

МАТЕМАТИКА

УДК 515.1

DOI 10.17223/19988621/74/1

MSC 54D20

О.О. Бадмаев

ОБ АДДИТИВНОЙ МОДИФИКАЦИИ γ -СВОЙСТВА

Для тихоновских пространств определяется последовательность $(\gamma'_k)_{k < \omega}$ топологических свойств, каждое из которых не сильнее чем классическое свойство Герлича – Надя (γ -свойство), и γ'_{k+1} следует из γ'_k . Изучено поведение индекса k при стандартных топологических операциях. Как один из главных результатов установлено, что в отличие от γ -свойства взятие топологической суммы не выводит за пределы последовательности $(\gamma'_k)_{k < \omega}$, а лишь приводит к сложению индексов. Кроме того, обнаружена связь последовательности $(\gamma'_k)_{k < \omega}$ со свойством Линделёфа, а также некоторые другие факты.

Ключевые слова: ω -покрытие, γ -свойство, свойство Герлича – Надя, γ'_k -свойство, свойство Линделёфа.

Впервые определение γ -свойства топологического пространства X сформулировали Герлич и Надя в статье [1], где установили, в частности, что γ -свойство X характеризует свойство Фреше – Урысона пространства $C_p(X)$. Эта характеристика привела к естественному вопросу, будет ли топологическая сумма $X \oplus Y$ обладать γ -свойством, если оба слагаемых им обладают (см., например, [2, задача П.3.10] или [3, problem 4.4.1]). Позднее Гэлвин и Миллер в предположении Аксиомы Мартина построили пример подмножеств X и Y вещественной прямой $\mathbb{R}$, обладающих γ -свойством, но таких, что $X \oplus Y$ не обладает γ -свойством (см. [4]). Но остается нерешённым вопрос о нахождении такого примера без дополнительных аксиоматических предположений. Это стимулирует поиски аналогов γ -свойства и исследования их поведения при стандартных топологических операциях ([5–7]).

В данной статье мы вводим в рассмотрение ранжированный класс возрастающих по объёму аналогов γ -свойства и показываем, что взятие топологической суммы лишь увеличивает ранг, не выводя за пределы самого класса свойств. Также мы описываем поведение введенного класса свойств при основных топологических операциях и устанавливаем соотношение этого класса со свойством Линделёфа.

Все топологические пространства предполагаются тихоновскими. Все рассматриваемые покрытия нетривиальны, то есть не содержат все топологическое пространство как элемент.

Определение 1. Скажем, что последовательность подмножеств $\eta = \{A_n\}_{n \in \omega}$ пространства X сходится к X (пишем $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$), если произвольная точка $x \in X$ принадлежит всем членам последовательности η , начиная с некоторого (зависящего от x) номера.

Определение 2. Семейство η подмножеств пространства X называется ω -покрытием этого пространства, если для каждого конечного множества $K \subset X$ существует $U \in \eta$, такое, что $K \subset U$.

Определение 3 [1]. Пространство X называется γ -пространством, если в любом его открытом ω -покрытии η можно найти последовательность $\zeta = \{B_n\}_{n \in \omega}$, такую, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$.

Определение 4. Пусть η – произвольное семейство открытых подмножеств пространства X . Скажем, что η' является n -насыщенным семейством для η , если $\eta' = \{\bigcup_{i \leq m} U_i : U_i \in \eta, m \leq n\}$. Скажем, что η' является насыщенным семейством

для η , если $\eta' = \{\bigcup_{i \leq m} U_i : U_i \in \eta, m \in \omega\}$.

Очевидно, что если η – ω -покрытие пространства X , то его n -насыщенное семейство η' также является ω -покрытием X для любого $n \in \omega$.

Определение 5. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_k , если для любого открытого ω -покрытия η пространства X , в его k -насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_n\}_{n \in \omega}$, такая, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. При этом само пространство X будем называть γ'_k -пространством.

Определение 6. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_ω , если для любого открытого ω -покрытия η пространства X в его насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_n\}_{n \in \omega}$, такая, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. При этом само пространство X будем называть γ'_ω -пространством.

Следующие предложения следуют напрямую из определений:

Предложение 7: (а) Свойство γ эквивалентно свойству γ'_1 ;

(б) Для любого $k \in \omega$ выполнено $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_{k+1}$.

(в) Для любого $k \in \omega$ выполнено $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_\omega$.

