

УДК 531.01
DOI 10.17223/19988621/74/13

А.И. Родионов, С.Р. Кравцов

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЭНЕРГИЙ ПАРЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Представлена теорема об изменении энергий парциальных движений механических, электрических и электромеханических голономных систем со стационарными связями и несколькими степенями свободы. Классическая теорема об изменении кинетической энергии становится частным случаем предложенной теоремы. Из теоремы вытекает наипростейший по объёму вычислений метод составления уравнения движения таких систем с числом степеней свободы $s \geq 2$.

Ключевые слова: *уравнения движения систем с несколькими степенями свободы; принцип кинетостатики; парциальные движения и их уравнения; уравнения мощностей; парциальные (собственные) и сторонние силы инерции; 2-й закон Кирхгофа; постулат Максвелла; теорема об изменении энергии парциальных движений механических, электрических и электромеханических систем; примеры.*

При решении задач динамики механических систем с несколькими степенями свободы для составления уравнений движения (УД) традиционно используются либо принцип Германа – Эйлера – Даламбера – Лагранжа, известный сегодня как принцип кинетостатики (ПК) – принцип Даламбера (ПД) для системы, либо общее уравнение динамики (ОУД), либо ковариантные формы УД типа уравнений Лагранжа, Нильсена, Аппеля, Гамильтона... [1–6].

Получив любым способом УД, перед их решением часто возникает вопрос о динамическом анализе взаимодействий движений системы или взаимодействий какого-либо тела с остальной частью системы. Для этого авторами [4, 7] были введены формы записи УД в виде «Представления взаимодействующих движений» (ПВД) и «Представления взаимодействующих тел» (ПВТ). Суть этого заключается в том, что в ПВД в левые части уравнений переносятся члены, описывающие кинематически чистое парциальное движение (ПД) по одной из обобщённых координат q_j [4, 7]. В правой же части остаются все остальные силы (пары сил), включая и сторонние по отношению к данному движению силы инерции. Эти силы инерции являются динамическими реакциями внутренних инерционных связей по отношению к данному j -му парциальному движению. ПВТ есть аналог второго закона Ньютона для каждого тела. «Представления» позволяют понимать процесс взаимодействия движений разных степеней свободы и взаимодействия тел. После этого анализа решается система уравнений и находится закон движения системы (ЗДС).

Рассматривается пример для механической системы с двумя степенями свободы без трения. Исходная расчётная схема изображена на рис. 1.

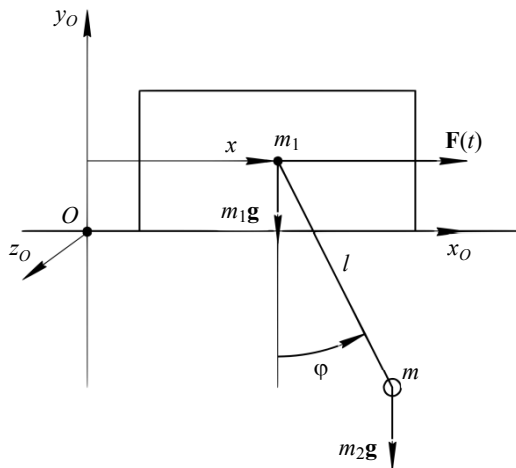


Рис. 1. Исходная расчётная схема скользящего без трения бруска по горизонтальной поверхности с прикреплённым к его центру масс метаматематическим маятником (m_1 – масса бруска; m_2 – масса маятника; l – длина нити; $\mathbf{F}(t)$ – внешняя сила; x_O, y_O, z_O – система координат; x, φ – обобщённые координаты; $m_1\mathbf{g}, m_2\mathbf{g}$ – силы тяжести первого и второго тела)

Fig. 1. Initial design model of a bar sliding without friction on a horizontal surface with a simple pendulum attached to its center of mass (m_1 – mass of the bar; m_2 – mass of the pendulum; l – length of the pendulum; $\mathbf{F}(t)$ – external force; x_O, y_O, z_O – coordinate system; x, φ – generalized coordinates; $m_1\mathbf{g}, m_2\mathbf{g}$ – gravity forces of the first and second bodies)

Выведенные УД, например по Лагранжу, представлены в виде ПВД

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = F(t) + (\Phi_{2\tau}^\varphi)_x + (\Phi_{2n}^\varphi)_x, \quad (1)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \sin(\varphi) = M_{2z}^\varphi(m_2 \ddot{x})$$

и в виде ПВТ

$$m_1 \ddot{x} = F(t) + (\Phi_{2\tau}^\varphi)_x + (\Phi_{2n}^\varphi)_x + (\Phi_2^x)_x, \quad (2)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} = M_{2z}^\varphi(m_2 \ddot{x}) + M_{2z}^\varphi(m_2 \mathbf{g}),$$

где Φ – силы инерции и далее их проекции на координатные оси:

$$(\Phi_{2\tau}^\varphi)_x = -m_2 l \ddot{\varphi} \cos(\varphi), \quad (\Phi_{2n}^\varphi)_x = m_2 \dot{\varphi}^2 l \sin(\varphi),$$

$$M_{2z}^\varphi(m_2 \ddot{x}) = -m_2 l \ddot{x} \cos(\varphi), \quad (\Phi_2^x)_x = -m_2 \ddot{x}, \quad M_{2z}^\varphi(m_2 \mathbf{g}) = -m_2 g l \sin(\varphi).$$

Левые части (1) являются уравнениями чистых парциальных движений.

При нахождении ЗДС на основе ПК недостатком является то, что приходится определять и реакции всех связей. С учётом этого задачи для нескольких степеней свободы в целом становятся весьма громоздкими.

