УДК 517.98 MSC
DOI 10.17223/19988621/73/3

Е.А. Павлов, А.И. Фурменко

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Появление первых теорем вложения, как и самого термина «вложения», связано с именем академика С.Л. Соболева. Дальнейшее развитие теории вложения пространств шло в двух направлениях: 1) теоремы вложения дифференцируемых функций; 2) теоремы вложения пространств измеримых функций. Авторами получены теоремы вложения для симметричных и более общих идеальных пространств измеримых, в смысле Лебега, функций.

Ключевые слова: *теоремы вложения, симметричные пространства, идеальные структуры, оператор растяжения.*

Появлению теории вложения пространств способствовал ряд неравенств, полученных Г.Г. Харди [1], Ф. Риссом [2]. Сам термин «вложение», как и первые теоремы вложения для пространств дифференцируемых функций нескольких переменных были получены в работах академика С.Л. Соболева [3]. Дальнейшие результаты в этом направлении получены в работах академика С.М. Никольского [4], О.В. Бесова, В.П. Ильина [5]. Значительный вклад в теорию вложения сделан П.Л. Ульяновым [6] и Н.Т. Темиргалиевым [7].

Для пространств измеримых, в смысле Лебега, функций первые результаты были получены Г.Г. Лоренцем [8, 9], В.А. Люксембургом [10], Ж.А. Лионсом [11], Е.М. Семёновым, С.Г. Крейном и Ю.И. Петуниным [12–15], В.И. Колядой [16]. В статье [16] дана обширная литература по теоремам вложения измеримых, в смысле Лебега, функций.

В фундаментальных трудах Х.Г. Трибеля [17, 18] собран огромный материал по теории вложения разных классов функций, содержатся результаты, полученные Х.Г. Трибелем, Е.М. Семёновым [12, 13] и В.А. Люксембургом [10]. Для симметричных пространств E было доказано вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty .$$

В [13] для общих идеальных структур приведено доказательство вложения

$$E \supset L_1 \cap L_\infty .$$

Следует отметить, что ряд теорем вложения идеальных структур содержится в [19].

В данной работе для общих идеальных структур, включающих в себя симметричные пространства, доказано вложение

$$E \subset L_1 + L_\infty .$$

Для достаточно широкого класса идеальных структур, включающих в себя симметричные пространства, доказано вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty .$$

В терминах норм операторов растяжения и в терминах индексов Бойда [20] доказаны теоремы вложения для симметричных пространств с ограниченным, измеримым носителем.

В статье введено новое пространство $\overline{M}_{\varphi}$, которое называется обобщенным пространством Марцинкевича. Доказано вложение

$$E \subset \overline{M}_{\varphi_{E^1}},$$

где $\varphi_E(t) = \| \chi_{[0,t]}(s) \|_E$.

1. Предварительные сведения

Определение 1. Функциональное банахово пространство E называется идеальной структурой, если из условий $|x| \le |y|$, где $x(t)$ – измеримая функция, а $y(t) \in E$, следует, что $x(t) \in E$ и $\| x \|_E \le \| y \|_E$.

Определение 2. Ассоциированным пространством E^1 для идеальной структуры E называется совокупность всех измеримых функций, носители которых содержатся в носителе E, для которых (см. [13, 19, 21])

$$\| y \|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E = 1} \int_{\Omega} x(t) y(t)\, dt < \infty,$$

где Ω – носитель пространства E, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Для простоты изложения под носителем будем понимать один из промежутков: $(-\infty, +\infty), (0, +\infty), (0, a)$, хотя результаты легко переносятся на более общие пространства с мерой, т.е. пространства $S(m, \mu)$.

Теорема 1 [13, 21]. Пусть $U(t, \tau)$ – такая функция двух переменных t, τ, что при каждом фиксированном t она, как функция τ, принадлежит идеальной структуре E, функция $\| U(t, \tau) \|$ – измерима по переменной t и выполняется соотношение

$$\int_{\Omega} \|U(t, \tau)\|_E \, dt \,|< \infty .$$

Тогда справедливо неравенство

$$\| \int_{\Omega} U(t, \tau)\, dt \|_{E^{11}} \le \int_{\Omega} \|U(t, \tau)\|_E \, dt,$$

где $E^{11} = (E^1)^1$.