Предложение 8. Если X дискретно и обладает свойством γ'_k для некоторого $k \in \omega$, то $|X| \leq \omega$.

Предложение 9. Если $|X| \leq \omega$, то X обладает свойством γ'_1 .

Введённая выше последовательность γ'_k -свойств, как целое, «выдерживает» взятие топологической суммы, нужно лишь сложить индексы. Точнее, справедлива следующая

Теорема 10: (а) Пусть k, m – произвольные натуральные числа. Если X является γ'_k -пространством, Y является γ'_m -пространством, тогда $X \oplus Y$ является γ'_{k+m} -пространством.

(б) Кроме того, $X \oplus X$ является γ'_k -пространством.

Доказательство: (а) Пусть η – открытое ω -покрытие пространства $X \oplus Y$, а η' является открытым $(k+m)$ -насыщенным семейством для η . Оно также является ω -покрытием для $X \oplus Y$. Покажем, что из η' можно извлечь последовательность, сходящуюся к $X \oplus Y$.

Построим семейства $\eta_1 = \{U \cap X \mid U \in \eta\}$ и $\eta_2 = \{U \cap Y \mid U \in \eta\}$, которые являются ω -покрытиями X и Y соответственно. Обозначим через η'_1 k -насыщенное семейство для η_1 и, аналогично, через η'_2 обозначим m -насыщенное семейство для η_2 . Так как X является γ'_k -пространством, то для семейства η'_1 существует последовательность $(A_n)_{n \in \omega}$ из η'_1 , такая, что $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. По определению семейства η'_1 , для каждого $n \in \omega$ имеем $A_n = (V_1^n \cap X) \cup \dots \cup (V_k^n \cap X)$, где $V_i^n \in \eta$ при $i \leq k$. Аналогично, получим последовательность $(B_n)_{n \in \omega}$ из η'_2 , такую, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y$. По определению семейства η'_2 , для каждого $n \in \omega$ имеем $B_n = (U_1^n \cap Y) \cup \dots \cup (U_m^n \cap Y)$, где $U_j^n \in \eta$ при $j \leq m$. Положим $\xi = (V_n \cup U_n)_{n \in \omega}$, где $V_n = V_1^n \cup \dots \cup V_k^n$ и $U_n = U_1^n \cup \dots \cup U_m^n$. Заметим, что для всех $n \in \omega$ $V_n \in \eta'$, $U_n \in \eta'$ и $V_n \cup U_n \in \eta'$. Покажем, что последовательность $\xi = (V_n \cup U_n)_{n \in \omega}$ является искомой.

Рассмотрим произвольную точку z из $X \oplus Y$. Если $z \in X$, то существует $k_1 \in \omega$, такой, что для всех $n \geq k_1$ точка z содержится в A_n , откуда следует, что $z \in V_n \subset (V_n \cup U_n) \in \xi$. Аналогично для случая $z \in Y$.

(б) Рассмотрим случай $X \oplus X$. Пусть η – открытое ω -покрытие пространства $X \oplus X$, а η' является открытым k -насыщенным семейством для η . Обозначим слагаемые в сумме $X \oplus X$ через X^1 и X^2 . Пусть $I: X^1 \rightarrow X^2$ – тождественное отображение. Покажем, что семейства $\eta_1 = \{U \cap X^1 \mid U \in \eta\}$ и $\eta_2 = \{I(U \cap X^1) \cap (U \cap X^2) \mid U \in \eta\}$ являются ω -покрытиями пространств X^1 и X^2 соответственно. Для η_1 утверждение очевидно. Пусть K – конечное подмножество в X^2 , тогда существует $U \in \eta$, такое, что $K \cup I^{-1}(K) \subset U$. Таким образом, $K \subset U \cap X^2$ и $I^{-1}(K) \subset U \cap X^1$, откуда следует, что $K \subset I(U \cap X^1)$. Поэтому заключаем, что η_2 является ω -покрытием X^2 , так как $K \subset I(U \cap X^1) \cap (U \cap X^2) \in \eta_2$.

