

Э.Г. Халилов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Построена последовательность, сходящая к точному решению гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца, которое является граничным значением решения внешней краевой задачи Неймана на границе области. Кроме того, построена последовательность, сходящая к точному решению слабосингулярного интегрального уравнения первого рода внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, которое является граничным значением нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле на границе области.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода, слабосингулярные интегральные уравнения, гиперсингулярные интегральные уравнения, уравнение Гельмгольца, внешняя краевая задача Неймана, внешняя краевая задача Дирихле.

1. Введение и постановки задачи

Известно, что одним из методов решения внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца является их приведение к интегральным уравнениям первого рода. Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

Пусть $D \subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S , f и g – заданные непрерывные функции на S , $C^2(\Omega)$ – пространство всех дважды непрерывно дифференцируемых функций в области $\Omega \subset R^3$, а $C(\Omega)$ – пространство всех непрерывных функций в области Ω .

Рассмотрим следующие краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

Внешняя краевая задача Дирихле. Найти функцию $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(R^3 \setminus D)$,

удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^3 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{gradu}(x) \right) - i k u(x) = o\left(\frac{1}{|x|} \right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию $u = f$ на S , где k – волновое число, причем $\text{Im } k \geq 0$.

Внешняя краевая задача Неймана. Найти функцию $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(R^3 \setminus D)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, т.е. предел

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}(x)} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} (\vec{n}(x), \text{grad} u(x + h\vec{n}(x))), \quad x \in S,$$

существует равномерно на S , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $R^3 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию $\partial u / \partial \vec{n} = g$ на S , где $\vec{n}(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$.

В работе [1, с. 115] показано, что если решение уравнения Гельмгольца $u(x)$, удовлетворяющее условиям излучения имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то это решение можно представить в виде

$$u(x) = \int_S \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}(y)} \Phi_k(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D},$$

где $\Phi_k(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y.$$

Используя это представление, в работе [1, с. 116–117] доказано, что функция

$$u(x) = \int_S \left\{ \psi(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - g(y) \Phi_k(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Неймана, если $\psi \in N(S)$ есть решение гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода

$$T\psi = g + \tilde{K}g, \quad (1)$$

а функция

$$u(x) = \int_S \left\{ f(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - \varphi(y) \Phi_k(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле, если $\varphi \in C(S)$ есть решение слабосингулярного интегрального уравнения первого рода

$$L\varphi = -f + Kf, \quad (2)$$

где

$$(L\varphi)(x) = 2 \int_S \Phi_k(x, y) \varphi(y) dS_y, \quad x \in S,$$

$$(Kf)(x) = 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} f(y) dS_y, \quad x \in S,$$

$$(\tilde{K}g)(x) = 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(x)} g(y) dS_y, \quad x \in S,$$

$$(T\psi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} \left(\int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \psi(y) dS_y \right), \quad x \in S,$$

а через $N(S)$ обозначено пространство всех непрерывных функций ψ , потенциал двойного слоя с плотностью ψ которых имеет непрерывные нормальные производные на обеих сторонах поверхности S .

Следует указать, что внешние краевые задачи Дирихле и Неймана можно привести различным интегральным уравнениям первого рода. Однако уравнения (1) и (2) имеют то преимущество, что решение уравнения (1) является граничным значением решения внешней краевой задачи Неймана на S , а решение уравнения (2) является граничным значением нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле на S (см. [1, с. 116–117]). Отметим, что несмотря на полученные успехи в области численного решения интегральных уравнений первого рода (см. [2–6]), до сих пор не исследовано приближенное решение уравнений (1) и (2). Причина состоит в том, что несмотря на обратимость операторов T и L при $\text{Im } k > 0$, обратные операторы T^{-1} и L^{-1} выражаются через обратные операторы $(I - \tilde{K})^{-1}$ и $(I - \tilde{K})^{-1}$, явные виды которых неизвестны, где I – единичный оператор в пространстве $C(S)$.

Настоящая работа посвящена исследованию приближенных решений интегральных уравнений первого рода (1) и (2).

