

УДК 532.556.2

DOI 10.17223/19988621/74/12

Д.А. Мамазова, К.Е. Рыльцева, Г.Р. Шрагер

**СТРУКТУРА ПОТОКА И КИНЕМАТИКА
ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ
В ТРУБЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ¹**

Решается задача о движении неньютоновской жидкости в цилиндрической трубе с внезапным изменением поперечного сечения в условиях ламинарного установившегося течения. Реологические свойства жидкой среды описываются уравнением Оствальда – де Ваала для степенной жидкости. Решение осуществляется с использованием численных методов. Стационарное решение получено методом установления. Решение дискретных уравнений производится конечно-разностным методом на основе схемы переменных направлений. Метод прогонки используется для вычисления значений искомых функций. Проведено исследование для степенной жидкости, в ходе которого были выполнены параметрические расчеты при варьировании числа Рейнольдса, степени расширения трубы и показателя нелинейности жидкости, построены зависимости местного гидравлического сопротивления от определяющих параметров задачи.

Ключевые слова: модель Оствальда – де Ваала, неньютоновская жидкость, осесимметричное течение, внезапное расширение, циркуляционная зона, число Рейнольдса, гидравлическое сопротивление.

Моделирование движения жидкости в трубах переменного радиуса важно для изучения особенностей транспортировки жидкой среды и обработки жидких материалов, таких как пасты, краски, полимерные расплавы, нефтепродукты, в технических приложениях при определенных условиях [1–24]. Наличие в трубах внезапно расширяющихся элементов позволяет контролировать течение, планировать нагрузки на трубопровод и распределение давления.

Течение ньютоновской жидкости в трубах с внезапным расширением в различных условиях при варьировании соотношений радиусов составляющих трубы широко изучалось как численно [1–3], так и экспериментально [4, 5]. Однако моделирование многих технологических процессов сопровождается необходимостью изучения течения неньютоновских жидкостей.

В работах [6–7] рассматривается движение жидкости, подчиняющейся степенному закону, в трубах с переменной площадью сечения. Показано, что подобные течения состоят из следующих структурных частей: областей, находящихся в непосредственной близости к входному и выходному сечению, – зон одномерного течения, областей, размещенных вверх и вниз по потоку от скачка сечения, – зон двумерного течения и области, для которой присуще циркулирующее течение в окрестности внутреннего угла, – циркуляционной зоны. Показано изменение длин указанных зон в зависимости от числа Рейнольдса.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021-П).

Среди исследований, направленных на изучение движения жидкости в трубах с расширением, большое внимание уделяется вопросам, посвященным определению длины циркуляционной зоны [8, 10] и изучению условий, при которых происходило нарушение симметрии течения [9]. В [10] была получена следующая картина течения в окрестности расширения трубы: поток разделяется в той части, где происходит резкое расширение, основное течение реализуется в направлении оси трубы и циркуляционная зона формируется в окрестности внутреннего угла. Расстояние от скачка сечения до места, где основной поток присоединяется к твердой границе, определяет длину циркуляционной зоны.

Наличие расширения в трубах способствует перемешиванию потока за счет образования циркуляционной зоны после скачка сечения. Так, к примеру, в [11] использовали последовательность внезапных расширений для улучшения перемешивания реагентов в реакторе, предназначенном для удаления кристаллического фосфора из сточных вод.

При исследовании течений неньютоновской жидкости для описания реологических свойств среды применяются различные модели [12]. В качестве примера в области гемодинамики можно привести работу [13], в которой для описания реологии крови используются три реологические модели: модель Кэссона, модель Оствальда – де Ваала и модель Кэмада. В приложении к пищевой промышленности, в [14] реологические свойства водного раствора кукурузного крахмала в процессе течения через плоский расширяющийся канал описываются с помощью степенного закона и квадратичной модели.

В [15] рассматривается изотермическое течение степенной жидкости в трубе с симметричным внезапным расширением 1:2 для числа Рейнольдса, равного 10. Показано, что длина циркуляционной зоны зависит от показателя нелинейности.

Степень расширения трубы также используется в качестве определяющего параметра для характеристик течения. В работах [16–19] представлены результаты, демонстрирующие рост длины циркуляционной зоны с увеличением степени расширения, в частности, в [19] численно и экспериментально исследовали асимметричное установившееся движение жидкой степенной среды в плоском случае. В [20] показано, как меняются изолинии функции тока для течения жидкости, подчиняющейся степенному закону, в плоской трубе при варьировании числа Рейнольдса от 40 до 130. Для различных степеней нелинейности жидкости определены значения числа Рейнольдса, приводящие к нарушению симметрии потока.

В результате проведения исследований движения жидкости в трубе с внезапным расширением определены местные потери давления, которые являются следствием резкого изменения геометрии области течения. Обзор работы [21] включает в себя список литературы, в которой представлена информация о результатах расчетов местных гидравлических потерь давления для труб с разными степенями расширения при исследовании течения неньютоновской жидкости.

В данной работе исследуются характеристики структуры потока степенной жидкости в трубе с расширением и местное гидравлическое сопротивление для различных чисел Рейнольдса, степени расширения и показателя нелинейности жидкости.

Постановка задачи

Рассматривается движение неньютоновской жидкости с постоянной плотностью в трубе с внезапным изменением поперечного сечения в условиях ламинарного установившегося течения. Решение задачи выполняется в рамках осесимметричной постановки. На рис. 1 продемонстрирована область движения жидкости в цилиндрической системе координат (z, r) .