Предлагаемая теорема (далее Th) позволяет как составлять УД, так и исследовать перетоки энергии в системе между степенями свободы и телами системы, что весьма актуально для понимания физики процесса взаимодействия парциальных подсистем.

Таким образом, Th сегодня становится весьма актуальной при чтении современных очень кратких курсов «Теоретическая механика», в которых есть только ПД – ПК и нет общего уравнения динамики, уравнений Лагранжа, Нильсена....

Следует заметить, что применение Th при составлении уравнений движения, например, уменьшает число дифференциальных операций до s по сравнению с уравнениями Лагранжа ($3s$) и уравнениями Нильсена ($2s + 1$). Здесь s – число степеней свободы. Это также является преимуществом в учебном процессе изложения курса «Теоретическая механика» (ТМ).

1. Теорема об изменении энергий парциальных движений механической системы

С учётом наличия кратких курсов ТМ в современных российских ВУЗах достаточно ограничиться выводом Th исходя из ПК. Разумеется, возможен вывод Th исходя из общего уравнения динамики, уравнений Лагранжа II-го рода и т.д. [1–6]. В последнем случае это возможно в силу того, что для голономных систем со стационарными связями действительные перемещения и скорости являются подмножеством возможных.

Вывод Th производится в дифференциальной форме. Предварительно вводится удобная терминология. Назовём силы инерции на парциальном j -м движении системы – парциальными (собственными) силами инерции $\Phi_{\text{парц}j}$. Все остальные, не парциальные силы инерции, назовём сторонними по отношению к этому движению $\Phi_{\text{стор}j}$. «Эйлероподобные» [4–8] сторонние силы инерции и их моменты становятся активными по отношению к данным j -м парциальным движениям. Они являются реакциями динамических инерциальных связей как следствий неизменности расстояний между точками модели «Твёрдое тело» в процессе движения [4, 7, 8].

Очевидно, что мощности $\Phi_{\text{парц}j}$ с учётом знака можно представить для каждого парциального движения как производные по времени от кинетической энергии парциального движения

$$\frac{d}{dt}(T_j) = -\Phi_{\text{парц}j} \cdot \mathbf{V}_j. \quad (3)$$

Конкретное парциальное движение может определяться не только кинетической T_j , но и потенциальной Π_j энергией, а также диссипативными силами, включаемыми в правую часть теоремы

$$E_j = T_j + \Pi_j,$$

где E_j – полная механическая энергия j -го парциального движения.

Это породит для всей механической системы ряд Th об изменении механической энергии парциальных движений в дифференциальной форме записи. Эти Th-мы будут сформулированы так: «Быстрота изменения энергии E_j каждого j -го ПД системы равна сумме мощностей на этом движении задаваемых сил и пар сил, реакций неидеальных связей и сторонних для j -го ПД сил инерции».

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E_j) = \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{V}_j + \Phi_{\text{стор}j} \cdot \mathbf{V}_j, \\ \frac{d}{dt}(E_k) = \mathbf{M}_k^{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{M}_{\text{стор}k}^{\Phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_k, \\ j + k = s. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{F}_j$, $\Phi_{\text{стор } j}$ – главные векторы непотенциальных задаваемых сил на j -м поступательном парциальном движении, в которые включены реакции неидеальных связей и сторонних по отношению к j -му движению сил инерции; $\mathbf{M}_k^F$, $\mathbf{M}_{\text{стор } k}^\Phi$ – соответствующие главные моменты на k -м вращательном движении; $j + k = s$ – число степеней свободы системы.

В данной работе для вывода Th за основу берётся ПК с учётом реалий современных кратких курсов теоретической механики. Выделяется в системе подсистемы кинематически чистых движений, соответствующих q_j и в общем случае динамически связанных. Это позволит получить уравнения движения системы в обобщённых координатах в ПВД (или ПВТ) и проанализировать переток энергии из одной степени свободы в другую, и от k -го тела к другим телам системы.

После анализа всех сил и пар сил на j -м движении как задаваемых, включая в них реакции неидеальных связей, так и реакции идеальных связей и даламберовых сил инерции, действующих в системе, составляются уравнения кинестатики системы в виде

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j + \mathbf{R}_j + \Phi_j = 0; \\ \mathbf{M}_k^F + \mathbf{M}_k^R + \mathbf{M}_k^\Phi = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{R}_j$, Φ_j – главные векторы j -х реакций идеальных связей и даламберовых сил инерции поступательных парциальных подсистем, а $\mathbf{M}_k^R$, $\mathbf{M}_k^\Phi$ – соответствующие силам и парам сил главные моменты k -х вращательных парциальных подсистем.

Систему уравнений (5) ПК следует переписать в виде

$$\begin{cases} -\Phi_{\text{парц } j} = \mathbf{F}_j + \mathbf{R}_j + \Phi_{\text{стор } j}, \quad \Phi_{\text{стор } j} = (\Phi_j - \Phi_{\text{парц } j}); \\ -\mathbf{M}_{\text{парц } k}^\Phi = \mathbf{M}_k^F + \mathbf{M}_k^R + \mathbf{M}_{k_{\text{стор}}}^\Phi, \quad \mathbf{M}_{k_{\text{стор}}}^\Phi = (\mathbf{M}_k^\Phi - \mathbf{M}_{\text{парц } j}^\Phi); \\ j + k = s. \end{cases} \quad (6)$$

Далее, для каждого парциального движения системы составляется уравнения мощностей всех сил и пар сил, сторонних к данному движению. Умножаются выражения для всех сил на соответствующую парциальной силе инерции линейную скорость $\mathbf{V}_j$ а выражения для моментов – на соответствующую парциальному моменту сил инерции угловую скорость ω_k . При составлении уравнений мощностей во время умножения на линейную или угловую парциальные скорости j , k -го движений все остальные сторонние движения зафиксированы. Мощности главных векторов и моментов реакций идеальных связей станут равны нулю в соответствии с постулатом идеальности связей. В результате получим (4), что и следовало.