Пусть η'_2 является открытым k -насыщенным семейством для η_2 . Так как X^2 является γ'_k -пространством, то существует последовательность $(B_n)_{n \in \omega}$ из η'_2 , такая, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X^2$, при этом $B_n = (I(U_{n,1} \cap X^1) \cap (U_{n,1} \cap X^2)) \cup \dots \cup (I(U_{n,k} \cap X^1) \cap (U_{n,k} \cap X^2))$. Положим $A_n = (U_{n,1} \cap X^1) \cup \dots \cup (U_{n,k} \cap X^1) \in \eta'_1$, где η'_1 является открытым k -насыщенным семейством для η_1 . Рассмотрим также

последовательность $(I^{-1}(B_n))_{n \in \omega}$ подмножеств в X^1 . По построению $I^{-1}(B_n) \subset A_n$. Поэтому, из того, что $I^{-1}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X^1$, следует, что $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X^1$.

Покажем, что $W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \oplus X$, где $W_n = U_{n,1} \cup \dots \cup U_{n,k}$ для всех $n \in \omega$. Рассмотрим произвольную точку z из $X \oplus X$. Если $z \in X^2$, то существует $n_2 \in \omega$, что для всех $n \geq n_2$ точка $z \in B_n$, значит, $z \in W_n = U_{n,1} \cup \dots \cup U_{n,k}$. Если $z \in X^1$, то существует $n_1 \in \omega$, что для всех $n \geq n_1$ точка $z \in A_n$, значит, $z \in W_n = U_{n,1} \cup \dots \cup U_{n,k}$. $\square$

Замечание 11. В статье [4] в предположении аксиомы Мартина (МА) построен пример подмножеств X и Y вещественной прямой, обладающих γ -свойством, чья прямая сумма $X \oplus Y$ не обладает γ -свойством. По предложению 7 (а) и по теореме 10 (а), прямая сумма $X \oplus Y$ обладает γ'_2 -свойством. Стало быть, в предположении МА свойства γ'_1 и γ'_2 не совпадают. Без дополнительных теоретико-множественных предположений вопрос о различении свойств γ'_k и γ'_{k+1} является открытым.

Ниже устанавливается, что при произвольном $k \in \omega$ свойство γ'_k сохраняется при стандартных топологических операциях. Доказательства для перехода к замкнутому подпространству и к непрерывному образу опускаются ввиду их элементарности.

Предложение 12. Пусть X обладает свойством γ'_k , тогда

- (а) Непрерывный образ X обладает свойством γ'_k ;
- (б) Произвольное замкнутое подпространство X обладает свойством γ'_k .

Укажем здесь два естественных применения предложения 12 (б). Напомним, что дискретной клеточностью пространства X называется кардинал $dc(X) = \sup \{ |\mathcal{U}| \}$, где супремум берется по всем дискретным непустым семействам $\mathcal{U}$ открытых множеств в X . Экстендом $e(X)$ пространства X называют наименьший бесконечный кардинал τ , такой, что мощность каждого замкнутого дискретного подпространства пространства X не превосходит τ .

Следствие 13. Если X обладает свойством γ'_k для произвольного $k \in \omega$, то $e(X) \leq \omega$.

Следствие 14. Если X обладает свойством γ'_k для произвольного $k \in \omega$, то $dc(X) \leq \omega$.

Доказательство. Предположим, что $dc(X) > \omega$. Рассмотрим замкнутое дискретное подпространство $Y \subset X$, которое построено следующим образом: в каждом элементе некоторого дискретного несчетного семейства открытых подмножеств пространства X взято по произвольной точке. Таким образом, $|Y| > \omega$ и, по предложению 12 (б), Y должно иметь свойство γ'_k , что противоречит предложению 8. $\square$

Теорема 15. Если каждое замкнутое подпространство пространства X , не равное самому X , обладает свойством γ'_k , то X обладает свойством γ'_{k+1} .

Доказательство. Пусть η – открытое ω -покрытие пространства X , пусть η' является k -насыщенным семейством для η . Пусть U – произвольный элемент покрытия η . Рассмотрим подпространства $X \setminus U$ и семейство $\mu = \{(X \setminus U) \cap W \mid W \in \eta\}$. Легко проверить, что семейство μ является ω -покрытием $X \setminus U$. Тогда семейство $\mu' = \{((X \setminus U) \cap W_1) \cup \dots \cup ((X \setminus U) \cap W_k) \mid W_1, \dots, W_k \in \eta\}$ является k -насыщенным семейством для μ . Перепишем μ' следующим образом: $\mu' = \{(X \setminus U) \cap (W_1 \cup \dots \cup W_k) \mid W_1, \dots, W_k \in \eta\}$. Теперь видно, что μ' является следом η' в $X \setminus U$.