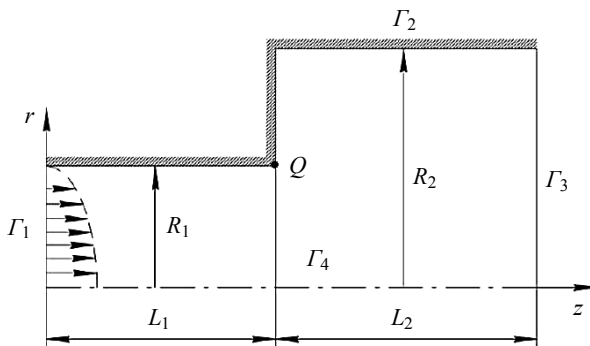


Рис. 1. Схема потока жидкости

Fig. 1. Fluid flow diagram

Система уравнений, описывающая течение жидкости, состоит из уравнений движения и уравнения неразрывности, и в физических переменных записывается в виде [12]

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta u + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0.$$

Эта система переписывается в переменных функция тока – вихрь и в безразмерной форме принимает вид [22]

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{2^n \cdot B}{\text{Re}} \left(\Delta \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{2^n \cdot S}{\text{Re}}, \quad (1)$$

$$\Delta \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega. \quad (2)$$

Здесь ω – вихрь, а ψ – функция тока

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -vr, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = ur,$$

$$S = 2 \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Уравнение (1) содержит безразмерный параметр – число Рейнольдса (Re), которое вычисляется как

$$\text{Re} = \frac{\rho U^{2-n} (2R_1)^n}{k}.$$

Реология жидкости описывается степенной моделью Оствальда – де Ваала. При использовании данной степенной модели формула для безразмерной эффективной вязкости имеет вид

$$B = A^{n-1}, \quad (3)$$

$$A = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2},$$

где n – показатель нелинейного поведения жидкости; k – показатель консистенции.

В системе уравнений используются следующие обозначения: (u, v) – аксиальная и радиальная компоненты вектора скорости; p – давление; ρ – плотность среды; μ – эффективная вязкость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Для обезразмеривания скорости, длины, вязкости используются следующие величины: U – среднерасходная скорость в трубе с радиусом R_1 ; R_1 – радиус узкой части трубы; комплекс $k(U/R_1)^{n-1}$ соответственно.

На входе в трубу Γ_1 при постоянстве расхода профиль аксиальной скорости жидкости соответствует условиям стационарного течения для выбранной реологии. На твердой стенке Γ_2 реализуются условия прилипания. На выходе из трубы Γ_3 используются мягкие граничные условия, которые предполагают формирование одномерного установившегося течения на достаточном удалении от скачка сечения. На оси симметрии Γ_4 применяются условия симметрии. Степень расширения можно определить с помощью отношения радиусов составляющих частей трубы $\beta = R_2/R_1$. Граничные условия математически записываются следующим образом:

$$\Gamma_1 : u = f_1(r), \quad v = 0, \quad \psi = \int_0^r u r dr, \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad z = 0; \quad (4)$$

$$\Gamma_2 : u = 0, \quad v = 0, \quad \psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = 1, \quad 0 < z \leq L_1; \quad (5)$$

$$\psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad 1 < r \leq \beta, \quad z = L_1; \quad (6)$$

$$\psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = \beta, \quad L_1 < z < L_1 + L_2; \quad (7)$$

$$\Gamma_3 : \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq \beta, \quad z = L_1 + L_2; \quad (8)$$

$$\Gamma_4 : \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0, \quad \psi = 0, \quad \omega = 0, \quad r = 0, \quad 0 < z \leq L_1 + L_2. \quad (9)$$

Метод решения

Рассматриваемая задача решается с помощью численного метода. Задача решается на основе метода установления, согласно которому основные уравнения дополняются фиктивными производными функции тока и вихря по времени. Этот метод обеспечивает получение установившегося решения. В уравнениях, описывающих течение в трубе, производится соответствующая замена производных их конечно-разностными аналогами на основе схемы переменных направлений. Для вычисления значений искомых функций используется метод продольно-поперечной прогонки.

В случае, когда $n < 1$ (псевдопластичная жидкость), в реологической модели Оствальда – де Ваала на оси трубы имеется особенность «бесконечной» эффективной вязкости. В связи с этим проводится регуляризация выражения для эффективной вязкости, что подразумевает введение малого параметра регуляризации (ϵ). В результате формула (3) принимает вид

$$B = (A + \epsilon)^{n-1}.$$

Модификация позволяет перейти к исходному выражению (3) при $\epsilon \rightarrow 0$. Параметр регуляризации в ходе численного эксперимента выбирается таким образом, чтобы картина течения принимала минимальные искажения относительно стационарного течения в трубе. Для верификации численного алгоритма выполняется проверка аппроксимационной сходимости посредством проведения расчетов на последовательности вложенных сеток.