При описании движений структурно сколь угодно сложных механических систем, но с $s = 1$, Th вырождается в классическую теорему об изменении кинетической энергии.

2. Теоремы об изменении энергий парциальных движений электрических и электромеханических систем

При рассмотрении движений электрических систем с $s \geq 2$... имеет место аналогичная механической Th с учётом первой электромеханической аналогии Максвелла [1, 2, 4]. Она доказывается аналогично приведенной выше Th но уже на основе метода контурных токов (МКТ). Последний базируется на 1-м и 2-м законах Кирхгофа. Известно, что 2-й закон Кирхгофа [9–11] исторически является в теории электричества аналогом принципа Даламбера в механике. На основе Th могут

исследоваться перетоки энергии между степенями свободы электрических систем. Также могут составляться уравнения движения таких систем.

Объединяя законы и уравнения теоретической механики с теоретическими основами электротехники на основе постулата Максвелла [1, 2], получим Th об изменении энергии взаимодействующих парциальных движений электромеханических систем.

Подводя итоги, подчеркнём, что Th становится весьма актуальной при преподавании укороченных сегодня российских курсов ТМ, теоретических основ электротехники, электромеханики, в которых не читаются ковариантные формы уравнений движения.

Далее рассмотрен ряд простых примеров составления уравнений движения механических, электрических и электромеханических систем с несколькими степенями свободы на основании предложенной Th.

3. Примеры

Пример № 1. Составим уравнения движения быстро вращающегося диска на упругом валу массы m и моментом инерции J_c относительно центра масс смещённого по отношению к исходному положению вала O при $t = 0$. Вал вращается под действием момента $\mathbf{M}(t)$. Сила тяжести диска, находящегося в невесомости, не учитывается. Упругость вала определяется двумя жёсткостями k по осям x и y . В момент движения вал проходит через диск в точке $A(x, y)$. Исходная расчётная схема системы с тремя степенями свободы по x , y , φ изображена на рис. 2 и 3 в двух видах: сверху и спереди.

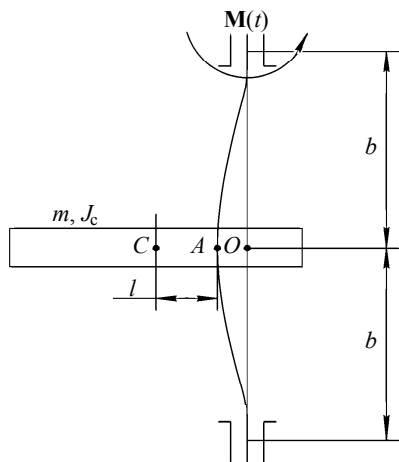


Рис. 2. Исходная расчётная схема диска (вид сбоку) (m – масса диска; J_c – момент инерции; $\mathbf{M}(t)$ – вращающий момент)

Fig. 2. Initial design model of a disk on an elastic shaft (side view) (m – mass of the disk; J_c – moment of inertia; $\mathbf{M}(t)$ – external torque)

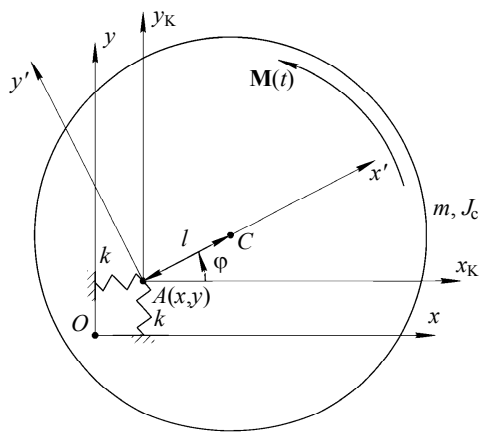


Рис. 3. Исходная расчётная схема диска (вид сверху) (x , y , φ – система координат и обобщённые координаты; x_k , y_k – оси Кёнига; x' , y' – подвижные оси; k – жёсткость пружины)

Fig. 3. Initial design model of the disk on the elastic shaft (top view) (x , y , φ – coordinate system and generalized coordinates; x_k , y_k – Kenig's axes; x' , y' – moving axes; k – longitudinal rigidity of a spring)

Изобразим и проанализируем все действующие в рассматриваемой системе силы, как показано на рис. 4. Упругие силы представлены пружинами. Силы упругости будут определены через парциальную энергию.

Инерциальные силы на рис. 4 распишутся в виде

$$\Phi_x = m\ddot{x}, \quad \Phi_y = m\ddot{y}, \quad \Phi_n^\varphi = m\omega^2 l = m\dot{\varphi}^2 l, \quad \Phi_\tau^\varphi = m\ddot{\varphi} l, \quad M_z^\Phi = J_c \ddot{\varphi}.$$

Исследуем парциальные движения этой системы по обобщённым координатам (рис. 5 – 7). При рассмотрении парциального движения по координате x любое движение по координате y и φ «замораживается» и наоборот.