Определение 3. Пусть $S(0, \infty)$ – пространство всех измеримых по Лебегу функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$ и почти всюду конечных. Функцией распределения называется функция, определенная формулой для функции $x(t) \ge 0$:

$$\eta_x(\tau) = \mathrm{mes}\{t : x(t) > \tau\}.$$

Определение 4. Две неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$ называются равноизмеримыми, если выполняется равенство

$$\eta_x(\tau) = \eta_y(\tau).$$

Рассматриваются только такие функции $x(t)$ и $y(t)$, для которых

$$\eta_x(\tau) < \infty, \quad \forall\tau \in (0, \infty),$$

$$\eta_y(\tau) < \infty, \quad \forall\tau \in (0, \infty).$$

Определение 5. Перестановкой неотрицательной функции $x(t)$ называется функция, определенная равенством

$$x^*(t) = \inf\left\{\tau : \eta_x(\tau) < t\right\}.$$

Определение 6. Функциональное банахово пространство на $(0, +\infty)$ с мерой Лебега называется симметричным [8, 10, 12], если:

1) из того, что $y \in E$ и $|x| \le |y|$ почти всюду на $y \in E$, следует, что $x(t) \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$;

2) из того, что $y \in E$ и $|x(t)|$ равноизмерима с $|y(t)|$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = |y\|_E$.

Определение 7. Оператор растяжения функций из E определяется равенством [13, 22]

$$\sigma_\tau x(t) = x\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad t, \tau \in (0, +\infty).$$

Если функции определены на интервале $(0, a)$, то

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{\tau}\right), & \text{если } t \le \tau\cdot a, \\ 0 & \text{, если } t > \tau\cdot a. \end{cases}$$

Теорема 2 [13, 22]. Оператор растяжения σ_τ ограниченно действует в симметричном пространстве E.

Определение 8. Пусть E – симметричное пространство. Верхним индексом Бойда [13, 20] называется число

$$\beta_E = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln(\tau)}.$$

Нижним индексом Бойда называется число

$$\alpha_E = \lim_{\tau\to 0} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln(\tau)}.$$

Справедливо следующее неравенство: $0 \le \alpha_E \le \beta_E \le 1$.

Теорема 3. (Обобщенное неравенство Геделя) [13, 19]. Справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega x(t)y(t)\,dt < \|x\|_E \cdot \|y\|_{E^1}.$$

Определение 9. Пространством Лоренца на $(0, +\infty)$ называется множество функций, для которых конечна норма [8, 13]

$$\| x \|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^\infty x^*(t)\, d\varphi(t) ,$$

где $\varphi(t)$ – неотрицательная, вогнутая (квазивогнутая) на $(0, +\infty)$.

Пространством Марцинкевича на $(0, +\infty)$ называется множество функций, для которых конечна норма [13, 23])

$$\| x \|_{M_\psi} = \sup_{0<h<\infty} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(s)\, ds ,$$

где ψ – вогнутая (квазивогнутая), неотрицательная функция на $(0, +\infty)$ [8, 13, 23]).

Теорема 4 [12, 13]). Справедливо соотношение

$$\Lambda_{\varphi_E} \subset E \subset M_{\frac{t}{\varphi_E}} ,$$

где $\varphi_E(t) = \| \chi_{[0,\,t]} \|_E$ – фундаментальная функция.