Так как $X \setminus U$ обладает свойством γ'_k , то существует последовательность $\mu_1 \subset \mu'$, такая, что, при всех $n \in \omega$ и $V_n \in \eta'$ последовательность $\mu_1 = (V_n \cap (X \setminus U))_{n \in \omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \setminus U$. Покажем, что последовательность $\xi = (V_n \cup U)_{n \in \omega}$ сходится к X . Рассмотрим произвольную точку z из X . Если $z \in U$, то по построению точка z принадлежит всем членам последовательности ξ . Если $z \notin U$, то $z \in X \setminus U$, значит существует номер $k_1 \in \omega$, такой, что для всех $m \geq k_1$ точка $z \in V_m \cap (X \setminus U)$, откуда следует, что $z \in V_m \cup U$. $\square$

Ниже мы устанавливаем, что свойство γ'_k сохраняется при возведении в конечную степень. Нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 16 [8]. Пусть X является топологическим пространством и n – произвольное натуральное число. Если η – произвольное ω -покрытие пространства X^n , то существует открытое ω -покрытие μ пространства X , такое, что открытое покрытие $\{V^n \mid V \in \mu\}$ пространства X^n является измельчением η .

Теорема 17. Если X есть γ'_k -пространство для некоторого $k \in \omega$, то X^n – также γ'_k -пространство для любого $n \in \omega$.

Доказательство. Пусть η – произвольное открытое ω -покрытие пространства X^n . Пусть μ является ω -покрытием пространства X , таким, что открытое покрытие $\{V^n \mid V \in \mu\}$ пространства X^n является измельчением η (это возможно по лемме 16). Пусть μ' – k -насыщенное ω -покрытие пространства X . Так как X является γ'_k -пространством, то существует последовательность $\xi \subset \mu'$, такая, что $\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. Для каждого $V_i = V_{i,1} \cup \dots \cup V_{i,k} \in \xi$ при $i \in \omega$, где $V_{i,j} \in \mu$ и $j \leq k$, рассмотрим множество $U_i = U_{i,1} \cup \dots \cup U_{i,k}$ в X^n , такое, что $V_{i,j}^n \subseteq U_{i,j} \in \eta$.

Покажем, что последовательность $\sigma = \{U_i\}_{i \in \omega}$ – искомая. Пусть $F \subset X^n$ является конечным множеством в X^n , найдем конечное множество K в X^n , такое, что проекции K на каждый сомножитель X^n одинаковые и $F \subset K$. Рассмотрим проекцию $p(K) \subset X$, тогда существует такое $t_0 \in \omega$, что для всех $t \geq t_0$ имеет место

$p(K) \subset V_t$ и $V_t^n \subseteq U_t \in \eta$. Таким образом, для произвольного конечного $F \subset X^n$ имеем $F \subset p(K)^n \subset V_t^n \subset U_t$ при всех $t \geq t_0$. $\square$

Замечание 18. Теорема 16, теорема 10 (б) и предложение 12 показывают, что «наивный» пример γ -пространств X, Y , для которых сумма $X \oplus Y$ не является γ -пространством, требует, чтобы пространство Y не могло быть получено из X конечным числом операций возведения в степень, перехода к замкнутому подпространству и к непрерывному образу.

Теорема 19. Пространство X линделёфово тогда и только тогда, когда X является γ'_ω -пространством.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольное открытое ω -покрытие η пространства X . Так как X линделёфово, то можем выбрать последовательность $(U_n)_{n \in \omega} \subset \eta$, покрывающую X . Легко доказать, что последовательность $\mu = \{\bigcup_{i \leq n} U_i \mid n \in \omega\}$ сходится к X и состоит из элементов насыщенного семейства для η . Для доказательства в обратную сторону, достаточно произвольное покрытие замкнуть относительно операции конечного объединения, увидеть, что получившееся покрытие будет ω -покрытием и применить свойство γ'_ω . $\square$

Следствие 20. Пусть $X = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, где каждое F_n обладает свойством $\gamma'_{k(n)}$.

Тогда X линделёфово.