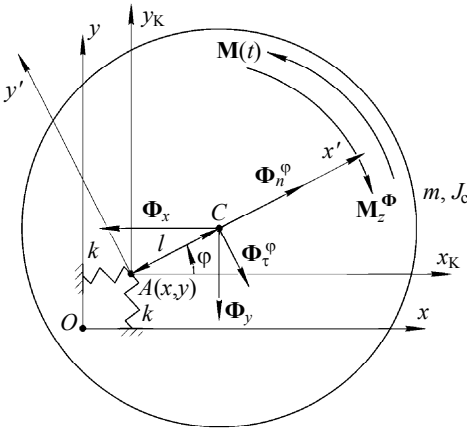


Рис. 4. Силы и пары сил, действующие на диск

Fig. 4. Active forces exerted on the disk

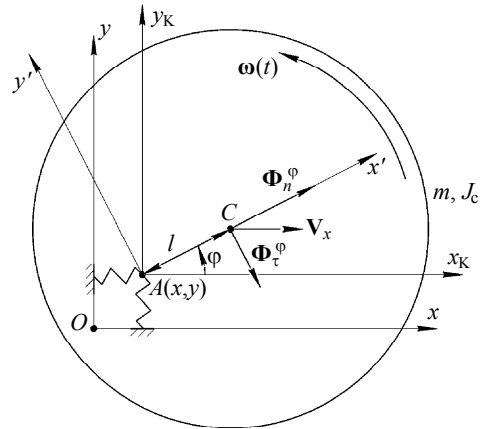


Рис. 5. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате x

Fig. 5. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along x -coordinate

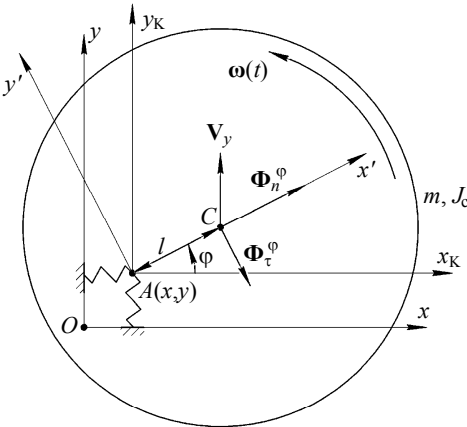


Рис. 6. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате y

Fig. 6. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along y -coordinate

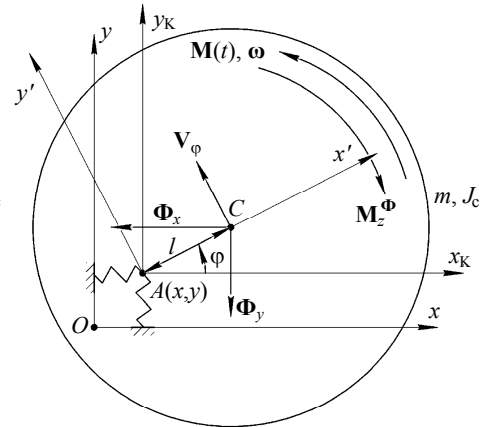


Рис. 7. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате φ

Fig. 7. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along φ -coordinate

Запишем для каждого парциального движения энергию этого движения

$$E_1 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad E_2 = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2}, \quad E_3 = \frac{(J_C + ml^2)\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (7)$$

На основе (4) получаются выражения

$$\frac{d}{dt}E_1 = (\Phi_n^\varphi \cdot \mathbf{V}_x) + (\Phi_\tau^\varphi \cdot \mathbf{V}_x); \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}E_2 = (\Phi_n^\varphi \cdot \mathbf{V}_y) + (\Phi_\tau^\varphi \cdot \mathbf{V}_y); \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}E_3 = (\mathbf{M}_z(\Phi_x) \cdot \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{M}_z(\Phi_y) \cdot \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{M}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad (10)$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $\omega = \dot{\varphi}$, $M_z(\Phi_x) = m\ddot{x}l \sin \varphi$, $M_z(\Phi_y) = m\ddot{y}l \cos \varphi$.

Раскрывая (8) – (10) и сокращая в каждом выражении общие множители, запишем УДС в ПВД:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = ml\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + ml\ddot{\varphi} \sin \varphi, \\ m\ddot{y} + ky = ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - ml\ddot{\varphi} \cos \varphi, \\ (J_C + ml^2)\ddot{\varphi} = m\ddot{x}l \sin \varphi - m\ddot{y}l \cos \varphi + M(t). \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения движения (11) рассматриваемой системы идентичны уравнениям движения, полученным из уравнений Лагранжа II рода.

Пример № 2. На рис. 8 представлена электрическая схема из двух связанных контуров. Покажем, что уравнения электрических движений этой системы могут быть получены не только на основе метода контурных токов [11] или уравнений Лагранжа – Максвелла [2, 4], но также и на основе предложенной Th.

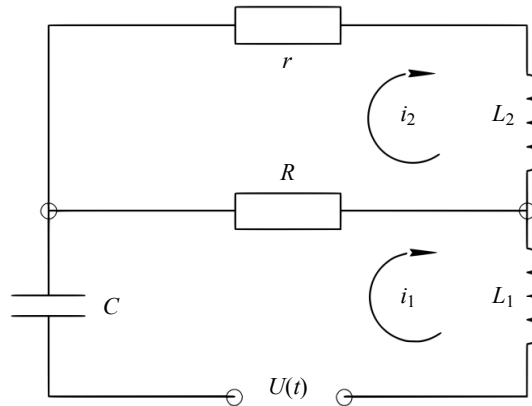


Рис. 8. Электрическая схема с двумя связанными контурами (R, r – сопротивления резисторов; C – ёмкость конденсатора; L_1, L_2 – индуктивности катушек; $U(t)$ – заданное напряжение на внешнем контуре; i_1, i_2 – контурные токи)

Fig. 8. Electrical diagram with two coupled circuits (R, r – resistors; C – capacity of a condenser; L_1, L_2 – inductance of coils; $U(t)$ – given voltage on the outer circuit; i_1, i_2 – cyclic currents)

Парциальные движения в данном случае будут определяться контурными парциальными токами i_1 и i_2 . За обобщённые координаты примем заряды, производные по времени от которых дадут соответствующие контурные токи:

$$i_i(t) = \frac{d}{dt} q_i(t).$$

Энергии этих электрических парциальных движений примут вид

$$E_1 = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{q_1^2}{2C}, \quad E_2 = \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2}. \quad (12)$$

А мощности на каждом парциальном движении выразятся через ЭДС, действующие в замкнутом контуре, и падения напряжений на резистивных элементах в каждом контуре.