Лемма Е.М. Семёнова ([13], с. 136). Пусть $\psi(t)$ – непрерывная возрастающая функция. Тогда для любой функции $x \in E$, где E – симметричное пространство, справедливо неравенство

$$\| \int_0^\infty \sigma_\tau x^*(t)\, d\psi(t) \|_E \le \int_0^\infty \|\sigma_\tau x\|_E \, d\psi(t) .$$

Определение 10. Идеальная структура называется обладающей свойством Минковского, если выполняется обобщенное неравенство Минковского [13, 21])

$$\| \int_\Omega F(t,s)\, ds \|_E \le \int_\Omega \|F(t,s)\|_E \, ds .$$

В [13] (см. с. 124) была доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $E((0, +\infty); dt)$ симметричное пространство. Тогда справедливо вложение [10, 12])

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty . \tag{1}$$

2. Основные результаты

Оказывается, что более широкий класс (чем симметричные пространства) идеальных структур является промежуточным между L_1 и L_∞.

Теорема 6. Пусть $E((0, +\infty); dt)$ – идеальная структура, содержащая все характеристические функции $\chi_e(t)$, где $e \subset (0, +\infty)$ и $\operatorname{mes} e < \infty$, и выполняется соотношение

$$\sup_{e:\, \operatorname{mes} e = 1} \| \chi_e \|_{E^1} \le c < \infty , \tag{2}$$

где c не зависит от $e : \operatorname{mes} e = 1$.

Тогда справедливо вложение

$$E \subset L_1 + L_\infty . \tag{3}$$

Доказательство. В [13] (см. с. 89) доказано равенство

$$\int_0^\theta x^*(s)\,ds = \sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=\theta} \int_e |x(s)|\,ds \tag{4}$$

и равенство (см. [13], с. 108)

$$\| x \|_{L_1+L_\infty} = \int_0^1 x^*(s)\,ds . \tag{5}$$

Из [11] и [23] получаем

$$\| x \|_{L_1+L_\infty} = \int_0^1 x^*(s)\,ds = \sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=1} \int_e |x(s)|\,ds = \sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=1} \int_e^{+\infty} |x(s)|\,\chi_e(s)ds . \tag{6}$$

Используя обобщенное неравенство Гельдера [13, 19]), имеем

$$\| x \|_{L_1+L_\infty} = \sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=1} \int_e^{+\infty} |x(s)|\,\chi_e(s)ds \le \sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=1} \left(\|x\|_E \cdot \|\chi_e\|_{E^1} \right) =$$

$$= \| x \|_E \cdot \sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=1} \| \chi_e \|_{E^1} = c \, \| x \|_E , \tag{7}$$

где

$$c = \sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=1} \| \chi_e \|_{E^1} < \infty . \tag{8}$$

В [13] Лемма 4.1 (см. с. 123) была доказана.

Теорема 7. Пусть идеальная структура $E((0,+\infty);dt)$ содержит все характеристические функции $\chi_e(t)$ с $\mathrm{mes}\,e = \mu_0$ и обладает свойством

$$\sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=\mu_0} \| \chi_e \|_E \le c < \infty , \tag{9}$$

где c не зависит от выбора $e:\mathrm{mes}\,e = \mu_0$, а μ_0 – любое фиксированное положительное число.

Тогда справедливо вложение (см. [13], с. 123)

$$L_1 \cap L_\infty \subset E . \tag{10}$$

Теорема 8. Пусть идеальная структура $E((0,+\infty);dt)$ обладает следующими свойствами:

а) E содержит все характеристические функции $\chi_e(t)$ с $\mathrm{mes}\,e = \mu_0$ и выполняется неравенство

$$\sup_{e:\,\mathrm{mes}\,e=\mu_0} \| \chi_e \|_E \le c_1 < \infty , \tag{11}$$

где c_1 зависит только от μ_0;

б)
$$\sup_{e:\, \mathrm{mes}\, e = 1} \| \chi_e \|_{E^1} \le c_2 < \infty , \tag{12}$$

где c не зависит от $e : \mathrm{mes}\, e = 1$.

Тогда справедливо вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty . \tag{13}$$

Доказательство следует из теорем 6 и 7.

Следствие 1. Пусть $E((0, +\infty); dt)$ – симметричное пространство. Тогда (см. [13], с. 123) справедливо вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty . \tag{14}$$

Доказательство. Проверим выполнение условий а) и б) теоремы 8.

