

УДК 511.17 + 519.682
DOI 10.17223/19988621/75/2

MSC 11A41, 11A07, 11B39

В.М. Зюзьков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Показаны полезность и особенности экспериментальной математики. Рассматриваются два исследования в теории чисел, сделанные с помощью Wolfram Mathematica. Первое, уже прежде опубликованное, содержало доказательства сравнений вида $F(A(p)) \equiv \varepsilon F(S) \pmod{p}$. Используются обозначения: $F(n)$ – n -е число Фибоначчи, p – простое число, ε равно ± 1 , $A(p)$ есть произвольный многочлен от p с целыми коэффициентами и S – более простое выражение, содержащее только коэффициенты многочлена $A(p)$ и не содержащее p . Второе исследование заканчивается новым результатом – теоремой о том, что асимптотическая плотность интервалов, кратных 6, между соседними простыми числами равна $\frac{1}{2}$. Первое исследование упоминается с целью сравнить роли экспериментов для этих двух задач. В первом исследовании эксперименты были необходимы – они помогли, начиная с известных фактов, сформулировать цепочки достоверных догадок, доказать которые оказалось уже нетрудно. Во втором исследовании первоначально не было даже уверенности в том, что проделываемые вычисления могут к чему-то привести. И для доказательства теоремы о значении $\frac{1}{2}$ для предела проделанные эксперименты не нужны. Нужна только догадка о формулировке теоремы. Но эксперименты дополнительно привели к гипотезе о том, каким образом осуществляется предельный переход на протяжении первых 80 миллионов простых чисел.

Ключевые слова: экспериментальная математика, числа Фибоначчи, интервалы между простыми числами, система Mathematica.

Имеются два взгляда на природу математики. Большинство математиков (и физиков) являются сторонниками математического платонизма – математика есть высшее проявление объективной реальности, данностью существующей вне времени, места и, конечно же, вне нас самих.

Противоположной точкой зрения является конвенционализм: математика – плод человеческого воображения, исключительно продукт человеческого интеллекта, искусственная умственная конструкция, хотя и достаточно прочная, но такая же не вечная, как все конструкции, созданные нами, людьми.

Нужна ли математикам философия? Возможно, многие математики никогда и не думали об этом. Но философии математиков важны для понимания того, как математики понимают свою деятельность. Они философы по жизни. Философия каждого математика имеет смысл для индивида, но противоположные философии могут, однако, приводить к различию в том, как математики учат своему предмету. Платонисты начинают с абстрактных теорий (структуры у Бурбаки), конвенционалисты начинают с частных случаев.

Различие в философских взглядах проявляется и по-другому – в отношениях к математическим экспериментам, что является предметом настоящей статьи.

Платонический подход отчасти превращает нас в физиков. Для физика нет большого смысла в том, чтобы изучать предмет, просто создавая понятия путем чистого измышления. На самом-то деле предполагается, что физик описывает окружающий мир. Физики не считают делом чести доказывать то, что утверждают в своих исследовательских статьях. Они часто прибегают к другим способам рассуждения – от описания и аналогии до эксперимента и вычислений.

Если мы, математики, – платоники, описывающие мир, который «уже есть», то почему нам нельзя пользоваться теми же методами, которые применяют физики? Почему мы обречены доказывать?

На самом деле экспериментированием математики занимаются. Математические идеи хорошо путешествуют и переносят проверку временем потому, что записываются в виде доказательств. Но открытие математических фактов происходит совсем иначе. Практикующие математики делают открытия методом проб и ошибок: они работают над примерами, разговаривают с коллегами, выдвигают гипотезы, читают лекции, пытаются сформулировать результаты, меняют доказательства, выводят частичные результаты и ошибаются.

Своими достижениями прославились знаменитые математики-экспериментаторы: Пьер Ферма, Леонард Эйлер, Карл Гаусс, Бернхард Риман, Рамануджан Сриниваса.