На первом контуре

$$U_R^I = R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2). \quad (13)$$

На втором контуре

$$U_R^{II} = (R+r)\dot{q}_2 - R\dot{q}_1. \quad (14)$$

Тогда для рассматриваемой системы (рис. 5) Th (4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1 &= (\mathbf{U} \cdot \mathbf{i}_1) + (\mathbf{U}_R^I \cdot \mathbf{i}_1) + (\mathbf{U}_C \cdot \mathbf{i}_1), \\ \frac{d}{dt} E_2 &= (\mathbf{U}_R^{II} \cdot \mathbf{i}_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Расписывая (15) и сокращая в каждом выражении общие множители контурных токов i_i , уравнения движения контурных парциальных токов с учётом диссипативных членов примут вид

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{q_1}{C} &= U(t) + R\dot{q}_2, \\ L_2 \ddot{q}_2 + (R+r)\dot{q}_2 &= R\dot{q}_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где $R\dot{q}_2$ для первого движения есть падение напряжения от второго контурного тока, выполняющего роль сторонней ЭДС по отношению к первому парциальному движению.

Эта система уравнений тождественна ПВД-уравнениям, полученным с помощью уравнений Лагранжа – Максвелла или методом контурных токов.

Пример № 3. Рассмотрим электромеханическую систему типа датчика ускорений или вибростенда с двумя степенями свободы: одной механической по x и одной электрической по i , изображённой на рис. 9.

Система имеет две степени свободы – механическую и электрическую: движение якоря датчика по координате x и ток $i(t)$ в контуре. Причём

$$i(t) = \dot{q},$$

где q – заряд в контуре.

Уравнения движения получим на основе Th для каждого парциального движения

$$\frac{d}{dt}(E_x) = \sum P_x^{(k)}, \quad \frac{d}{dt}(E_q) = \sum P_q^{(k)}. \quad (17)$$

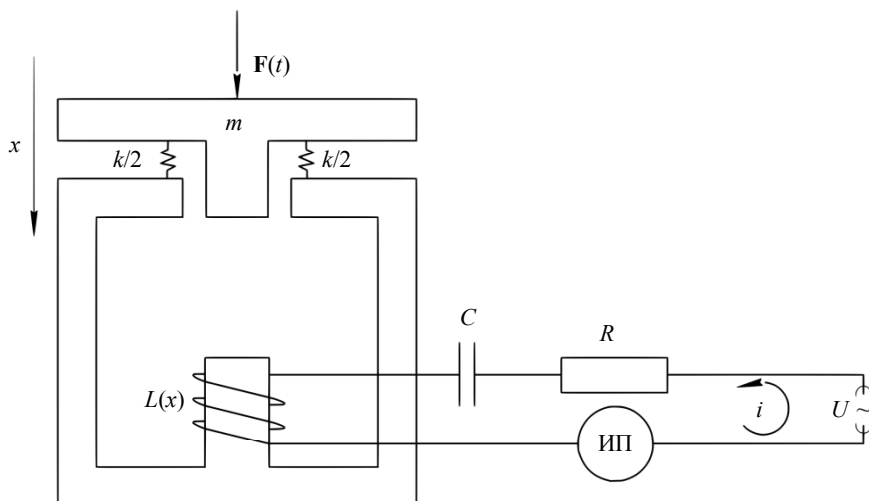


Рис. 9. Принципиальная схема электромеханической системы (m – масса якоря датчика; k – жёсткость пружины; $L(x)$ – индуктивность катушки; C – ёмкость конденсатора; R – сопротивление резистора; U – заданное напряжение на внешнем контуре; ИП – идеальный измерительный прибор с $R = 0$; $F(t)$ – внешнее силовое воздействие на якорь)

Fig. 9. Model of an electromechanical system (m – mass of an acceleration sensor; k – longitudinal rigidity of a spring; $L(x)$ – inductance of a coil; C – capacity of a condenser; R – resistance of a resistor; U – given voltage on the outer circuit; ИП – measuring gauge with $R = 0$; $F(t)$ – external forces exerted on an armature)

Введём энергии парциальных движений:

$$E_x = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{L(x)\dot{q}^2}{2}, \quad E_q = \frac{L(x)\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$

Индуктивность устройства $L(x)$ зависит от положения якоря x в зазоре магнитопровода. В результате этого возникает динамическая связь между степенями свободы по x и q . И, как следствие, появляется второе слагаемое в E_x , выполняющее роль потенциальной энергии для якоря датчика массы m . При этом ток i считается фиксированным. Заметим, что в сильно связанных динамических системах, например в ядрах атомов, разделение на кинетическую и потенциальную энергию вообще невозможно. В таких случаях говорят об энергии как единой мере. Это также имеет место и в выражении для E_x .

На якорь датчика ускорений или стол вибростенда массы m будут действовать возбуждающая сила $F(t)$, и потенциальные силы: тяжести $F_g = mg$ и упругая сила $F_{\text{упр}} = kx$, а также градиентная сила $F_{\text{grad}}(x)$, возникающая из-за зависимости E_x от x .

При выполнении (17) получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику электромеханической системы в ПВД.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = mg + F(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{q}^2, \\ L(x)\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{x}\dot{q} + U. \end{cases} \quad (18)$$

Эти ПВД-уравнения динамически связанных механического и электрического движений получаются, например, из уравнений Лагранжа – Максвелла.