а)
$$\| \chi_e \|_E = \varphi_E(\mathrm{mes}\, e) = \varphi_E(\mu_0) < \infty , \tag{15}$$

где $c_1 = \varphi_E(\mu_0)$ не зависит от $e : \mathrm{mes}\, e = \mu_0$;

б)
$$\| \chi_e \|_{E^1} = \varphi_{E^1}(\mathrm{mes}\, e) \le \frac{\mathrm{mes}\, e}{\varphi_E(\mathrm{mes}\, e)} = \frac{1}{\varphi_E(\mathrm{mes}\, 1)} = c_2 < \infty . \tag{16}$$

Теорема 9. Пусть $E_1((0, +\infty); dt)$ и $E_2((0, +\infty); dt)$ – два симметричных пространства и выполняется соотношение

$$\| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \in E_2 . \tag{17}$$

Тогда справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2_{t,1}} , \tag{18}$$

где
$$\| x \|_{E_{t,1}} = \| x^{**}(t) \|_E = \| \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s)\, ds \|_E . \tag{19}$$

Доказательство. Получаем, пользуясь обобщенным неравенством Гёльдера и делая замену переменной $s = t \cdot \tau$:

$$x^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s)\, ds = \int_0^1 x^*(\tau \cdot t)\, d\tau = \int_0^\infty x^*(\tau \cdot t) \cdot \chi_{[0,1]}(\tau)\, d\tau \le$$

$$\le \| x^*(\tau \cdot t) \|_{E_1} \cdot \| \chi_{[0,t]}(\tau) \|_{E_1^1} \le \| \chi_{[0,t]}(\tau) \|_{E_1} \cdot \| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \cdot \| x \|_{E_1} . \tag{20}$$

Беря норму в E_2 от обеих частей неравенства (20), получаем

$$\| x^{**} \|_{E_2} \le c \cdot \| \| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \|_{E_2} \cdot \| x \|_{E_1} , \tag{21}$$

где $c = \| \chi_{[0,1]}(s) \|_{E_1^1}$.

Следствие 2. Полагая в теореме 9 $E = E_1, \Lambda_\psi = E_2$, получим вложение

$$E \subset \Lambda_{\psi_{t,1}}. \tag{22}$$

Замечание 1. В теореме 6 (см. [13], с. 161) при выполнении соотношения

$$\| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_E \in \Lambda_\psi \tag{23}$$

было доказано вложение

$$E \subset \Lambda_\psi. \tag{24}$$

Так как очевидно вложение

$$\Lambda_{\psi_{t,1}} \subset \Lambda_\psi, \tag{25}$$

то утверждение следствия является более сильным, чем утверждение теоремы 6 из [13].

Замечание 2. Далеко не для всех пар симметричных пространств выполняется включение

$$\| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \in E_2. \tag{26}$$

Примером могут быть пары

$$L_p((0,+\infty); dt) \qquad 1 \le p < \infty; \tag{27}$$

$$L_q((0,+\infty); dt) \qquad 1 \le q < \infty. \tag{28}$$

Теорема 10. Пусть симметричные пространства $E_1((0,1); dt)$ и $E_2((0,1); dt)$ таковы, что выполняется соотношение

$$\| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \in E_2. \tag{29}$$

Тогда справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2_{t,1}}. \tag{30}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

Следствие 3. Пусть симметричные пространства $E_1((0,1); dt)$ и $E_2((0,1); dt)$ таковы, что

$$\beta_{E_1} < \alpha_{E_2}. \tag{31}$$

Тогда справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2_{t,1}}. \tag{32}$$

Доказательство следует из теоремы 9 и свойств индексов Бойда [20]).