На рис. 2 проиллюстрированы распределения u в скачке сечения и на выходе при варьировании шага квадратной сетки (h). Относительная ошибка в значения u на оси симметрии в выходном сечении трубы ($u_{\text{вых}}$) получена путем сравнения с соответствующим аналитическим значением скорости течения, которое определяется по формуле

$$u_{\text{ан}} = \frac{3n+1}{(n+1)\beta^2}.$$

Относительная ошибка вычисляется с помощью формулы

$$E_u = |(u_{\text{ан}} - u_{\text{вых}})| / u_{\text{ан}} \cdot 100\%.$$

Результаты на рис. 2 и в табл. 2 при $\epsilon = 0.0001$ подтверждают факт аппроксимационной сходимости разработанного алгоритма. В табл. 1 для случая $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.6$ при $h = 0.025$ приведены значения относительной ошибки $u_{\text{вых}}$ для степенной жидкости при варьировании параметра регуляризации. С уменьшением ϵ и h рассчитанные значения максимальной скорости в выходном сечении приближаются к аналитическому значению. На основе полученных данных для параметрических расчетов выбраны следующие значения: $\epsilon = 0.0001$; $h = 0.025$.

Для течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным расширением можно выделить два вида потерь полного давления: потери на трение $\Delta P_{\text{тр}}$ и потери на местное сопротивление $\Delta P_{\text{м}}$. Первые формируются во всей области движения жидкости и их возникновение связано с действием вязких сил в потоке жидкости – потери на трение. Последние наблюдаются вблизи расширения, их появление объясняется необходимостью перестройки потока, резким изменением значения скорости и образованием зоны циркуляции – потери на местное сопротивление.

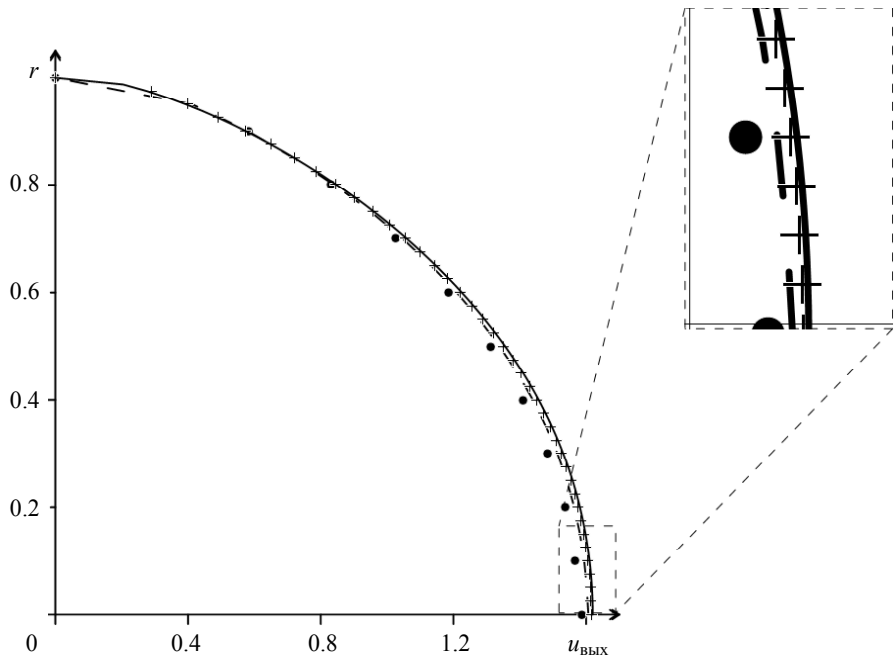


Рис. 2. Распределение u в скачке сечения: $\beta = 2, Re = 1, n = 0.6, \varepsilon = 0.0001$;
●●● – $h = 0.1$, ---- $h = 0.05$, +++ – $h = 0.025$, ——— – $h = 0.0125$
Fig. 2. Distribution of u at the expansion plane: $\beta = 2, Re = 1, n = 0.6, \varepsilon = 0.0001$;
●●● – $h = 0.1$, ---- $h = 0.05$, +++ – $h = 0.025$, and ——— – $h = 0.0125$

Таблица 1

ε	$E_u, \%$
0.1	5.215
0.05	3.380
0.01	0.977
0.005	0.540
0.001	0.082
0.0005	0.075
0.0001	0.020

Таблица 2

h	$E_u, \%$
0.1	0.087
0.05	0.032
0.025	0.020
0.0125	0.014

Расчет коэффициента местного сопротивления осуществляется по формуле [23]

$$C_{\text{м}} = \frac{\Delta p_{\text{м}}}{0.5 \rho U^2} + \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right), \tag{10}$$

где $\Delta p_{\text{м}}$ – перепад давления на переходном участке течения;

$$\alpha = \frac{3(3n+1)^2}{(2n+1)(5n+3)}$$

– коэффициент, корректирующий кинетическую энергию [24].

Результаты

Параметрические расчеты проводились для следующих диапазонов изменения основных параметров: $0.1 \leq Re \leq 100$, $1.25 \leq \beta \leq 4$, $0.5 \leq n \leq 1.5$. На рис. 3 представлены типичные картины течения псевдопластичной и дилатантной жидкостей в трубе с расширением. Можно отметить качественное совпадение структуры потока для двух классов жидкостей – формирование зон одномерного течения на достаточном удалении от скачка сечения и зон двумерного течения в окрестности скачка вниз и вверх по потоку. В области внутреннего угла образуется циркуляционная зона, размер которой находится в зависимости от значения n : с увеличением этого параметра наблюдается рост циркулярной зоны.