2. Исследование приближенного решения интегрального уравнения (1)

Отметим, что оператор T является неограниченным в пространстве $N(S)$. Однако в работе [1, с.102] показано, что если $\text{Im } k > 0$, то оператор T обратим, причем оператор T^{-1} , обратный к оператору T , дается соотношением

$$T^{-1} = -L(I - \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}.$$

Следовательно, при любой правой части $f \in C(S)$ гиперсингулярное интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве $N(S)$, причем решение интегрального уравнения (1) имеет вид

$$\psi = -L(I - \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})g = -L(I - \tilde{K})^{-1}g. \quad (3)$$

Используя формулу (3), дадим метод вычисления приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения (1) в определенных точках.

Разобьем S на «регулярные» элементарные части: $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$. Под «регулярной» элементарной частью условимся понимать множество точек, подчиненных следующим требованиям:

(1) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ элементарная часть S_l замкнута и его множество внутренних относительно S точек S_l^0 не пусто, причем $\text{mes } S_l^0 = \text{mes } S_l$ и при $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $j \neq l$, $S_l^0 \cap S_j^0 = \emptyset$;

(2) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ элементарная часть S_l представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

(3) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ существует так называемая опорная точка $x(l) = (x_1(l), x_2(l), x_3(l)) \in S_l$, такая, что

$$(3.1) \quad r_l(N) \sim R_l(N)^1, \text{ где } r_l(N) = \min_{x \in \partial S_l} |x - x(l)| \text{ и } R_l(N) = \max_{x \in \partial S_l} |x - x(l)|;$$

$$(3.2) \quad \sqrt{R_l(N)} \leq d/2, \text{ где } d - \text{радиус стандартной сферы (см. [7, с.400]);}$$

$$(3.3) \text{ для любого } j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad r_j(N) \sim r_l(N).$$

Очевидно, что $r(N) \sim R(N)$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} r(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} R(N) = 0$, где $R(N) = \max_{l=1, N} R_l(N)$, $r(N) = \min_{l=1, N} r_l(N)$. Кроме того, в работе [8] доказано, что при разбиении поверхности S на «регулярные» элементарные части имеет место соотношение $R(N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Рассмотрим матрицу $\tilde{K}^N = (\tilde{k}_{lj})_{l,j=1}^N$ с элементами

$$\tilde{k}_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{при } l \neq j, \\ 2 \frac{\partial \Phi_k(x(l), x(j))}{\partial \vec{n}(x(l))} \text{mes} S_j, & \text{при } l = j. \end{cases}$$

Кроме того, пусть

$$f_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{при } l \neq j, \\ 2 \Phi_k(x(l), x(j)) \text{mes} S_j, & \text{при } l = j, \end{cases}$$

и для функции $g \in C(S)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(g, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in S}} |g(x) - g(y)|, \quad \delta > 0.$$

В работе [9] доказано, что выражения

$$(Lg)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N f_{lj} g(x(j)) \text{mes} S_j \quad (4)$$

и

$$(\tilde{K}g)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj} g(x(j)) \text{mes} S_j$$

в точках $x(l), l = \overline{1, N}$, являются кубатурными формулами для интегралов $(Lg)(x)$ и $(\tilde{K}g)(x)$ соответственно, причем

$$\max_{l=1, N} |(Lg)(x(l)) - (Lg)^N(x(l))| \leq M^2 (\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N))),$$

$$\max_{l=1, N} |(\tilde{K}g)(x(l)) - (\tilde{K}g)^N(x(l))| \leq M (\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N))),$$

где $\|g\|_\infty = \max_{x \in S} |g(x)|$.

¹ $a(N) \sim b(N) \Leftrightarrow C_1 \leq a(N)/b(N) \leq C_2$, где C_1 и C_2 положительные постоянные, не зависящие от N .

² Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Сформулируем следующие леммы из работы [10].

Лемма 1 [10]. Если $\text{Im} k > 0$ и $g \in C(S)$, то существует обратная матрица $(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}$, причем

$$M_1 = \sup_N \left\| (I^N + \tilde{K}^N)^{-1} \right\| < +\infty$$

$$\text{и } \max_{l=1, N} \left| \left((I + \tilde{K})^{-1} g \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^+ g(x(j)) \right| \leq M \left[\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right],$$

где $\tilde{k}_{lj}^+$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}$, а I^N – единичная матрица с размерностью N .