Следствие 4. Пусть $1 \le p_1 < p_2 < \infty$. Тогда справедливо вложение

$$\Lambda_{p_2}((0,1); dt) \subset \Lambda_{p_1}((0,1); dt). \tag{33}$$

Доказательство. Несложно проверить, что $\| \sigma_\tau \|_{\Lambda_p} = t^{(1/p)}$, $\alpha_{\Lambda_p} - \beta_{\Lambda_p} = \frac{1}{p}$. Утверждение следствия 4 вытекает из следствия 2 теоремы 9.

Определение 11. Пусть $E((\Omega; dt)$ – идеальная структура, а Ω – измеримое, в смысле Лебега, подмножество из R. $E((\Omega; dt)$ обладает следующим свойством: в E ограниченно действует оператор растяжения

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{\tau}\right), & \text{если } \frac{t}{\tau} \in \Omega, \\ 0 \quad , & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{34}$$

Пространством Харди называется функциональное пространство с нормой

$$\| x \|_{E_H} = \| \frac{1}{t} \int_0^t x(s)\, ds \|_E . \tag{35}$$

Теорема 11. Пусть $E_1((\Omega; dt)$ и $E_2((\Omega; dt)$, где $\Omega = (0,1)$ или $\Omega = (0,+\infty)$ – идеальные структуры. В E_1 ограниченно действует оператор растяжения. $E_2((\Omega; dt)$ обладает свойством Минковского [13, 19]). Тогда, если выполняется соотношение $\| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \in E_2$, то справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2_H}. \tag{36}$$

Доказательство. Делая замену переменной $s = t \cdot \tau$, получаем

$$\| x \|_{E_{2_H}} = \| \frac{1}{t} \int_0^t x(s)\, ds \|_{E_2} = \| \int_0^1 x(t \cdot \tau)\, d\tau \|_{E_2} . \tag{37}$$

Пользуясь обобщенным неравенством Гёльдера, имеем

$$\| x \|_{E_{2_H}} = \| \int_0^\infty x(\tau \cdot t) \cdot \chi_{[0,1]}(\tau)\, d\tau \|_{E_2} \le \| \| x(\tau \cdot t) \|_{E_1} \|_{E_2} \cdot \| \chi_{[0,1]}(\tau) \|_{E_1^1} \le$$

$$\le \| \| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \|_{E_2} \cdot \| \chi_{[0,1]}(\tau) \|_{E_1^1} \cdot \| x \|_{E_1} = c \| x \|_{E_1} , \tag{38}$$

где
$$c = \| \| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \|_{E_2} \cdot \| \chi_{[0,1]}(\tau) \|_{E_1^1} . \tag{39}$$

Определение 12. Обобщённым пространством Марцинкевича назовём пространство, наделённое нормой

$$\| x \|_{\overline{M}_\varphi} = \sup_{0<h<\infty} \frac{\varphi(h)}{h} \int_0^h |x(s)|\, ds , \tag{40}$$

где $\varphi(t)$ определена и измерима на $(0,+\infty)$ и неотрицательная на $(0,+\infty)$.

Теорема 12. Пусть идеальная структура обладает следующими свойствами:

1. E содержит все характеристические функции $\chi_e(t)$, где $e \subset (0,+\infty)$, e – измеримо;

2. Выполняется неравенство

$$\| \chi_{[0,h]} \|_{E^1} \le \frac{h}{\|\chi_{[0,h]}\|_E} \ . \tag{41}$$

Тогда справедливо вложение

$$E \subset \overline{M}_{\varphi_E(t)}, \tag{42}$$

где $\varphi_E(t) = \| \chi_{[0,t]} \|_E$.