Пример № 4. Рассмотрим механическую систему типа «Вибростенд» с тремя степенями свободы. Её расчётная схема, состоящая из двух тел с массами m_1, m_2 (m_2 рассматривается как материальная точка) и моментом инерции для первого тела I_C , представлена на рис. 10. Будем считать, что вибростенд находится в состоянии невесомости как более простой вариант для вывода его уравнений движения. Элементы вибростенда закреплены на пружинах жёсткости k_i . Центр масс первого тела находится на расстоянии l_1 от начала координат.

Рассмотрим все действующие в системе силы инерции (рис. 11).

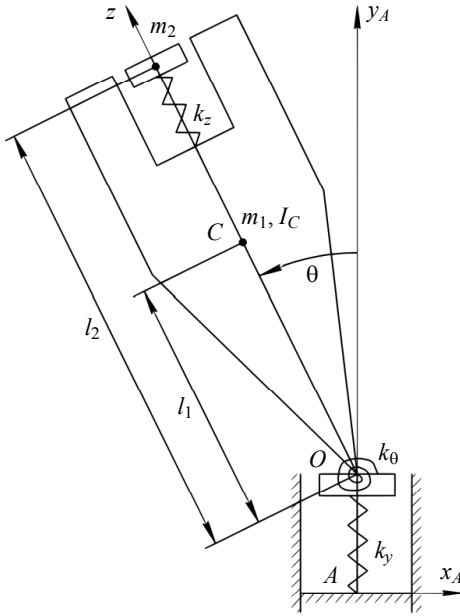


Рис. 10. Принципиальная расчётная схема модели вибростенда (m_1, m_2 – массы первого и второго тел; I_C – момент инерции первого тела; k_y, k_z – линейная жёсткость пружин; $k_θ$ – круговая жёсткость пружины; y_A, x_A – система координат; $y_A, z, θ$ – обобщённые координаты)

Fig. 10. Design model of a vibration table (m_1, m_2 – masses of the first and second bodies; I_C – moment of inertia of the first body; k_y, k_z – longitudinal rigidity of springs; $k_θ$ – torsional rigidity of a spring; y_A, x_A – coordinate system; $y_A, z, θ$ – generalized coordinates)

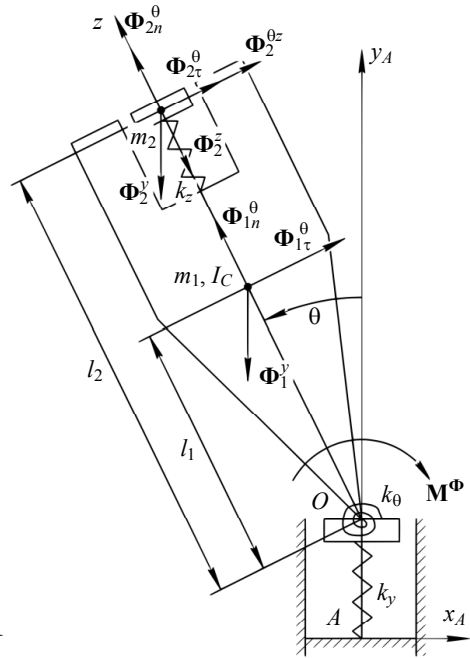


Рис. 11. Расчётная схема сил инерции тел системы

Fig. 11. Design model of inertial forces in the system

Согласно рис. 11, силы инерции примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_{1y}^y &= m_1 \ddot{y}, \quad \Phi_{1n}^0 = m_1 \dot{\theta}^2 l_1, \quad \Phi_{1\tau}^0 = m_1 \ddot{\theta} l_1, \quad \Phi_2^y = m_2 \ddot{y}, \quad \Phi_2^z = m_2 \ddot{z}, \\ \Phi_{2n}^0 &= m_2 \dot{\theta}^2 l_2, \quad \Phi_{2\tau}^0 = m_2 \ddot{\theta} l_2, \quad \Phi_2^{0z} = 2m_2 \dot{\theta} \dot{z}, \quad M^\Phi = J_C \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Для каждого парциального движения введём энергию этого движения:

$$E_y = \frac{(m_1 + m_2)\dot{y}^2}{2} + \frac{k_y y^2}{2}, \quad E_z = \frac{m_2 \dot{z}^2}{2} + \frac{k_z z^2}{2}, \quad E_\theta = \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 (l_2 + z)^2 + I_C) \dot{\theta}^2}{2} + \frac{k_\theta \theta^2}{2}.$$

Для каждой обобщённой координаты рассмотрим парциальные движения (рис. 12 – 14).