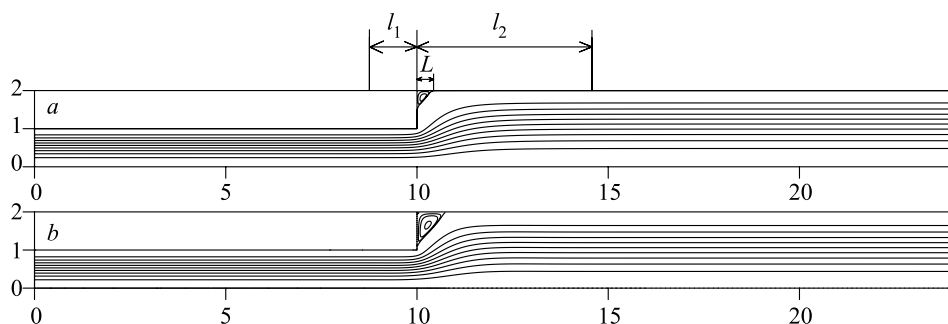


Рис. 3. Распределения линий тока вдоль трубы:

(a) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.6$, (b) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 1.4$

Fig. 3. Streamline distributions along the pipe:

(a) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.6$; and (b) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 1.4$

Вследствие проведенных численных экспериментов получены распределения линий тока, на основе которых вводятся безразмерные геометрические характеристики структуры потока для количественного анализа движения: длина циркуляционной зоны (L) и длины областей, в которых помимо аксиальной скорости присутствует радиальная составляющая – длины зон двумерного течения до и после расширения (l_1 и l_2 соответственно). Длины l_1 и l_2 определяются расстояниями от сечения, где происходит резкое расширение трубы, до сечений, в которых u на оси трубы отличается на 1% от её величины в области одномерного течения в составляющих частях трубы.

На рис. 4 показано развитие профиля аксиальной скорости в разных сечениях трубы. На рис. 5 представлены результаты для профилей u , которые формируются в скачке сечения, при изменении числа Re и n .

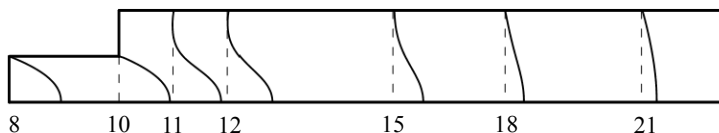


Рис. 4. Развитие профиля скорости в разных сечениях трубы

для $n = 0.8$, $\beta = 2$, $Re = 50$

Fig. 4. Development of the velocity profile in different pipe sections

for $n = 0.8$, $\beta = 2$, $Re = 50$

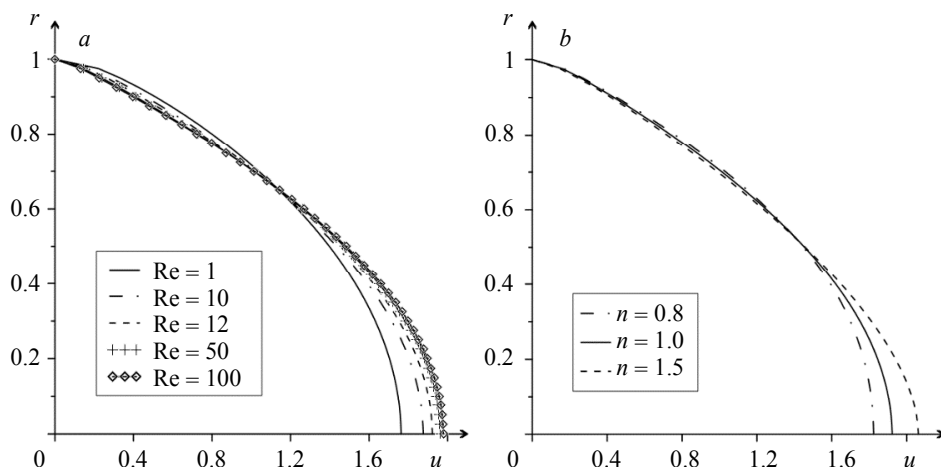


Рис. 5. Распределение u в скачке сечения при изменении:

(а) Re для $\beta = 2$, $n = 1.0$; (б) n для $\beta = 2$, $Re = 20$

Fig. 5. Distribution of u at the expansion plane with varying:

(а) Re for $\beta = 2$, $n = 1.0$; (б) n for $\beta = 2$, $Re = 20$

Изменения геометрических характеристик структуры потока от Re , β , n для жидкости, подчиняющейся степенному закону Оствальда – де Ваале, показаны на рис. 6. В случае $n = 1$ зависимости от параметров представлены на рис. 7. В результате анализа геометрических характеристик структуры потока получены следующие зависимости от числа Re , β и n :

- при возрастании числа Re замечен рост l_2 и L , так как в этом случае инерционные силы преобладают над вязкими, что влечет к увеличению участка установления потока, тогда как длина зоны двумерного течения перед скачком уменьшается;

- увеличение β способствует росту l_2 и L , а l_1 практически не меняется, это связано с тем, что при изменении площадей поперечных сечений трубы характер течения в узкой части остается практически неизменным;

- с ростом n наблюдается уменьшение l_1 и l_2 , при этом L увеличивается.

Выполненные параметрические расчеты показали, что увеличение β способствует росту местного сопротивления, связанного с увеличением зоны циркуляционного движения; с возрастанием показателя нелинейности также наблюдается рост местного сопротивления, с увеличением параметра Re местное гидравлическое сопротивление уменьшается (рис. 8). Результаты расчетов для $n = 1$ представлены на рис. 9.