Много математических открытий с помощью экспериментов было сделано и в XX веке. Эдвард Лоренц обнаружил в компьютерном эксперименте явление хаоса – аттрактор Лоренца (1962 г.). Универсальное поведение при итерации одномерных отображений, наиболее известным из которых является логистическое отображение $f: x \rightarrow \lambda x(1 - x)$, было открыто Митчеллом Фейгенбаумом в 1975 г. с помощью электронного калькулятора. Многие аспекты фракталов были найдены Бенуа Мандельбротом в 1970-х годах с использованием компьютерной графики. Понятия «фрактал» и «хаос» возникли на основании визуализации без предшествующего теоретического обоснования. Методы экспериментальной математики при изучении простых математических систем, таких как клеточные автоматы, простые программы, бесконечные последовательности и др., показывающие сложное поведение, описываются в книге Стивена Вольфрама [1].

Экспериментальная математика – это недавно структурированная область математики, которая использует компьютер и передовые вычислительные технологии в качестве инструментов для проведения экспериментов, таких как анализ примеров, проверка новых идей и поиск закономерностей. Разработка широкого спектра математических программных продуктов, таких как Mathematica [2] с языком программирования Wolfram, позволила математикам с разным опытом и интересами использовать компьютер в качестве важного инструмента в своей повседневной работе. Использование вычислений варьируется от стремления исключить участие человека в решении проблемы до традиционных математических вопросов, для которых вычисление является важным инструментом.

Современной экспериментальной математике свойственно изложение результатов, следуя Эйлеру. Эйлер в своих работах показывал все подробности, каким образом он приходил к формулировкам теорем, на каких предположениях он основывался, примеры смотрите в [3, глава VI]. Как и в экспериментальной науке, экспериментальная математика может быть использована для составления математических предсказаний, которые затем могут быть подтверждены или опровергнуты на основе дополнительных вычислительных экспериментов. Эти исследования должны завершаться доказательством.

Но математика больше чем доказательство. Много работ этому посвятил Дьердь Пойа [3, 4], показывая как важны в математике догадки и правдоподобные рассуждения. Имре Лакатос в своей работе [5] высказывает мнение, что никакой результат в математике не может быть окончательным и что эвристики не менее важны, чем само доказательство.

Из интервью, данного Юрием Маниным [6]: «Но теперь то, что умели Эйлер и Гаусс, может делать любой математик, сидя за своим письменным столом. И если у него не хватает воображения, чтобы различить какие-то контуры в этой платоновской реальности, он может поэкспериментировать. <...> Более того, появились люди с математическим, но компьютерно-ориентированным умом. Точнее сказать, это люди, которые были и раньше, но без компьютера им чего-то не хватало».

Современное состояние экспериментальной математике изложено в [7]. Примеры экспериментов в теории чисел, подтверждений и опровержений, смотрите в [8]. Остановимся на двух результатах автора.

1. Сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю

Обозначим через $F(n)$ число Фибоначчи с номером n , где $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ и при $n > 1$ имеем равенство $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Это равенство остается в силе, если числа Фибоначчи доопределяются для отрицательных номеров с помощью известного правила $F(-n) = (-1)^{n-1}F(n)$.

В работе [9] доказываются сравнения вида $F(A(p)) \equiv \varepsilon F(S) \pmod{p}$. Используются обозначения: $F(n)$ – число Фибоначчи с номером n , p – нечетное простое число, ε равно ± 1 , $A(p)$ есть произвольный многочлен от p с целыми коэффициентами и S – более простое выражение, содержащее только коэффициенты многочлена $A(p)$ и не содержащее p .

Теорема 1. Пусть для простого p выполнено $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}.$$

Теорема 2. Пусть для простого нечетного p выполнено $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv (-1)^R F(S),$$

где

$$S = \sum_{i=1}^k (-1)^i a_i, \quad R = \sum_{i=1}^k i a_i.$$

Эти результаты первоначально были обнаружены при проведении экспериментов с помощью *Mathematica*. Промежуточные доказательства проводились с частными случаями многочленов, начиная с простейших многочленов вида $p + b$, потом переходя к видам $ap + b$, $ap^n + b$, $A(p)$. Для многочленов видов $ap + b$ и $ap^n + b$ проводилось несколько вычислений с небольшими числами a , b и p , приводящих к догадке, какой вид имеет правая часть искомого сравнения. Предположения проверялись программным путем для 200 первых простых чисел и для тысячи случайных значений пар a и b в диапазоне от -50 до 50 . При получении сразу для всех рассмотренных вариантов подтверждения предполагаемого вида сравнения проводилось строгое доказательство.

