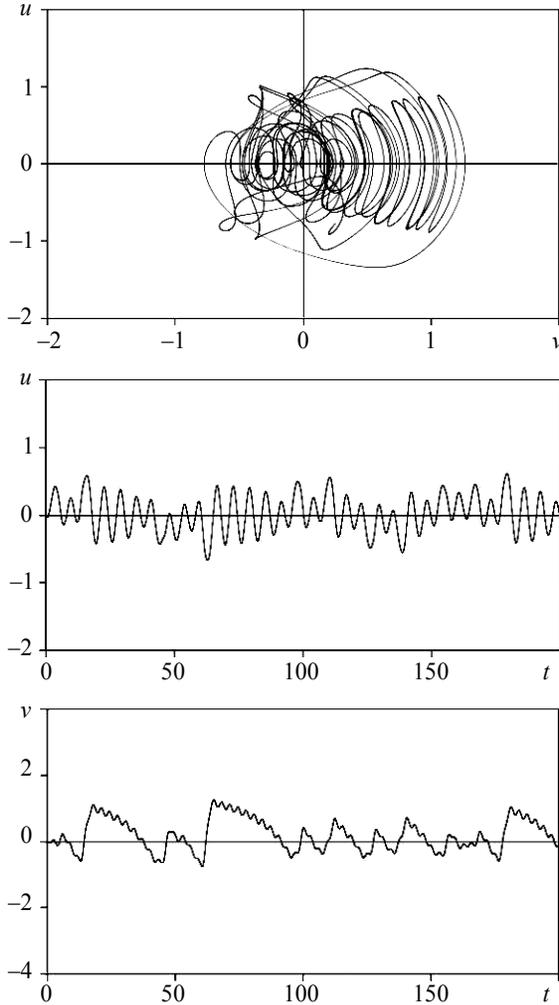
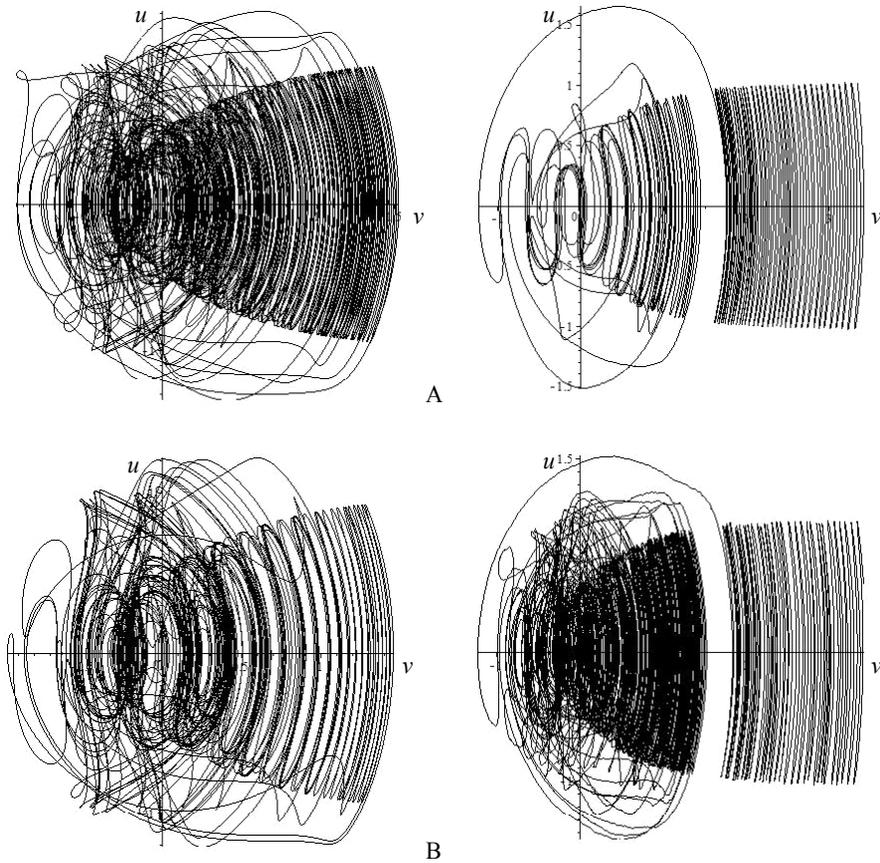


Рис. 5. Фазовая кривая и графики функций $u(t)$, $v(t)$ при $a = -0.4$, $b = 0.2$, $c = 1$, $d = 0.18$ и начальных условиях $v(0) = u(0) = 0$

Fig. 5. Phase curve and graphs of functions $u(t)$, $v(t)$ for $a = -0.4$, $b = 0.2$, $c = 1$, $d = 0.18$ and under initial conditions $v(0) = u(0) = 0$

Рассмотрим фазовые портреты, изображенные на рис. 6. При воздействии на систему случайных возмущений в зависимости от интенсивности можно наблюдать следующий эффект: фазовая кривая в возмущенной системе убегает в бесконечность, в то время как в невозмущенной системе она формирует странный аттрактор.