Лемма 2 [10]. Если $\text{Im} k > 0$ и $g \in C(S)$, то существует обратная матрица $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$, причем

$$M_2 = \sup_N \left\| (I^N - \tilde{K}^N)^{-1} \right\| < +\infty$$

$$\text{и } \max_{l=1, N} \left| \left((I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- g(x(j)) \right| \leq M \left[\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right],$$

где $\tilde{k}_{lj}^-$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\text{Im} k > 0$ и $g \in C(S)$. Тогда последовательность

$$\psi^N(x(l)) = - \sum_{j=1}^N f_{lj} \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- g(x(n)) \right)$$

сходится к значению решения $\psi(x)$ уравнения (1) в опорных точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, причем

$$\max_{l=1, N} \left| \psi(x(l)) - \psi^N(x(l)) \right| \leq M \left[\|g\|_\infty \frac{\ln N}{\sqrt{N}} + \omega(g, 1/\sqrt{N}) \right].$$

Доказательство. Принимая во внимание оценку погрешности кубатурной формулы (4) и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \left| \psi(x(l)) - \psi^N(x(l)) \right| &\leq \left| \left(L(I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N f_{lj} \left((I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(j)) \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^N f_{lj} \left[\left((I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(j)) - \sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- g(x(n)) \right] \right| \leq \\ &\leq M \left[\left\| (I - \tilde{K})^{-1} g \right\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega \left((I - \tilde{K})^{-1} g, R(N) \right) \right] + \\ &\quad + M \left[\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right] \sum_{j=1}^N |f_{lj}|. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно, что, если $\operatorname{Im} k > 0$, то уравнение (см. [1, с. 92])

$$\rho - \tilde{K}\rho = g$$

имеет единственное решение $\rho_* = (I - \tilde{K})g \in C(S)$. Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\omega(\tilde{K}\rho_*, h) \leq M \|\rho_*\|_\infty h |\ln h|,$$

находим

$$\begin{aligned} \omega\left((I - \tilde{K})^{-1}g, R(N)\right) &= \omega(\rho_*, R(N)) = \omega(g + \tilde{K}\rho_*, R(N)) \leq \\ &\leq \omega(g, R(N)) + \omega(\tilde{K}\rho_*, R(N)) \leq \omega(g, R(N)) + M \|\rho_*\|_\infty R(N) |\ln R(N)| = \\ &= \omega(g, R(N)) + M \left\| (I - \tilde{K})^{-1}g \right\|_\infty R(N) |\ln R(N)| \leq \\ &\leq \omega(g, R(N)) + M \left\| (I - \tilde{K})^{-1}g \right\|_\infty R(N) |\ln R(N)|. \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того, поступая точно так, как и в работе [9], можно показать, что выражение $\sum_{j=1}^N |f_{lj}|$ в точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, является кубатурной формулой для интеграла

$$2 \int_S |\Phi_k(x, y)| dS_y,$$

причем
$$\max_{l=1, N} \left| 2 \int_S |\Phi_k(x(l), y)| dS_y - \sum_{j=1}^N |f_{lj}| \right| \leq M R(N) |\ln R(N)|.$$

Следовательно,

$$\max_{l=1, N} \sum_{j=1}^N |f_{lj}| \leq 2 \max_{x \in S} \int_S |\Phi_k(x, y)| dS_y + M R(N) |\ln R(N)| \leq M.$$

Тогда, учитывая приведенные выше неравенства в (5) и принимая во внимание соотношение $R(N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$, получаем доказательство теоремы.

3. Исследование приближенного решения интегрального уравнения (2)

Следует указать, что оператор L^{-1} , обратный компактному оператору L , является неограниченным в пространстве $N(S)$ (см. [1, с. 101]). Однако в работе [11] показано, что если $\operatorname{Im} k > 0$, то оператор L^{-1} обратим, причем обратный оператор L^{-1} определяется соотношением

$$L^{-1} = -(I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} T.$$

Пусть $H_{1,\alpha}(S)$ – линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на S функций f , удовлетворяющих условию

$$|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| \leq M_f |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in S,$$

где $0 < \alpha \leq 1$, а M_f – положительная постоянная, зависящая от f , а не от x и y .

Автором [12] доказано, что если $f \in H_{1,\alpha}(S)$, то потенциал двойного слоя с плотностью f имеет непрерывную нормальную производную, причем $Kf \in H_{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha$, т.е. $(I - K)f \in H_{1,\beta}(S)$. Тогда при любой правой части $f \in H_{1,\alpha}(S)$ уравнение (2) имеет единственное решение, причем решение интегрального уравнения (2) имеет вид

$$\varphi = (I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f. \quad (7)$$

Используя формулу (7), дадим метод вычисления приближенного решения уравнения (2) в определенных точках.