2. Экспериментальное исследование динамики интервалов между последовательными простыми числами

Постановка задачи. Сначала введем обозначения: p_n – n -е по порядку простое число, через $d_n = p_{n+1} - p_n$ обозначим интервал между соседними простыми числами. Имеем $d_1 = 3 - 2 = 1$ и d_n – четное число для всех $n > 1$. Известен легко доказываемый факт, что интервал между соседними простыми числами может быть как угодно велик. С другой стороны, неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел p_n , для которых $d_n = 2$. Изучению интервалов между соседними простыми числами посвящено много работ [10]. На рис. 1 показано типичное поведение зависимости d_n от n .

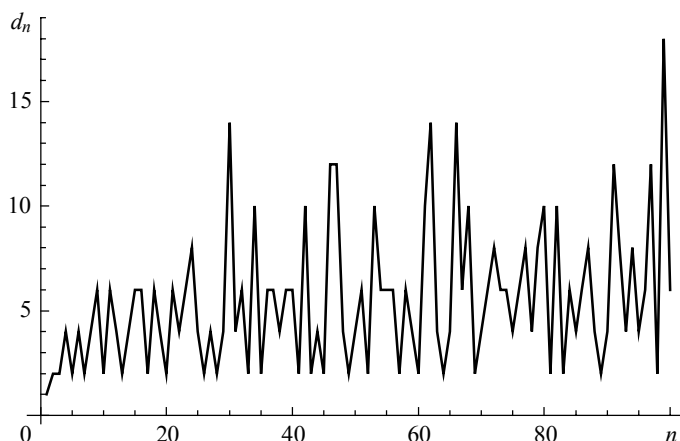


Рис. 1. Первые 100 интервалов между соседними простыми числами
Fig. 1. First 100 prime gaps

Положим $D(m)$ – список пар чисел $\{d, r(d)\}$, где d пробегает все различные значения d_n , а $r(d)$ – соответствующее количество повторений значения d , при $n + 1 \leq m$. Пары в $D(m)$ упорядочены в порядке возрастания d . Например, первые 11 простых чисел – $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$, соответствующие значения интервалов – $\{1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2\}$ и $D(10) = \{\{1, 1\}, \{2, 5\}, \{4, 3\}, \{6, 1\}\}$. На рис. 2 показан график зависимости частоты $r(d)$ появления значения d интервала среди первых 3000 простых чисел. Наибольшее значение $d = 52$, оно повторилось дважды.

На рис. 3 мы можем наблюдать случай для большего значения $m = 30000$. Причем, в этом случае показываем только часть графика для значений $d \leq 52$, хотя наибольшее значение интервала между соседними простыми числами от 2 до $p_{30000} = 350377$ есть 86 и $r(86) = 2$.

Оба графика на рис. 2 и 3 на одинаковом промежутке до $d = 52$ выглядят похожими. По-видимому, что-то сохраняется при увеличении m . Приступим к выяснению, что же является в каком-то смысле инвариантом. Графики выглядят изломанными, на них присутствуют пики. Вот и изучение распределения этих пиков привело к неожиданным результатам. Назовем *локальным максимумом* значение $d \neq 2$, для которого выполнено условие: в списке $D(m)$ имеется три соседних пары $\{d_1, r(d_1)\}, \{d, r(d)\}, \{d_2, r(d_2)\}$, где $r(d_1) < r(d)$ и $r(d) > r(d_2)$. Каждому локальному максимуму d соответствует пик, высота которого равна $r(d)$.

