

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УДК 514.8

DOI: 10.17223/00213411/64/10/3

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ЗВЕЗДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯА.А. Магазев¹, А.С. Попов², И.В. Широков¹¹ Омский государственный технический университет, г. Омск, Россия² Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, г. Омск, Россия

Рассматривается задача построения алгебры инвариантных дифференциальных операторов на однородных пространствах. Разработан конструктивный алгоритм решения этой задачи, основанный на использовании звездного произведения символов операторов и сводящийся к интегрированию классических гамильтоновых систем на дуальных пространствах к алгебрам Ли. Рассмотрен нетривиальный пример.

Ключевые слова: звездное произведение, группа Ли, алгебра Ли, инвариантный дифференциальный оператор.

Введение

В работе [1] были получены формулы, позволяющие заменить работу с операторными функциями из универсальной обертывающей алгебры Ли $U(\mathfrak{g})$ на работу с ассоциативной алгеброй гладких функций на дуальном пространстве к Алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В этом исследовании, в частности, было показано, что выбор локальных координат в окрестности единицы группы определяет способ упорядочения операторов в операторных функциях.

В настоящей статье мы используем указанные результаты для исследования проблемы построения *инвариантных дифференциальных операторов* на однородных пространствах $M = G/H$. Отметим, что данная задача имеет большое значение как для геометрии [2], так и для теоретической и математической физики [3]. Например, знание алгебры инвариантных операторов на однородных пространствах позволяет в явном виде конструировать на них релятивистские волновые уравнения, имеющие геометрические симметрии и допускающие в ряде случаев точную интегрируемость. С другой стороны, инвариантные операторы сами могут выступать в качестве симметрий некоторых модельных систем, например, так называемых *квазиточно разрешимых потенциалов* уравнения Шредингера [4].

Структура настоящей работы следующая. В первом разделе мы напомним некоторые сведения из нашей предыдущей работы [1]. В частности, мы приводим удобную формулу для вычисления звездного произведения символов операторов в терминах функции композиции на группе Ли, а также напомним рекуррентный алгоритм построения квантовых интегралов движения, сводящийся к интегрированию классических гамильтоновых систем на дуальных пространствах алгебр Ли. Второй раздел содержит некоторые факты, касающиеся алгебр инвариантных дифференциальных операторов на однородных пространствах, а также описание оригинального эффективного метода их вычисления с помощью звездного произведения символов операторов. В третьем разделе приводится пример применения нашего метода: мы вычисляем алгебру инвариантных дифференциальных операторов на четырехмерном однородном пространстве неразрешимой пятимерной группы Ли.

1. Предварительные сведения

В целях замкнутости изложения напомним в настоящем разделе некоторые необходимые сведения, следуя нашей предыдущей работе [1].

Пусть G – связная и односвязная вещественная n -мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, базисные элементы которой $\{e_i\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям: $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$. Пусть

Уважаемые читатели!

Доступ к полнотекстовой версии журнала
«Известия высших учебных заведений. Физика»
осуществляется на платформе
Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU
на платной основе:

<https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=7725>