В табл. 3 приведено сравнение результатов расчетов C_m , которые были получены в данной работе и в работе [21] для жидкости с показателем нелинейности $n = 0.8$, степени расширения трубы $\beta = 2.6$ при изменении числа Рейнольдса. В рассматриваемом диапазоне изменения числа Re сравнение результатов показывает количественное согласование.

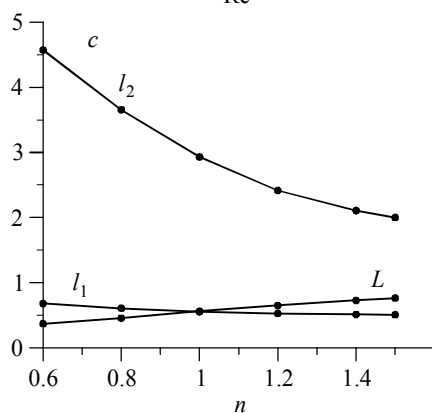
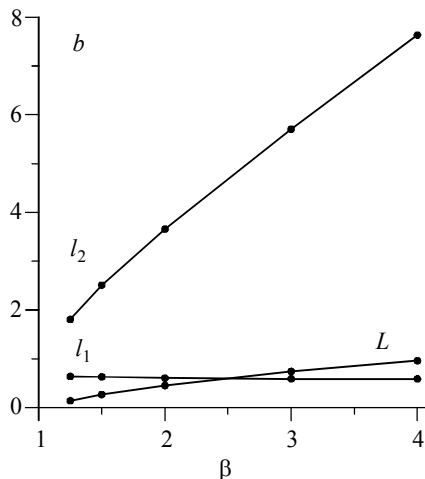
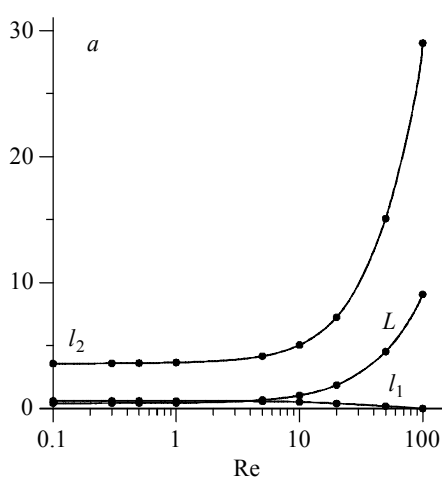


Рис. 6. Изменения характеристик структуры потока от параметров Re , β , n : (a) $n = 0.8$, $\beta = 2$, (b) $n = 0.8$, $Re = 1$, (c) $\beta = 2$, $Re = 1$

Fig. 6. Variation in flow structure characteristics with parameters Re , β , and n : (a) $n = 0.8$, $\beta = 2$, (b) $n = 0.8$, $Re = 1$, and (c) $\beta = 2$, $Re = 1$

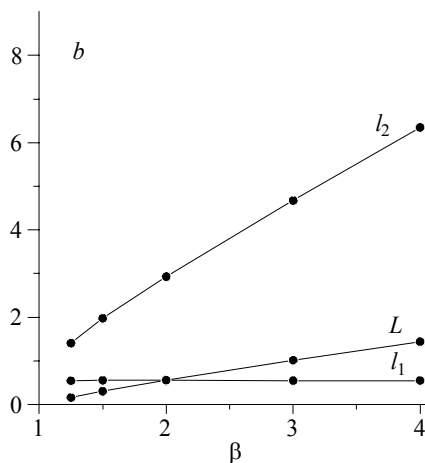
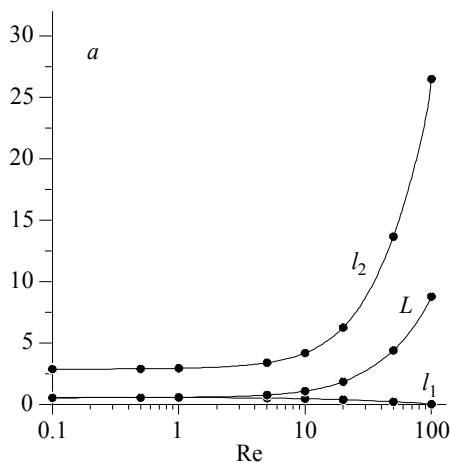


Рис. 7. Изменения характеристик структуры потока от параметров Re и β для $n = 1$: (a) $\beta = 2$, (b) $Re = 1$

Fig. 7. Variation in flow structure characteristics with parameters Re and β for $n = 1$: (a) $\beta = 2$ and (b) $Re = 1$