трактор (рис. 5). Таким образом, странный аттрактор разрушился под воздействием случайных возмущений.



A: $d = 0.17$ и $d = 0.17, \mu = 0.01$; B: $d = 0.18$ и $d = 0.18, \mu = 0.02$

Рис. 6. Эволюция фазовой кривой при $a = -0.4, b = 0.2, c = 1$

Fig. 6. Evolution of the phase curve for $a = -0.4, b = 0.2, c = 1$

5.2. Нарушение цикличности траекторий

Траектории исследуемой системы при определенных значениях параметров могут притягиваться к устойчивым циклам, которым соответствуют периодические решения системы.

Рассмотрим влияние случайного возмущения на периодичность решений системы. Например, при значениях параметров $a = 0.5, b = -0.5, c = 1, d = 0$ и начальных условиях $v(0) = 2.3, u(0) = 0$ решения системы будут носить периодический характер. Это подтверждается наличием устойчивого цикла на фазовом портрете и соответствующих ему решений системы.

На рис. 8 показана эволюция искомых решений при появлении случайных возмущений интенсивности μ .

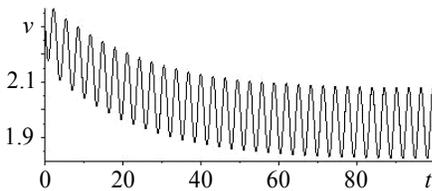
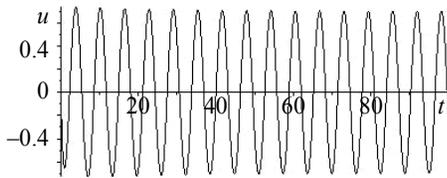
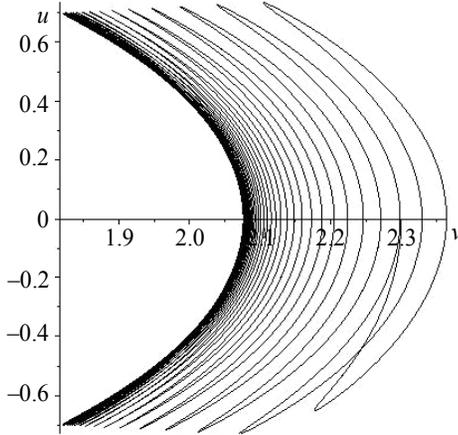
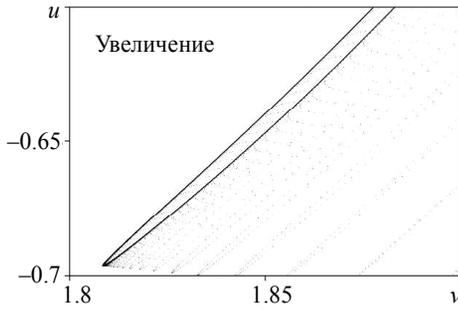


Рис. 7. Фазовая кривая с увеличением и графики искомых функций $u(t)$, $v(t)$ детерминированной механической системы
Fig. 7. Phase curve with magnification and graphs of the sought functions $u(t)$, $v(t)$ of a deterministic mechanical system

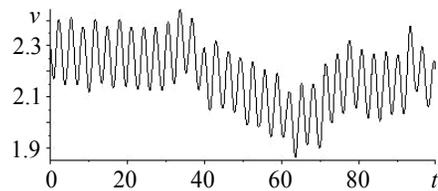
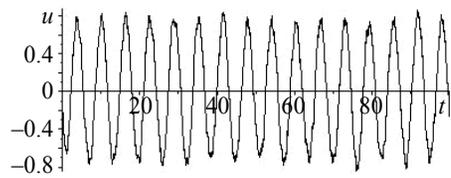
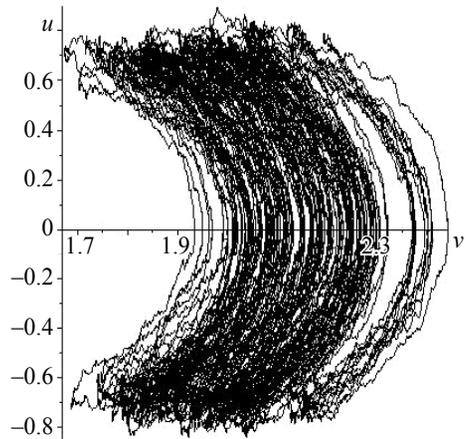


Рис. 8. Фазовая кривая и графики функций $u(t)$, $v(t)$ возмущенной механической системы при $\mu = 0.1$
Fig. 8. Phase curve and graphs of functions $u(t)$, $v(t)$ of a perturbed mechanical system at $\mu = 0.1$

В возмущенной системе вместо периодических колебания появились хаотические колебания, устойчивый цикл на фазовом портрете сменился хаотической кривой.