Доказательство. Так как каждое F_n обладает свойством $\gamma'_{k(n)}$, то оно обладает и свойством γ'_ω (предложение 7 (в)). Тогда, по теореме 19, каждое F_n – линделёфово пространство. Стало быть, X – объединение счётного семейства своих линделёфовых подпространств и потому само линделёфово. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerlits J., Nagy Zs. Some properties of $C(X)$, I // Topology and its Applications. 1982. V. 14. Iss. 2. P. 151–161. DOI: 10.1016/0166-8641(82)90065-7.
2. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. Tkachuk V.V. A Cp-Theory Problem Book Topological and Function Spaces. Springer, 2010.
4. Galvin F., Miller A.W. γ -sets and other singular sets of real numbers // Topology and its Applications. 1984. V. 17. Iss. 2. P. 145–155. DOI: 10.1016/0166-8641(84)90038-5.
5. Sakai M. The Pytkiev property and the Rezhichecnko property in function spaces // Note Mat. 2003. V. 22. P. 43–52.
6. Sakai M. Property C'' and function spaces // Proc Amer. Math. Soc. 1998. V. 104. P. 917–919.
7. May N., Spadaro S., Szeptycki P. A new class of spaces with all finite powers Lindelöf // Topology and its Applications. V. 170. 2014. P. 104–118. DOI: 10.1016/j.topol.2014.04.004.
8. Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J. The combinatorics of open covers II // Topology and its Applications. V. 73. Iss. 3. 1996. P. 241–266. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00075-2.

Статья поступила 10.10.2021

Badmaev O.O. (2021) ON AN ADDITIVE MODIFICATION OF THE γ -PROPERTY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 5–11

DOI 10.17223/19988621/74/1

Keywords: ω -cover, γ -property, Gerlits–Nagy property, γ'_k -property, Lindelöf property

The aim of this article is to modify the notion of the γ -property so that the modified property is preserved under taking a direct topological sum. To this end, we use a procedure of “saturation” of ω -covers of topological spaces. Namely, we add to each ω -cover the family of all unions of its subfamilies consisting of at most k elements (“ k -saturation”), or the family of all unions of its finite subfamilies (“saturation”).

Thus, we obtain for Tychonoff spaces a sequence $(\gamma'_k)_{k < \omega}$ of covering properties such that $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_{k+1}$ for any integer k , and γ'_1 is the well-known γ -property. Also, the property γ'_ω such that $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_\omega$ for any integer k is obtained. It is proved that each γ'_k -property is preserved under usual topological operations, namely, taking closed subspaces, continuous images, and finite powers.

It is known that the classical γ -property can be failed under passing to topological sum. Our main result means that it is impossible with respect to whole sequence $(\gamma'_k)_{k < \omega}$. More precisely, if a space X satisfies γ'_k , Y satisfies γ'_m , then the sum $X \oplus Y$ satisfies γ'_{k+m} . Nevertheless, $X \oplus X$ satisfies γ'_k as X itself.

As another main result, we establish that the γ'_ω -property and the Lindelöf property are equivalent. It follows that any countable union of spaces X_n with the $\gamma'_{k(n)}$ -property is a Lindelöf space.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 54D20

Oleg O. BADMAEV (Tomsk State University, Tomsk, Russia). E-mail: badmaev1995@bk.ru

REFERENCES

1. Gerlits J., Nagy Zs. (1982) Some properties of $C(X)$. I. *Topology and its Applications*. 14(2). pp. 151–161. DOI: 10.1016/0166-8641(82)90065-7.
2. Arkhangel'skii A.V. (1992) *Topological Function Spaces*. Mathematics and its applications, Soviet Series, 78. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
3. Tkachuk V.V. (2011) *A C_p -Theory Problem Book*. Springer.
4. Galvin F., Miller A.W. (1984) γ -sets and other singular sets of real numbers. *Topology and Its Applications*. 17(2). pp. 145–155. DOI: 10.1016/0166-8641(84)90038-5.
5. Sakai M. (2003) The Pytkeev property and the Reznichenko property in function spaces. *Note di Matematica*. 22(2). pp. 43–52.
6. Sakai M. (1998) Property C'' and function spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 104(3). pp. 917–919.
7. May N., Spadaro S., Szeptycki P. (2013) A new class of spaces with all finite powers Lindelöf. *Topology and Its Applications*. 170(2). pp. 104–118. DOI: 10.1016/j.topol.2014.04.004.
8. Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J. (1996) The combinatorics of open covers II. *Topology and Its Applications*. 73(3). pp. 241–266. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00075-2.

Received: October 10, 2021