Разобьем S на «регулярные» элементарные части $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$. Пусть

$$P_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| \leq \sqrt{R(N)}\}$$

и

$$Q_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| > \sqrt{R(N)}\}.$$

В работе [8] доказано, что выражение

$$(Tf)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N t_{lj} f(x(j)) \quad (8)$$

в точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, является кубатурной формулой для $(Tf)(x)$, причем

$$\begin{aligned} & \max_{l=1, N} |(Tf)(x(l)) - (Tf)^N(x(l))| \leq \\ & \leq M \left[\|f\|_{\infty} R(N) |\ln(R(N))| + \|\text{grad } f\|_{\infty} \sqrt{R(N)} + \int_0^{\sqrt{R(N)}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_{ll} &= \frac{3}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \frac{(x(j) - x(l), \vec{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \vec{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \text{mes } S_j - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\vec{n}(x(l)), \vec{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} \text{mes } S_j \quad \text{при } l = \overline{1, N}; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \vec{n}(x(j))} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \vec{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \vec{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{при } j \in P_l, j \neq l; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \vec{n}(x(j))} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{(\vec{n}(x(l)), \vec{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \vec{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \vec{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{при } j \in Q_l. \end{aligned}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\text{Im} k > 0$ и $f \in H_{1,\alpha}(S)$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда последовательность

$$\varphi^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ \left(\sum_{m=1}^N t_{nm} (f(x(m)) - (Kf)(x(m))) \right) \right)$$

сходится к значению решения $\varphi(x)$ уравнения (2) в опорных точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, причем

$$\max_{l=1, N} |\varphi(x(l)) - \varphi^N(x(l))| \leq M N^{-\beta/2},$$

где $0 < \beta < \alpha$.

Доказательство. Из леммы 1 и 2 очевидно, что

$$\max_{j=1, N} \sum_{n=1}^N |\tilde{k}_{jn}^+| \leq M_1, \quad \max_{j=1, N} \sum_{n=1}^N |\tilde{k}_{jn}^-| \leq M_2.$$

Тогда, принимая во внимание леммы 1 и 2 и оценку погрешности кубатурной формулы (8), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(x(l)) - \varphi^N(x(l)) \right| \leq \\ & \leq \left| \left((I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left((I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f \right)(x(j)) \right| + \\ & + \left| \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left[\left((I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f \right)(x(j)) - \sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ (T(I - K)f)(x(n)) \right] \right| + \\ & + \left| \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left[\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ \left[(T(I - K)f)(x(n)) - \sum_{m=1}^N t_{nm} (f(x(m)) - (Kf)(x(m))) \right] \right] \right| \leq \\ & \leq M \left[\left\| (I + \tilde{K})^{-1} \right\| \|T(I - K)f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega \left((I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f, R(N) \right) \right] + \\ & + M M_2 \left[\|T(I - K)f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(T(I - K)f, R(N)) \right] + \\ & + M M_1 M_2 \left[\|(I - K)f\|_{\infty} R(N) |\ln(R(N))| + \|\text{grad}(I - K)f\|_{\infty} \sqrt{R(N)} + \right. \\ & \left. + \int_0^{\sqrt{R(N)}} \frac{\omega(\text{grad}(I - K)f, t)}{t} dt \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как $(I - K)f \in H_{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha$, то

$$\|\text{grad}(I - K)f\|_{\infty} \leq M_f, \quad \omega(\text{grad}(I - K)f, t) \leq M_f t^{\beta}.$$

Кроме того, поступая точно так, как и в доказательстве неравенства (6), можно показать, что

$$\omega \left((I + \tilde{K})^{-1} f, R(N) \right) \leq \omega(f, R(N)) + M \|f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)|.$$

Тогда, принимая во внимание неравенства из работы [12]

$$\|Tf\|_{\infty} \leq M \left(\|f\|_{\infty} + \|\operatorname{grad} f\|_{\infty} + \int_0^{\operatorname{diam} S} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t} dt \right) \leq M_f$$

$$\text{и } \omega(Tf, h) \leq M_f \left(h |\ln h| + \omega(\operatorname{grad} f, h) + \int_0^h \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t} dt + h \int_h^{\operatorname{diam} S} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t^2} dt \right) \leq M_f h^{\alpha},$$