Заключение

Наличие случайных возмущений, действующих на механическую систему в задаче Суслова, может приводить к следующим эффектам: появлению некомпактных траекторий, преждевременному разрушению странного аттрактора, нарушению периодичности решений и переходу к хаотическим колебаниям. Открытым остается вопрос о том, какую интенсивность шума можно реализовать на практике?

Данная стохастическая схема предполагала воздействие белого шума (случайных возмущений) постоянной интенсивности только на динамику одного механического параметра. В случае постоянной интенсивности шума накопительный эффект случайных возмущений не столь ярко выражен. В контексте изучаемой проблемы стоит рассмотреть воздействие случайных возмущений более сложной структуры, в том числе и на обе искомые функции. Возможно, в этом случае изменение динамики возмущенной системы по сравнению с детерминированной системой будет еще более очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946.
2. Вагнер В.В. Геометрическая интерпретация неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 301–327.
3. Ифраимов С.В., Кулешиов А.С. Об аналогии между задачей Суслова и задачей о движении саней Чаплыгина по сфере // Современные проблемы математики и механики. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. 2013. Т. 7. С. 53–60.
4. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn. 2011. V. 16. No. 1–2. P. 104–116. DOI: 10.1134/S1560354711010035.
5. Borisov A.V., Mikishanina E.A. Two nonholonomic chaotic systems. Part I. On the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn. 2020. V. 25. Iss. 3. P. 313–322. DOI: 10.1134/S1560354720030065.
6. Бизяев И.А., Борисов А.В., Казаков А.О. Динамика задачи Суслова в поле силы тяжести: реверс и странные аттракторы // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 263–287.
7. Козлова З.П. К задаче Суслова // МТТ. 1989. № 1. С. 13–16.
8. Fernandez O.E., Bloch A.M., Zenkov D.V. The geometry and integrability of the Suslov problem // J. Math. Phys. 2014. V. 55. No. 11. 112704. 14 p. DOI: 10.1063/1.4901754.
9. Arnold L. Stochastic Differential Equation. New York: Wiley, 1974.
10. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введ. в теорию и прил. / пер. с англ. Н.И. Королевой, А.И. Матасова; под ред. В. Б. Колмановского. М.: Мир-АСТ, 2003. 406 с.
11. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: Теория и практика численного решения. СПб.: СПбГПУ, 2009. 767 с.
12. Кузнецов Д.Ф. Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики: дис. ... канд. физ.-мат.наук. СПб.: СПбГТУ, 1996.
13. Кузнецов Д.Ф. К проблеме численного моделирования стохастических систем // Вестник молодых ученых. Прикладная математика и механика. 1999. № 2.
14. Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 292 p.
15. Chang C.C. Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients // Math. Comput. 1987. V. 49. P. 523–542.
16. Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора – Ито // Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А.Стеклова. Вероятность и статистика. 1997. Т. 244. С.186–204.
17. Сатаев И.Р., Казаков А.О. Сценарии перехода к хаосу в неголономной модели волчка Чаплыгина // Нелинейная динам. 2016. Т. 12. № 2. С. 235–250.

18. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
19. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat.Phys. 1978. V. 19. No. 1. P. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.

Статья поступила 24.03.2021

Mikishanina E.A. (2021) INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF RANDOM PERTURBATIONS ON THE DYNAMICS OF THE SYSTEM IN THE SUSLOV PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 17–29

DOI 10.17223/19988621/73/2

Keywords: nonholonomic system, Suslov problem, strange attractor, random perturbations, stochastic differential equation.

The paper considers the generalized Suslov problem with variable parameters and the influence of random perturbations on the dynamics of the system under consideration. The physical meaning of the Suslov problem is Chaplygin's sleigh, which moves along the inner side of the circle. In the case of a deterministic system, a brief review of the previously obtained results is made, the presence of chaotic dynamics in the system and such effects as the appearance of a strange attractor and noncompact (escaping) trajectories is shown. Moreover, the latter may indicate a possible acceleration in the system. The appearance of chaotic strange attractors occurs due to a cascade of bifurcations of doubling the period. We also consider the dynamics of a perturbed system which arises due to the addition of «white noise» modeled by the Wiener process to one of the equations. Changes in the dynamics of a perturbed system compared to an unperturbed one are studied: chaotization of periodic regimes, the appearance of noncompact trajectories, and the premature destruction of strange attractors. In this paper, phase portraits, maps for the period, graphs of system solutions, and a chart of dynamical regimes are constructed using the Maple software package and the software package «Computer Dynamics: Chaos» (http://site4.ics.org.ru//chaos_pack).