Доказательство. Получаем

$$\| x \|_{\overline{M}\varphi_E} = \sup_{0<h<\infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \int_0^h |x(s)|\, ds = \sup_{0<h<\infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \int_0^\infty |x(s)|\, \chi_{[0,h]} ds. \tag{43}$$

Пользуясь обобщенным неравенством Гёделя [13]), имеем

$$\| x \|_{\overline{M}\varphi_E} \le \sup_{0<h<\infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \cdot \| x \|_E \cdot \| \chi_{[0,h]} \|_{E^1} \ .$$

Пользуясь свойством 2 для E , получаем

$$\| x \|_{\overline{M}\varphi_E} \le \sup_{0<h<\infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \cdot \frac{h}{\varphi_E(h)} \cdot \| x \|_E = \| x \|_E \ . \tag{44}$$

Замечание 3. Для случая, когда E – симметричное пространство, вложение (42) будет выполняться. Вложение (42) в этом случае будет слабее вложения

$$E \subset M_{\frac{t}{\varphi_E(t)}}, \tag{45}$$

так как очевидно вложение

$$M_{\frac{t}{\varphi_E(t)}} \subset \overline{M}_{\varphi_E(t)} \ . \tag{46}$$

Заключение

1. Доказано, что достаточно общая идеальная структура (см. теорему 8) является промежуточной между пространством L_1 и L_∞ .

2. Показано, что промежуточность симметричного пространства между L_1 и L_∞ является следствием теоремы о промежуточности идеальной структуры между L_1 и L_∞ .

3. Доказаны теоремы вложения для идеальных структур с весом, в которых ограниченно действует оператор растяжения.

4. Доказано вложение идеальной структуры (см. теорему 12) в обобщённое пространство Марцинкевича.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харди Г.Г., Литлвуд Д.Е., Пойа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
2. *Рисс Ф., Сёкефальди-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. С. 590.
3. *Соболев С.Л.* Об одной теореме функционального анализа // Матем. сборник. 1938. № 4. С. 471–497.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука. 1969.
5. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. С. 480.
6. *Ульянов П.Л.* О вложении некоторых классов функции // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 4. С. 405–414.
7. *Темиргалиев Н.Т.* О вложении в некоторые пространства Лоренца // Изв. вузов. Матем. 1980. № 6. С. 83–85.
8. *Lorentz G.G.* On the theory of spaces Λ. // Pac. J. Math. 1951. V. 1. P. 411–429. DOI: 10.2140/pjm.1951.1.411.
9. *Lorentz G.G.* Some new functional spaces // Ann. Math. 1950. V. 51. P. 37–55.
10. *Luxemburg, W.A.J.* Banach function spaces: Ph.D. Dissertation. Technische Hogeschool te Delft, 1955.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
12. *Семенов Е.М.* Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 6. С. 1292–1295.
13. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И, Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
14. *Крейн С.Г.* О понятии нормальной шкалы пространств // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 510–513.
15. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И.* Шкалы банаховых пространств // УМН. Т. 21. № 2. 1966. С. 89–168. DOI: 10.1070/RM1966v021n02ABEH004151.
16. *Коляда В.И.* Перестановки функций и теоремы вложения // УМН. 1989. Т. 44. № 3(269). С. 61–95. DOI: 10.1070/RM1989v044n05ABEH002287.
17. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. С. 664.
18. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. С. 447.
19. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. С. 744.
20. *Boyd D.W.* Indices and their relationship to interpolation // Canad. J. Math. 1969. V. 21. No. 5. P. 1245–1254. DOI: 10.4153/CJM-1969-137-x.
21. *Павлов Е.А.* Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18. № 1. С. 80–85.
22. *Shimogaki, Tetsuya.* A note on norms of compression operators on function spaces // Proc. Japan Acad. 1970. V. 46. No. 3. P. 239–242. DOI: 10.3792/pja/119552039.
23. *Mauclnkiewicz J.* Sur I interpolation d’opérations // C. R. Acad. Sc. 1939. V. 208. P. 1272–1273.
24. *Берг Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир. 1980. 264 с.

Статья поступила 22.06.2021

Pavlov E.A., Furmenko A.I. (2021) ON SOME EMBEDDING THEOREMS FOR IDEAL STRUCTURES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 30–41

DOI 10.17223/19988621/73/3

Keywords: embedding theorems, symmetric spaces, ideal structures, extension operator

For general ideal structures involving symmetric spaces, the following embedding is proved:

$$E \subset L_1 + L_\infty .$$

For a class of ideal structures involving symmetric spaces, it is proved that

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty .$$

Embedding theorems for symmetric spaces with bounded measurable support are proved in terms of the norms of the extension operators and in terms of Boyd indices (see [20]).