получаем, что

$$\omega(T(I-K)f, R(N)) \leq M_f (R(N))^{\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & \omega\left((I+\tilde{K})^{-1}T(I-K)f, R(N)\right) \leq \\ & \leq \omega(T(I-K)f, R(N)) + M \|T(I-K)f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| \leq M_f (R(N))^{\beta}, \end{aligned}$$

где $0 < \beta < \alpha$. В результате, учитывая неравенства в (9) и принимая во внимание соотношение $R(N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$, получаем доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. Davies P.J., Duncan D.B. Numerical approximation of first kind Volterra convolution integral equations with discontinuous kernels // Journal Integral Equations Applications. 2017. V. 29. No. 1. P. 41–73.
3. Giroire J., Nedelec J.C. Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential // Mathematics of Computation. 1978. V. 32. P. 973–990.
4. Hsiao G.C., Wendland W. A finite element method for some integral equations of the first kind // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1977. V. 58. P. 449–481.
5. Каширин А.А., Смагин С.И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
6. Polishchuk O.D. Finite element approximations in projection methods for solution of some Fredholm integral equation of the first kind // Mathematical Modeling and Computing. 2018. V. 5. No. 1. P. 74–87.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
8. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
9. Khalilov E.H. Cubic formula for class of weakly singular surface integrals // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2013. V. 39. No. 47. P. 69–76.
10. Khalilov E.H. On an approximate solution of a class of surface singular integral equations of the first kind // Georgian Mathematical Journal. 2020. V. 27. No. 1. P. 97–102.
11. Халилов Э.Г. О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. No. 9. P. 1277–1283.
12. Халилов Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 3. С. 690–700.

Статья поступила 08.07.2021

Khalilov E.H. (2021) INVESTIGATION OF AN APPROXIMATE SOLUTION OF SOME CLASSES OF SURFACE INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 43–54

DOI 10.17223/19988621/74/5

Keywords: integral equation of the first kind, weakly singular integral equations, hypersingular integral equations, Helmholtz equation, exterior Neumann boundary-value problem, exterior Dirichlet boundary-value problem.

The work is devoted to the study of an approximate solution of a hypersingular integral equation of the first kind

$$T\psi = g + \tilde{K}g, \quad (1)$$

and of a weakly singular integral equation of the first kind

$$L\varphi = -f + Kf, \quad (2)$$

obtained from the exterior Neumann and Dirichlet boundary-value problems for the Helmholtz equation, respectively. Here,

$$\begin{aligned} (L\varphi)(x) &= 2 \int_S \Phi_k(x, y) \varphi(y) dS_y, \\ (Kf)(x) &= 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \bar{n}(y)} f(y) dS_y, \\ (\tilde{K}g)(x) &= 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \bar{n}(x)} g(y) dS_y, \\ (T\psi)(x) &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{n}(x)} \left(\int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \bar{n}(y)} \psi(y) dS_y \right), \\ x &\in S, \end{aligned}$$

S is a twice continuously differentiable surface in R^3 , f and g are given continuous functions on S , $\Phi_k(x, y)$ is the fundamental solution of the Helmholtz equation, i.e.

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

k is the wave number, and $\bar{n}(x)$ is the unit outward normal at the point $x \in S$. It should be pointed out that the exterior Neumann and Dirichlet boundary-value problems can be reduced to various integral equations of the first kind. However, equations (1) and (2) have the advantage that the solution to Eq. (1) is the boundary value of the solution to the exterior Neumann boundary-value problem on S , and the solution to Eq. (2) is the boundary value of the normal derivative of the solution to the exterior Dirichlet boundary-value problem on S .

Let $C(S)$ denote the space of all continuous functions on the surface S with the norm $\|g\|_\infty = \max_{x \in S} |g(x)|$, and $H_{1,\alpha}(S)$ be the linear space of all continuously differentiable functions f on S satisfying the condition

$$|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| \leq M_f |x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in S,$$

where $0 < \alpha \leq 1$, and M_f be a positive constant depending on f , not on x or y . For the function $g \in C(S)$, we introduce a modulus of continuity of the form

$$\omega(g, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in S}} |g(x) - g(y)|, \quad \delta > 0.$$