AMS Mathematical Subject Classification: 37N15, 60H10, 74H65

Financial support. The work was supported by RFBR grant 18-29-10051 mk.

Evgeniya A. Mikishanina (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Actuarial and Financial Mathematics, Chuvash State University, Cheboksary, Russia). E-mail: evaeva_84@mail.ru

REFERENCES

1. Suslov G.K. (1946) *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow: Gostekhizdat.
2. Wagner V.V. (1941) Geometricheskaya interpretatsiya negolonomnykh dinamicheskikh sistem [Geometric interpretation of nonholonomic dynamical systems]. *Trudy seminarov po vektornomu i tenzornomu analizu*. 5. pp. 301–327.
3. Ifraimov S.V., Kuleshov A.S. (2013) Ob analogii mezhdru zadachey Suslova i zadachey o dvizhenii saney Chaplygina po sfere [On the analogy between the Suslov problem and the Chaplygin sledge movement problem in the sphere]. *Sovremennyye problemy matematiki i mekhaniki. K 80-letiyu mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta MGU*. 7. pp. 53–60.
4. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. (2011) Hamiltonicity and Integrability of the Suslov Problem. *Regular and Chaotic Dynamics*. 16(1–2). pp. 104–116. DOI: 10.1134/S1560354711010035.
5. Borisov A.V., Mikishanina E.A. (2020) Two nonholonomic chaotic systems. Part I. On the Suslov problem. *Regular and Chaotic Dynamics*. 25(3). pp. 313–322. DOI: 10.1134/S1560354720030065.

6. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kazakov A.O. (2016) Dinamika zadachi Suslova v pole sily tyazhesti: revers i strannyye attraktory [Dynamics of the Suslov problem in the field of gravity: reverse and strange attractors]. *Nelineynaya dinamika*. 12(2). pp. 263–287.
7. Kozlova Z.P. (1989) K zadache Suslova [Concerning Suslov's problem]. *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela – Mechanics of Solids*. 1. pp. 13–16.
8. Fernandez O.E., Bloch A.M., Zenkov D.V. (2014) The geometry and integrability of the Suslov problem. *Journal of Mathematical Physics*. 55(11). 112704. DOI: 10.1063/1.4901754.
9. Arnold L. (1974) *Stochastic Differential Equations, Theory and Applications*. New York: Wiley.
10. Øksendal B. (2003) *Stochastic Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag.
11. Kuznetsov D.F. (2009) *Stokhasticheskie differentsial'nyye uravneniya: Teoriya i praktika chislennogo resheniya* [Stochastic differential equations: Theory and practice of numerical solution]. St. Petersburg: St. Petersburg State Polytechnic University.
12. Kuznetsov D.F. (1996) *Metody chislennogo modelirovaniya resheniy sistem stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy Ito v zadachakh mekhaniki* [Methods of numerical modeling of solutions of systems of stochastic differential equations of ITO in problems of mechanics]. Dissertation. St. Petersburg State Polytechnic University.
13. Kuznetsov D.F. (1999) K probleme chislennogo modelirovaniya stohasticheskikh sistem [On the problem of numerical modeling of stochastic systems]. *Vestnik molodykh uchenykh. Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2.
14. Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. (1994) *Numerical Solution of SDE through Computer Experiments*. Berlin: Springer-Verlag.
15. Chang C.C. (1987) Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients. *Mathematics of Computation*. 49. pp. 523–542.
16. Kulchitsky O.Yu., Kuznetsov D.F. (1997) Unifitsirovannoye razlozheniye Teylora – Ito [Unified Taylor–Ito decomposition]. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI im. V.A. Steklova. Veroyatnost' i statistika*. 244. pp. 186–204.
17. Sataev I.R., Kazakov A.O. (2016) Stsenarii perekhoda k khaosu v negolonomnoy modeli volchka Chaplygina [Scenarios of transition to chaos in the nonholonomic model of the Chaplygin top]. *Nelineynaya dinamika*. 12(2). pp. 235–250.
18. Kuznetsov S.P. (2006) *Dinamicheskyy khaos* [Dynamic chaos]. Moscow: Fizmatlit.
19. Feigenbaum M.J. (1978) Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*. 19(1). pp. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.

Received: March 24, 2021