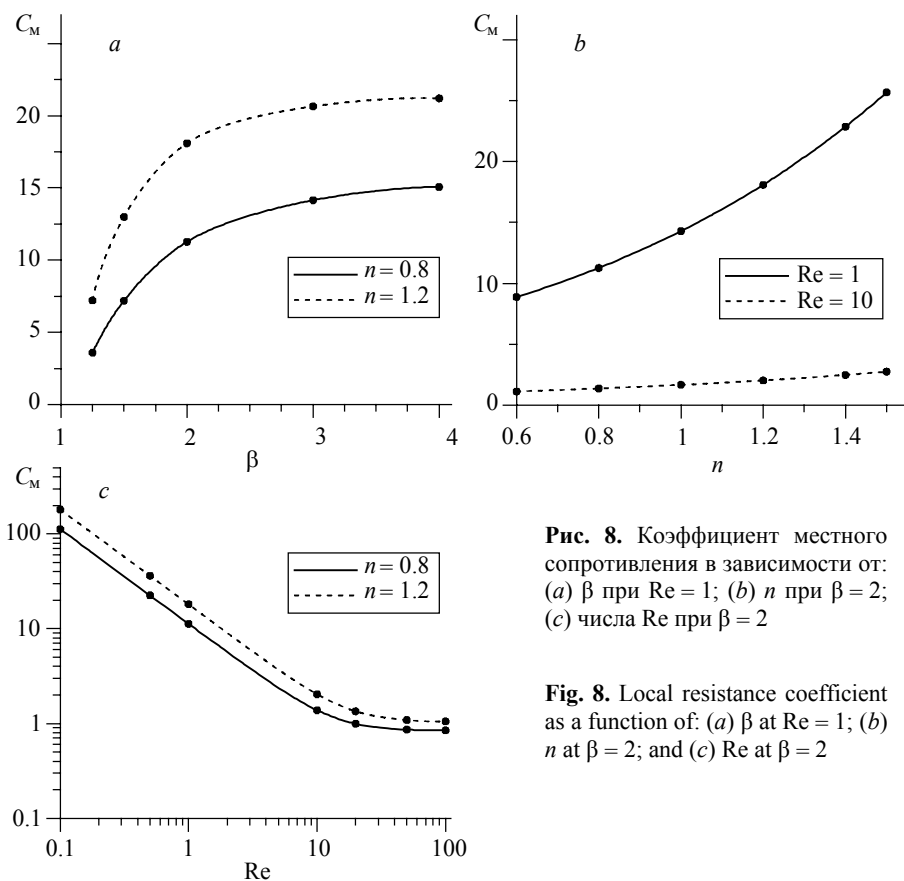


Рис. 8. Коэффициент местного сопротивления в зависимости от: (a) β при $Re = 1$; (b) n при $\beta = 2$; (c) числа Re при $\beta = 2$

Fig. 8. Local resistance coefficient as a function of: (a) β at $Re = 1$; (b) n at $\beta = 2$; and (c) Re at $\beta = 2$

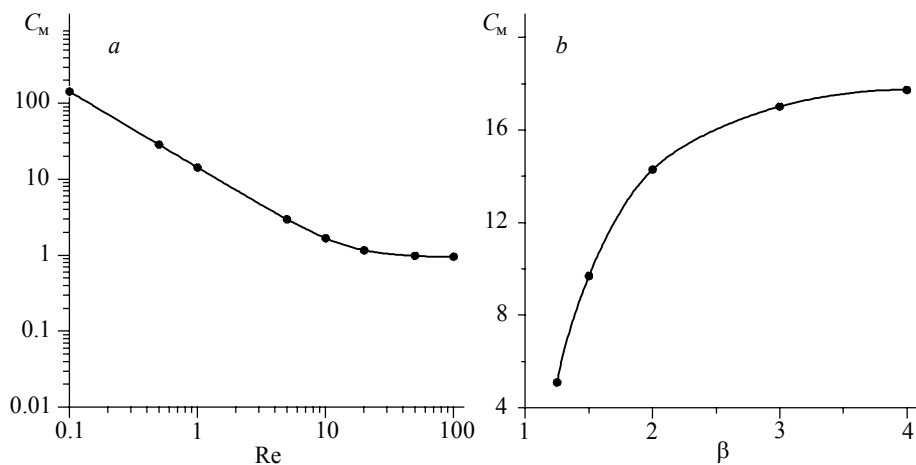


Рис. 9. Коэффициент местного сопротивления для $n = 1$ в зависимости от (a) Re при $\beta = 2$; (b) β при $Re = 1$

Fig. 9. Local resistance coefficient as a function of (a) Re at $\beta = 2$ and (b) β at $Re = 1$ for $n = 1$

Таблица 3

Re	C_m в [21]	C_m
0.2047	65.72	65.31
0.6832	19.76	19.60
6.8319	2.191	2.189
20.4992	1.275	1.273
34.1630	1.201	1.196

Заключение

Численно исследовано движение неньютоновской жидкости в трубе с внезапным изменением поперечного сечения в условиях ламинарного установившегося течения. Сформулирована математическая постановка задачи о движении жидкости. На основе численных экспериментов можно сделать следующие выводы: течение для псевдопластичной и дилатантной жидкостей состоит из характерных зон одномерного и двумерного движения. Построены зависимости длин зон двумерного течения в составляющих частях трубы от числа Re , показывающие, что с увеличением данного параметра наблюдается рост длины зоны двумерного течения после скачка сечения, а длина зоны двумерного течения до скачка сечения уменьшается. Получены графики изменения структурных частей потока от степени расширения и показателя нелинейности жидкости. Отмечено, что для степенной жидкости в окрестности внутреннего угла в рамках рассматриваемого диапазона $0.1 \leq Re \leq 100$, $1.25 \leq \beta \leq 4$, $0.5 \leq n \leq 1.5$ наблюдается образование циркуляционной зоны, которая увеличивается в размере с возрастанием Re и степени расширения, а с уменьшением степени нелинейности n она уменьшается.