Let S be partitioned into "regular" elementary parts: $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$. Let $x(l) = (x_1(l), x_2(l), x_3(l)) \in S_l$ be the control points and $R(N) = \max_{l=1, \overline{N}} R_l(N)$, where $R_l(N) = \max_{x \in \partial S_l} |x - x(l)|$. Consider the matrix $\tilde{K}^N = (\tilde{k}_{lj})_{l,j=1}^N$ with the entries

$$\tilde{k}_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{for } l \neq j, \\ 2 \frac{\partial \Phi_k(x(l), x(j))}{\partial \bar{n}(x(l))} \text{mes } S_j, & \text{for } l = j. \end{cases}$$

Moreover, let

$$f_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{for } l \neq j, \\ 2 \Phi_k(x(l), x(j)) \text{mes } S_j, & \text{for } l = j, \end{cases}$$

$$P_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| \leq \sqrt{R(N)}\}, \quad Q_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| > \sqrt{R(N)}\}$$

and

$$\begin{aligned} t_{ll} &= \frac{3}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \frac{(x(j) - x(l), \bar{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \bar{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \text{mes } S_j - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\bar{n}(x(l)), \bar{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} \text{mes } S_j \quad \text{for } l = \overline{1, N}; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \bar{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \bar{n}(x(j))} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \bar{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \bar{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{for } j \in P_l, j \neq l; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \bar{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \bar{n}(x(j))} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{(\bar{n}(x(l)), \bar{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \bar{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \bar{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{for } j \in Q_l. \end{aligned}$$

The following two theorems are proved in this paper.

Theorem 1. Let $\text{Im } k > 0$ and $g \in C(S)$. Then the sequence

$$\Psi^N(x(l)) = - \sum_{j=1}^N f_{lj} \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- g(x(n)) \right)$$

converges to the value of the solution $\psi(x)$ of Eq. (1) at the control points $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, so that

$$\max_{l=1, \overline{N}} |\Psi(x(l)) - \psi(x(l))| \leq M \left[\|g\|_{\infty} \frac{\ln N}{\sqrt{N}} + \omega(g, 1/\sqrt{N}) \right],$$

where $\tilde{k}_{lj}^-$ is the entry at the l -th row and j -th column of the matrix $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$, I^N is the identity matrix of size N , and M is a positive constant.

Theorem 2. Let $\text{Im} k > 0$ and $f \in H_{1,\alpha}(S)$, $0 < \alpha \leq 1$. Then the sequence

$$\varphi^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ \left(\sum_{m=1}^N t_{nm} (f(x(m)) - (Kf)(x(m))) \right) \right)$$

converges to the value of the solution $\varphi(x)$ of Eq. (2) at the control points $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, so that

$$\max_{l=1, N} |\varphi(x(l)) - \varphi^N(x(l))| \leq M N^{-\beta/2},$$

where $0 < \beta < \alpha$, $\tilde{k}_{jn}^+$ is the entry at the j -th row and n -th column of the matrix $(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}$, and M is a positive constant.

AMS Mathematical Subject Classification: 45E05; 31B10

Elnur H. KHALILOV (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of General and Applied Mathematics of the Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

REFERENCES

- Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons.
- Davies P.J., Duncan D.B. (2017) Numerical approximation of first kind Volterra convolution integral equations with discontinuous kernels. *Journal of Integral Equations and Applications*. 29(1). pp. 41–73. DOI: 10.1216/JIE-2017-29-1-41.
- Giroire J., Nedelec J.C. (1978) Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. *Mathematics of Computation*. 32(144). pp. 973–990.
- Hsiao G.C., Wendland W. (1977) A finite element method for some integral equations of the first kind. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 58. pp. 449–481. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90186-X.
- Kashirin A.A., Smagin S.I. (2012) Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(8). pp. 1173–1185. <https://doi.org/10.1134/S0965542512080052>.
- Polishchuk O.D. (2018) Finite element approximations in projection methods for solution of some Fredholm integral equation of the first kind. *Mathematical Modeling and Computing*. 5(1). pp. 74–87. DOI: 10.23939/mmc2018.01.074.
- Vladimirov V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker.
- Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
- Khalilov E.H. (2013) Cubic formula for class of weakly singular surface integrals. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*. 39(47). pp. 69–76. Access mode: http://imm.az/journals/RMI_eserleri/cild39_N47_2013/meqaleler/69-76.pdf
- Khalilov E.H. (2020) On an approximate solution of a class of surface singular integral equations of the first kind. *Georgian Mathematical Journal*. 27(1). pp. 97–102. DOI: 10.1515/gmj-2018-0038.
- Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: 10.1134/S0012266116090147.
- Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: 10.1134/S0037446614030173.

Received.: 8 July 2021