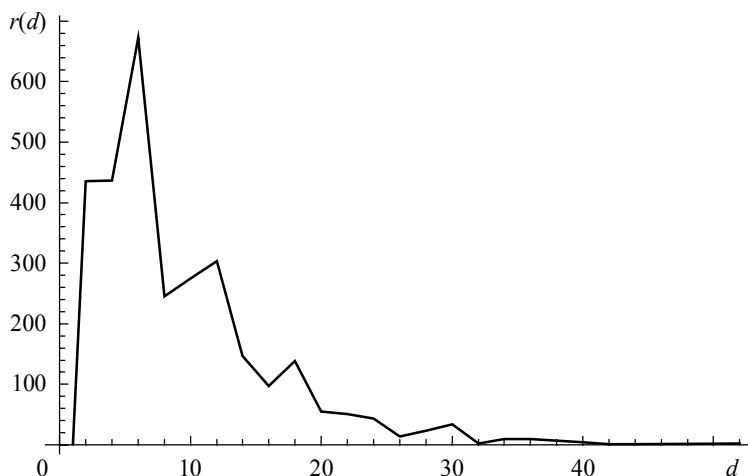


Рис. 2. Частота значений интервалов между простыми числами до $p_{3000} = 27449$

Fig. 2. Prime gaps frequency before $p_{3000} = 27449$

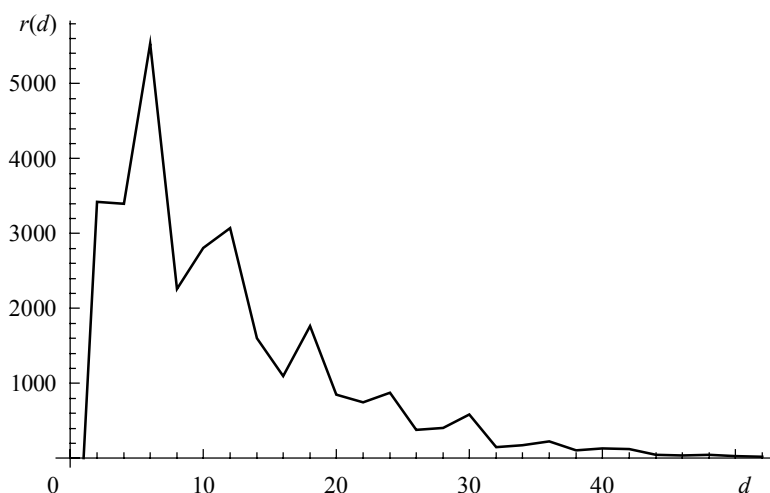


Рис. 3. Частота значений интервалов между простыми числами до $p_{30000} = 350377$

Fig. 3. Prime gaps frequency before $p_{30000} = 350377$

В списке $D(3000)$ присутствуют 23 различных значений d . Причем локальные максимумы с соответствующей частотой суть $\{6, 672\}$, $\{12, 303\}$, $\{18, 138\}$, $\{30, 34\}$, $\{36, 10\}$. Обратите внимание, что все значения локальных максимумов кратны 6. Также заметим, что $d = 24$ отсутствует в этом перечне.

В списке $D(30000)$ имеется 41 значение $\{d, r(d)\}$: $\{1, 1\}$, $\{2, 3423\}$, $\{4, 3397\}$, $\{6, 5536\}$, $\{8, 2259\}$, $\{10, 2810\}$, $\{12, 3072\}$, $\{14, 1604\}$, $\{16, 1093\}$, $\{18, 1760\}$, $\{20, 847\}$, $\{22, 750\}$, $\{24, 874\}$, $\{26, 376\}$, $\{28, 405\}$, $\{30, 582\}$, $\{32, 150\}$, $\{34, 178\}$, $\{36, 223\}$, $\{38, 107\}$, $\{40, 135\}$, $\{42, 125\}$, $\{44, 41\}$, $\{46, 38\}$, $\{48, 46\}$, $\{50, 25\}$, $\{52, 18\}$, $\{54, 39\}$, $\{56, 9\}$, $\{58, 14\}$, $\{60, 26\}$, $\{62, 6\}$, $\{64, 3\}$, $\{66, 10\}$, $\{68, 3\}$, $\{70, 7\}$, $\{72, 1\}$, $\{76, 2\}$, $\{78, 2\}$, $\{82, 1\}$, $\{86, 2\}$. Локальными максимумы суть $\{6, 5536\}$, $\{12, 3072\}$, $\{18, 1760\}$, $\{24, 874\}$, $\{30, 582\}$, $\{40, 135\}$, $\{48, 46\}$, $\{54, 39\}$, $\{60, 26\}$, $\{66, 10\}$, $\{70, 7\}$.