Проведены вычислительные эксперименты, в результате которых получены картины течений и изменения геометрических характеристик структуры потока и местных потерь давления в зависимости от параметров задачи. Критериальные зависимости, полученные в данной работе, показали, что с ростом таких параметров, как степень расширения трубы, показатель нелинейности жидкости, местные потери давления увеличиваются, а с ростом числа Рейнольдса, наоборот, уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Habib M.A., Whitelaw J.H.* The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers // Numerical Heat Transfer. 1982. V. 5. No. 2. P. 145–164.
2. *Macagno E.O., Hung T.K.* Computational and experimental study of a captive annular eddy // Journal of Fluid Mechanics. 1967. V. 28. No. 1. P. 43–63.
3. *Oliveira P.J., Pinho F.T.* Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansions // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1997. V. 18. No. 5. P. 518–529.
4. *Stieglmeier M., Tropea C., Weiser N., Nitsche W.* Experimental investigation of the flow through axisymmetric expansions // Journal of Fluids Engineering. 1989. V. 111. No. 4. P. 464–471.
5. *Back L.H., Roschke E.J.* Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion // Journal of Applied Mechanics. 1972. V. 39. No. 3. 677–681.
6. *Борзенко Е.И., Рылъцева К.Е., Шрагер Г.Р.* Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 56–70.

7. Pienaar V.G. Viscous Flow Through Sudden Contractions. Dissertation. Cape Peninsula University of Technology. 2004.
8. Hammad K.J., Vradis G.C., Ötügen M.V. Laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion // *Journal of Fluids Engineering*. 2001. V. 123. No. 3. P. 588–594.
9. Hawa T., Rusak Z. Viscous flow in a slightly asymmetric channel with a sudden expansion // *Physics of Fluids*. 2000. V. 12. No. 9. P. 2257–2267.
10. Hammad K.J. Suddenly expanding recirculating and non-recirculating viscoplastic non-Newtonian flows // *Journal of Visualization*. 2015. V. 18. No. 4. P. 655–667.
11. Forrest A.L., Fattah K.P., Mavinic D.S., Koch F.A. Optimizing struvite production for phosphate recovery in WWTP // *Journal of Environmental Engineering*. 2008. V. 134. No. 5. P. 395–402.
12. Шульман З.П. Конвективный теплообмен перенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975. 352 с.
13. Neofytou P., Drikakis D. Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2003. V. 111. No. 2–3. P. 127–150.
14. Ternik P., Marn J., & Žunič Z. Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2006. V. 135. No. 2–3. P. 136–148.
15. Bell B.C., Surana K.S. p-Version least squares finite element formulation for two-dimensional incompressible Newtonian and non-Newtonian non-isothermal fluid flow // *Computers & Structures*. 1995. V. 54. No. 1. P. 83–96.
16. Scott P.S., Mirza F.A., Vlachopoulos J. A finite element analysis of laminar flows through planar and axisymmetric abrupt expansions // *Computers & Fluids*. 1986. V. 14. No. 4. P. 423–432.
17. Badekas D., Knight D.D. Eddy correlations for laminar axisymmetric sudden expansion flows // *Journal of Fluids Engineering*. 1992. V. 114. No. 1. P. 119121.
18. Dağtekin İ., Ünsal M. Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2011. V. 65. No. 9. P. 1133–1144.
19. Mishra S., Jayaraman K. Asymmetric flows in planar symmetric channels with large expansion ratio // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002. V. 38. No. 10. P. 945–962.
20. Manica R., De Bortoli A. Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2004. V. 121. No. 1. P. 35–40.
21. Pinho F.T., Oliveira P.J., Miranda J.P. Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2003. V. 24. No. 5. P. 747–761.
22. Рыльцева К.Е. Неизотермические течения реологически сложных жидкостей в каналах переменного сечения: диссертация. Томск: Национальный исследовательский Томский государственный университет, 2020. 103 с.
23. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М.О. Штейнберга. 3-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
24. Tiu C., Boger D.V., Halmos A.L. Generalized method for predicting loss coefficients in entrance region flows for inelastic fluids // *The Chemical Engineering Journal*. 1972. V. 4. Iss. 2. P. 113–117.

Статья поступила 15.09.2021 г.

Mamazova D.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2021) THE STRUCTURE AND KINEMATICS OF A NON-NEWTONIAN FLUID FLOW IN A PIPE WITH A SUDDEN EXPANSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 113–126

DOI 10.17223/19988621/74/12

Keywords: Ostwald-de Waele model, non-Newtonian fluid, axisymmetric flow, sudden expansion, recirculation zone, Reynolds number, hydraulic resistance.

This paper deals with a problem of a laminar steady-state flow of a non-Newtonian incompressible fluid in a pipe with a sudden expansion. The flow is described by a system of dimensionless equations in terms of stream function and vorticity in a cylindrical coordinate system: an equation of vorticity transfer and Poisson's equation for stream function. Rheological properties of the medium are defined by the Ostwald-de Waele model. The problem is solved numerically. The false transient method is applied to obtain a steady-state solution to the problem. The equations are discretized in accordance with the finite-difference method based on the alternating direction scheme. The final system of equations is solved by the tridiagonal matrix algorithm.