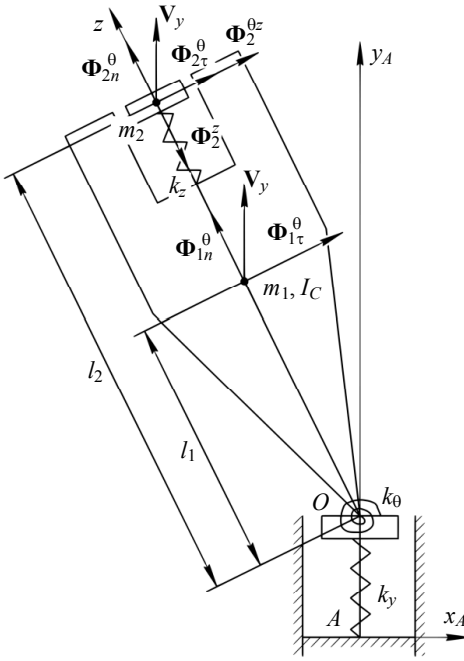


Рис. 12. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате y

Fig. 12. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along y -coordinate

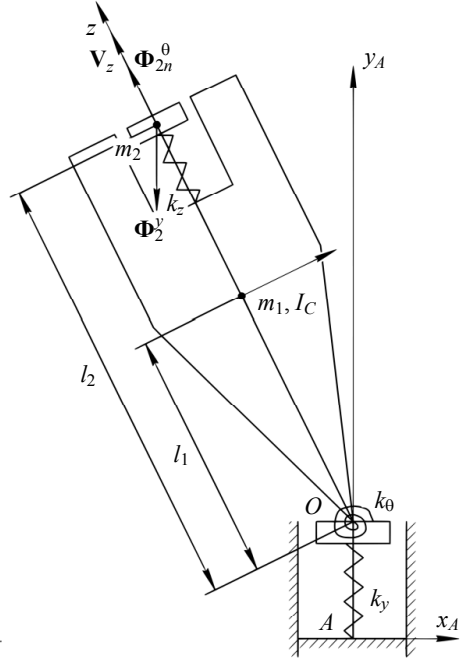


Рис. 13. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате z

Fig. 13. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along z -coordinate

Используя (4), Th данной задачи примет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E_y) = (\Phi_{1n}^\theta \cdot V_y) + (\Phi_{1\tau}^\theta \cdot V_y) + (\Phi_2^\tau \cdot V_y) + (\Phi_{2n}^\theta \cdot V_y) + \\ + (\Phi_{2\tau}^\theta \cdot V_y) + (\Phi_{2\zeta}^\theta \cdot V_y), \\ \frac{d}{dt}(E_z) = (\Phi_2^y \cdot B_z) + (\Phi_{2n}^\theta \cdot V_z), \\ \frac{d}{dt}(E_\theta) = (M_{1z}^y(\Phi_1^y) \cdot \dot{\theta}) + (M_{2z}^y(\Phi_2^y) \cdot \dot{\theta}) + (M_{2z}^{\theta z}(\Phi_2^{\theta z}) \cdot \dot{\theta}), \end{cases} \quad (19)$$

где $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$, $V_\theta = \dot{\theta} l_1$ для первого тела, $V_\theta = \dot{\theta} (l_2 + z)$ для второго тела,

$$M_{1z}^y(\Phi_1^y) = m_1 l_1 \dot{y} \sin \theta, \quad M_{2z}^y(\Phi_2^y) = m_2 (l_2 + z) \dot{y} \sin \theta, \quad M_{2z}^{\theta z}(\Phi_2^{\theta z}) = 2m_2 (l_2 + z) \dot{\theta} \dot{z}.$$

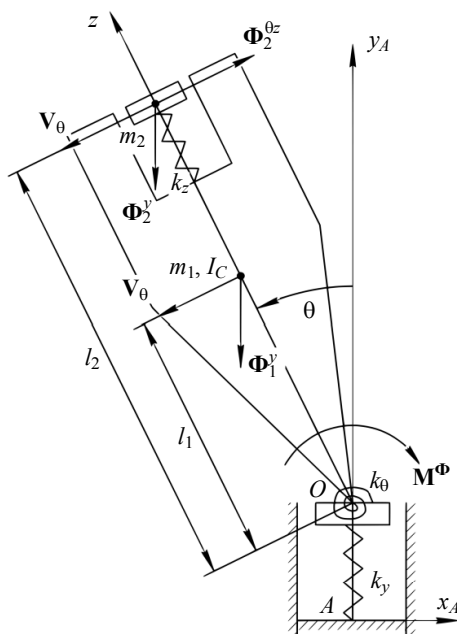


Рис. 14. Расчётная схема сторонних сил инерции на частичном движении по координате θ

Fig. 14. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along θ -coordinate

В результате, сократив в системе Th (19) общие множители, уравнения движения системы в ПВД примут вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y} + m_2 \ddot{y} + k_y y = m_1 \dot{\theta}^2 l_1 \cos \theta + m_1 \ddot{\theta} l_1 \sin \theta - m_2 \ddot{z} \cos \theta + \\ + m_2 \dot{\theta}^2 (l_2 + z) \cos \theta + m_2 \ddot{\theta} (l_2 + z) \sin \theta + 2m_2 \dot{\theta} \dot{z} \sin \theta, \\ m_2 \ddot{z} + k_z z = -m_2 \ddot{y} \cos \theta + m_2 \dot{\theta}^2 (l_2 + z), \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta} + m_2 (l_2 + z)^2 \ddot{\theta} + I_C \ddot{\theta} + k_\theta \theta = m_1 l_1 \ddot{y} \sin \theta + \\ + m_2 (l_2 + z) \ddot{y} \sin \theta - 2m_2 (l_2 + z) \dot{\theta} \dot{z}. \end{cases} \quad (20)$$

Эта система уравнений получается и на основе уравнений Лагранжа или Нильсена.

Выводы

Сформулированы и представлены Th об изменении энергии динамически связанных парциальных движений механических, электрических и электромеханических систем с несколькими степенями свободы. Они позволяют рассмотреть потоки энергий, как между степенями свободы, так и телами системы. На основе Th предложен метод составления уравнений движения динамики таких систем с объёмом вычислений меньшим, чем в известных классических методах, основанных на уравнениях Лагранжа, Нильсена, Лагранжа – Максвелла. Следует отметить, что Th становятся весьма актуальными при преподавании укороченных сегодня

русских курсов теоретической механики, теоретических основ электротехники, электромеханики, в которых не изучаются ковариантные формы уравнений движения.