Из них значения d не кратные 6 – только 40 и 70, и все локальные максимумы кратные 6 из списка $D(3000)$ остались и добавились еще шесть максимумов, кратных 6.

Для наглядности на рис. 4 приведены сразу два графика с рис. 2 и 3. Поскольку масштабы по оси r на исходных графиках 2 и 3 сильно различаются, то значения частоты $r(d)$ с рис. 2 увеличено в 6 раз на рис. 4 (это нижняя ломаная).

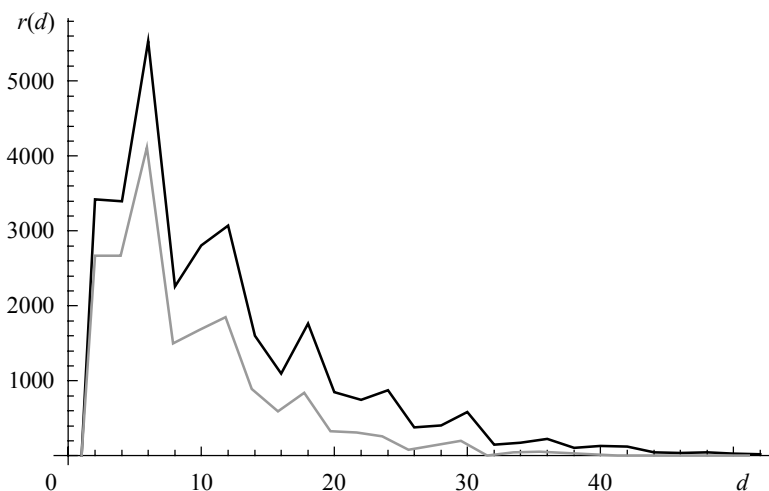


Рис. 4. Два графика с рис. 2 и рис. 3 вместе

Fig. 4. Two plots from Figs. 2 and 3 together

Теперь будем рассматривать, что получается с локальными максимумами при дальнейшем увеличении m . Вычисления осуществлялись в системе Wolfram Mathematica 12.1. Возьмем $m = 100\,000$. В данном случае список локальных максимумов следующий: $\{6, 16989\}$, $\{12, 10159\}$, $\{18, 6304\}$, $\{24, 3538\}$, $\{30, 2507\}$, $\{36, 1032\}$, $\{42, 661\}$, $\{48, 290\}$, $\{54, 197\}$, $\{60, 131\}$, $\{66, 65\}$, $\{70, 35\}$, $\{78, 21\}$, $\{84, 10\}$, $\{90, 7\}$, $\{96, 3\}$. В этом списке идут все числа кратные 6 из первой сотни, за исключением $d = 72$, вместо него присутствует 70. Дальнейшая проверка очевидного предположения продолжалась. Для больших значений m использовались параллельные вычисления. При $m = 80\,000\,000$ в качестве локальных максимумов присутствуют все числа кратные 6 от 6 до 246, включительно, и после этого еще идут два числа 250 и 260, не делящиеся на 6, а потом 270 и 282, которые делятся на 6. Получаем следующее предположение.

Гипотеза 1. По мере увеличения m все числа кратные 6, и только они, становятся локальными максимумами. Это означает следующее.

1) Если при каком-то m_1 число d из списка $D(m_1)$ является локальным максимумом и d делится на 6, то число d остается локальным максимумом в списке $D(m)$ и при всех $m > m_1$.