A new space $\overline{M}_\varphi$ called the generalized Marcinkiewicz space is introduced. The following embedding is proved:

$$E \subset \overline{M}_{\varphi_{E^1}} ,$$

where $\varphi_E(t) = \| \chi_{[0,t]}(s) \|_E$.

AMS Mathematical Subject Classification:

Evgeniy A. Pavlov (Professor, Head of Department of Mathematics, The Crimean State Engineering Pedagogical University, Simferopol, Russian Federation). E-mail: pavlov-oe@b.k.ru

Aleksandr I. Furmenko (Associate Professor of the Department of Mathematics, «N.E. Zhukovskiy and Yu.A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russian Federation). E-mail: furmenko@mail.ru

REFERENCES

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. (1952) *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Riesz F., Szőkefalvi-Nagy B. (1990) *Functional Analysis*. New York: Dover.
3. Sobolev S.L. (1938) On a theorem of functional analysis. *American Mathematical Society Translations*. 2(34). pp. 39–68.
4. Nikolskiy S.M. (1969) *Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of many variables and embedding theorems]. Moscow: Nauka.
5. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. (1978) *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*. Washington: V. H. Winston.
6. Ul'yanov P.L. (1967) Imbedding of certain classes of functions. *Mathematical Notes*. 1. pp. 270–276.
7. Temirgaliev N.T. (1980) Embedding in some Lorentz spaces. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Matematika*. (6). pp. 83–85.
8. Lorentz G.G. (1951) On the theory of spaces Λ. *Pacific Journal of Mathematics*. 1. pp. 411–429. DOI: 10.2140/pjm.1951.1.411.
9. Lorentz G.G. (1950) Some new functional spaces. *Annals of Mathematics*. 51(1). pp. 37–55.
10. Luxemburg W.A.J. (1955) Banach Function Spaces. Ph.D. Dissertation, Technische Hogeschool te Delft.
11. Lyons J.L., Magenes E. (1972) *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Berlin: Springer-Verlag.
12. Semenov E.M. (1964) Teoremy vlozheniya dlya banakhovykh prostranstv izmerimykh funktsiy [Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 156(6). pp. 1292–1295.

13. Kreyn S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. (1978) *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of linear operators]. Moscow: Nauka.
14. Krein S.G. (1960) O ponyatii normal'noy shkaly prostranstv [On the concept of the normal scale of spaces]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 132(3). pp. 510–513.
15. Krein S.G., Petunin Yu.I. (1966) Scales of Banach spaces. *Russian Mathematical Surveys*. 21(2). pp. 85–159.
16. Kolyada V.I. (1989) Rearrangements of functions and embedding theorems. 44(5). pp. 73–117. DOI: 10.1070/RM1989v044n05ABEH002287.
17. Triebel H. (1978) *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
18. Triebel H. (1983) *Theory of Function Spaces*. Boston: Birkhäuser.
19. Kantorovich L.V., Akilov G.P. (1982) *Functional Analysis*. Amsterdam: Elsevier.
20. Boyd D.W. (1969) Indices of function spaces and their relationship to interpolation. *Canadian Journal of Mathematics*. 21. pp. 1245–1254. DOI: 10.4153/CJM-1969-137-x.
21. Pavlov E.A. (1977) Operators invariant relative to displacement in symmetric spaces. *Siberian Mathematical Journal*. 18(1). pp. 138–142.
22. Shimogaki T. (1970) A note on norms of compression operators on function spaces. *Proceedings of the Japan Academy*. 46(3). pp. 239–242. DOI:10.3792/pja/1195520398.
23. Marcinkiewicz J. (1939) Sur l'interpolation d'opérations. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 208. pp. 1272–1273.
24. Bergh J., Löfström J. (1976) *Interpolation Spaces. An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag.

Received: June 22, 2021