Рассмотрен ряд примеров механических, электрических и электромеханических систем с двумя и тремя степенями свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике: учеб. пособие для вузов / под ред. Е.С. Пятницкого. 3-е изд. М.: Физматлит, 2001. 264 с.
2. Бутенин Н.В., Фурфев Н.А. Введение в аналитическую механику. 2-е изд., пер. и доп. М.: Наука, 2014. 256 с.
3. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2000. 736 с.
4. Родионов А.И., Ким В.Ф. Теоретическая механика: конспект лекций с приложениями. Ч. 3. Динамика. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 240 с.
5. Nolting W. Theoretical Physics. Vol. 2: Analytical Mechanics. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-40129-4.
6. Lemos N.A. Analytical Mechanics. United Kingdom: Cambridge University Printing House, 2018. DOI: 10.1017/9781108241489
7. Остроменский П.И., Родионов А.И. Составление и исследование дифференциальных уравнений движения механических систем методом обобщенных сил // Научный вестник НГТУ. 1997. № 1(3). С. 121–140.
8. Остроменский П.И. Исследование динамики машин методом динамических реакций // Вопросы динамики механических систем / Новосибирский электротехнический институт. Новосибирск, 1983. С. 36–44.
9. Усольцев А.А. Общая электротехника: учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 301 с.
10. Жулован В.В. Основы электромеханического преобразования энергии: учебник. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. 427 с.
11. Zelenkov A.A. Theory of Electrical Engineering. Electric Circuits with the Distributed Parameters. Theory of Electromagnetic Field: a Textbook. Kyiv: NAU, 2012

Статья поступила 11.02.2020

Rodionov A.I., Kravtsov S.R. (2021) PRINCIPLE OF ENERGIES OF PARTIAL MOTIONS FOR MECHANICAL, ELECTRICAL, AND ELECTROMECHANICAL HOLONOMIC SYSTEMS WITH MULTIPLE DEGREES OF FREEDOM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 127–140

DOI 10.17223/19988621/74/13

Keywords: equations of motion for systems with multiple degrees of freedom, D'Alembert's principle, partial motions and their equations, power equations, partial and external inertial forces, Kirchhoff's second law, electromechanical analogy, principle of energies of partial motions for mechanical, electrical, and electromechanical systems, examples.

The purpose of this research is to formulate and prove the principle of energy of partial subsystems for mechanical, electrical, and electromechanical holonomic systems with time-independent constraints, as well as the development of a simple method to derive equations of motion for such systems. This principle is helpful in giving short courses of theoretical mechanics to students who know only the basic principle of energy and the D'Alembert principle.

Two issues are covered in this paper: firstly, the formulation of the principle of energies for interacting mechanical partial subsystems, including the proof of the theorem, and, finally, the application of the developed method for mechanical, electrical, and electromechanical systems.

The energy principle is developed using the D'Alembert principle for partial motions of the system when deriving kinetic and power balance equations. For electrical and electromechanical systems, the principle is based on the first electromechanical analogy of Maxwell's postulate and Kirchhoff's laws.

As examples, the principle allowed obtaining equations of motion of mechanical systems with three degrees of freedom: rotation of a disk on an elastic shaft, dynamics of a vibration table, an electrical system with two cyclic currents connected through a resistor, and an electromechanical system of the acceleration sensor.

Andrey I. RODIONOV (Candidate of Physics and Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: rodionov@corp.nstu.ru

Sergey R. KRAVTSOV (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: kravczov.2015@stud.nstu.ru

REFERENCES

1. Gantmakher F.R. (2001) *Leksii po analiticheskoy mekhanike: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Lectures on analytical mechanics: a textbook for institutes of higher education]. Moscow: FIZMATLIT.
2. Butenin N.V., Fufaev N.A. (1991) *Vvedenie v analiticheskuyu mekhaniku* [Introduction to analytical mechanics]. Moscow: Nauka.
3. Drong V.I., Dubinin V.V., Il'in M.M. (2000) *Kurs teoreticheskoy mekhaniki: uchebnik dlya vuzov* [Course of theoretical mechanics: a textbook for institutes of higher education]. Moscow: BMSTU.
4. Rodionov A.I. (2010) *Teoreticheskaya mekhanika: konspekt lektsiy s prilozheniyami* [Theoretical mechanics: lecture notes with appendices]. Novosibirsk: NSTU.
5. Nolting W. (2016) *Theoretical Physics. Vol. 2. Analytical Mechanics*. Switzerland: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-319-40129-4.
6. Lemos N.A. (2018) *Analytical Mechanics*. United Kingdom: Cambridge University Printing House. DOI: 10.1017/9781108241489.
7. Ostromenskiy P.I., Rodionov A.I. (1997) Sostavlenie i issledovanie differentsial'nykh uravneniy dvizheniya mekhanicheskikh system metodom obobshchennykh sil [Derivation and study of differential equations of motion of mechanical systems by the method of generalized forces]. *Nauchnyy vestnik NGTU – Scientific Bulletin of NSTU*. 1. pp. 121–140.
8. Ostromenskiy P.I. (1983) Issledovanie dinamiki mashin metodom dinamicheskikh reaktsiy [Study of machine dynamics by the dynamic reactions method]. *Voprosy dinamiki mekhanicheskikh sistem*. pp. 36–44.
9. Usol'tsev A.A. (2009) *Obshchaya elektromekhanika: Uchebnoe posobie* [General electromechanics: a textbook]. Saint Petersburg: ITMO.
10. Zhulovyan V.V. (2014) *Osnovy elektromekhanicheskogo preobrazovaniya energii: uchebnik* [Fundamentals of electromechanical energy conversion: a textbook]. Novosibirsk: NSTU.
11. Zelenkov A.A. (2012) *Theory of Electrical Engineering. Electric Circuits with the Distributed Parameters. Theory of Electromagnetic Field: a Textbook*. Kyiv: NAU.

Received: February 11, 2020