Flow structures of Newtonian, pseudoplastic, and dilatant fluids are found to include two-dimensional flow zones before and after expansion plane. A recirculation region occurs in the inner corner. To assess the effect of the Reynolds number, expansion ratio, and power-law index on the lengths of the two-dimensional flow zones and recirculation region, the graphs are plotted over a wide range of variation in the parameters. Local pressure losses are presented as functions of the governing parameters of the problem.

Financial support. The research is implemented at the expenses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021-II).

Dilara A. Mamazova (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mamazova.dilara@mail.ru

Kira E. Ryltseva (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kiraworkst@gmail.com

Gennady R. Shrager (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Habib M.A., Whitelaw J.H. (1982) The calculation of turbulent flow in wide-angle/diffusers. *Numerical Heat Transfer*. 5(2). pp. 145–164. DOI: 10.1080/10407788208913440.
2. Macagno E.O., Hung T.K. (1967) Computational and experimental study of a captive annular eddy. *Journal of Fluid Mechanics*. 28(1). pp. 43–63. DOI: 10.1017/s0022112067001892.
3. Oliveira P.J., Pinho F.T. (1997) Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 18(5). pp. 518–529. DOI: 10.1016/s0142-727x(97)80010-0.
4. Stieglmeier M., Tropea C., Weiser N., Nitsche W. (1989) Experimental investigation of the flow through axisymmetric expansions. *Journal of Fluids Engineering*. 111(4). pp. 464–471. DOI: 10.1115/1.3243669.
5. Back L.H., Roschke E.J. (1972) Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *Journal of Applied Mechanics*. 39(3). pp. 677–681. DOI: 10.1115/1.3422772.
6. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2019) Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical investigation of non-Newtonian fluid flow through a pipe sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 56–70. DOI: 10.17223/19988621/58/5.

7. Pienaar V.G. (2004) *Viscous Flow Through Sudden Contractions*. Dissertation. Cape Peninsula University of Technology.
8. Hammad K.J., Vradis G.C., Ötügen M.V. (2001) Laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion. *Journal of Fluids Engineering*. 123(3). pp. 588–594. DOI: 10.1115/1.1378023.
9. Hawa T., Rusak Z. (2000) Viscous flow in a slightly asymmetric channel with a sudden expansion. *Physics of Fluids*. 12(9). pp. 2257–2267. DOI: 10.1063/1.1287610.
10. Hammad K.J. (2015) Suddenly expanding recirculating and non-recirculating viscoplastic non-Newtonian flows. *Journal of Visualization*. 18(4). pp. 655–667. DOI: 10.1007/s12650-015-0279-9.
11. Forrest A.L., Fattah K.P., Mavinic D.S., Koch F.A. (2008) Optimizing struvite production for phosphate recovery in WWTP. *Journal of Environmental Engineering*. 134(5). pp. 395–402. DOI: 10.1061/(asce)0733-9372(2008)134:5(395).
12. Shul'man Z.P. (1975) *Konvektivnyy teplomassoperenos reologicheskii slozhnykh zhidkostey* [Convective heat and mass transfer of rheologically complex fluids]. Moscow: Energiya.
13. Neofytou P., Drikakis D. (2003) Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 111(2-3). pp. 127–150. DOI: 10.1016/s0377-0257(03)00041-7.
14. Ternik P., Marn J., Žunič Z. (2006) Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 135(2-3). pp. 136–148. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2006.01.003.
15. Bell B.C., Surana K.S. (1995) p-Version least squares finite element formulation for two-dimensional incompressible Newtonian and non-Newtonian non-isothermal fluid flow. *Computers & Structures*. 54(1). pp. 83–96. DOI: 10.1016/0045-7949(94)e0280-f.
16. Scott P.S., Mirza F.A., Vlachopoulos J. (1986) A finite element analysis of laminar flows through planar and axisymmetric abrupt expansions. *Computers & Fluids*. 14(4). pp. 423–432. DOI: 10.1016/0045-7930(86)90016-2.
17. Badekas D., Knight D.D. (1992) Eddy correlations for laminar axisymmetric sudden expansion flows. *Journal of Fluids Engineering*. 114(1). pp. 119–121. DOI: 10.1115/1.2909986.
18. Dağtekin İ., Ünsal M. (2011) Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 65(9). pp. 1133–1144. DOI: 10.1002/flid.2239.
19. Mishra S., Jayaraman K. (2002) Asymmetric flows in planar symmetric channels with large expansion ratio. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 38(10). pp. 945–962. DOI: 10.1002/flid.242.
20. Manica R., De Bortoli A. (2004) Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 121(1). pp. 35–40. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2004.03.009.
21. Pinho F., Oliveira P., Miranda J. (2003) Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 24(5). pp. 747–761. DOI: 10.1016/s0142-727x(03)00083-3.
22. Ryltseva K.E. (2020) *Neizotermicheskie techeniya reologicheskii slozhnykh zhidkostey v kanalakh peremennogo secheniya* [Non-isothermal flows of rheologically complex fluids in channels with a variable cross-section]. Dissertation. Tomsk State University.
23. Idel'chik I.E. (1966) *Handbook of Hydraulic Resistance*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations.
24. Tiu C., Boger D.V., Halmos A.L. (1972) Generalized method for predicting loss coefficients in entrance region flows for inelastic fluids. *The Chemical Engineering Journal*. 4(2). pp. 113–117. DOI: 10.1016/0300-9467(72)80003-0.

Received: September 15, 2021