2) Если же d кратно 6 и не является локальным максимумом, то оно станет таковым в списке $D(m_2)$ при некотором $m_2 > m$.

3) Если d не кратно 6 и является локальным максимумом в списке $D(m)$ при некотором m , то, начиная с некоторого $m_1 > m$, d уже не будет локальным максимумом в $D(m_1)$.

Утверждение 1) теоретически можно опровергнуть с помощью вычислений. Утверждения 2) и 3) нельзя опровергнуть с помощью вычислений даже теоретически. Помогает ли гипотеза 1 высказать какую-нибудь догадку, более простую и более полезную, о динамике частоты интервалов между простыми числами?

Да, мы приходим к естественному предположению, что по мере роста рассматриваемых простых чисел все более часто между простыми числами встречаются интервалы кратные 6. Всего различных остатков от деления четных чисел на 6 может быть три: 0, 2, 4. Поэтому выскажем новую гипотезу в самой слабой форме.

Гипотеза 2. Начиная с некоторого n_0 и для любого $n > n_0$, доля количества интервалов, кратных 6, среди первых n простых чисел, составляет более $1/3$.

Были проведены вычисления отношения $k(n)/n$, где $k(n)$ – количество интервалов кратных 6 среди первых n простых чисел и n изменялось от 1 до 3 000 000. В указанном интервале гипотеза 2 подтвердилась. В качестве n_0 можно взять 2000. Доля интервалов кратных 6 среди первых трех миллионов интервалов составляет приблизительно 43.6%.

На графике (рис. 5) показаны значения $k(n)/n$ для всех простых чисел с номерами от 2000 до 3 000 000. Используемый алгоритм требовал много оперативной памяти компьютера, и также невозможно было применить параллельные вычисления. Поэтому дальнейшая проверка поведения $k(n)/n$ стала возможной только при изменении алгоритма.

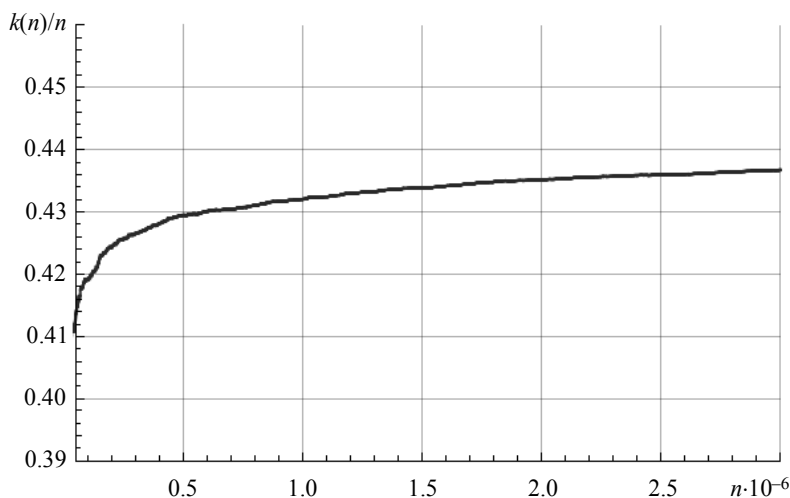


Рис. 5. Изменения отношения $k(n)/n$ при изменении n от 2 000 до 3 000 000

Fig. 5. Variation in the $k(n)/n$ ratio when n varies from 2,000 to 3,000,000

Были проделаны вычисления только для нескольких больших значений n . Точнее, вычислялись отношения $k(n)/n$ только для простых чисел с номерами 5 000 000, 10 000 000, 15 000 000, 20 000 000, 25 000 000, 30 000 000, 35 000 000, 40 000 000, 45 000 000, 50 000 000, 60 000 000, 70 000 000 и 80 000 000. Соответствующие значения $k(n)/n$, равные 0.438461, 0.440758, 0.441873, 0.442697, 0.443279, 0.443764, 0.444177, 0.444509, 0.444798, 0.445071, 0.445507, 0.445858 и 0.446166, представлены на рис. 6.

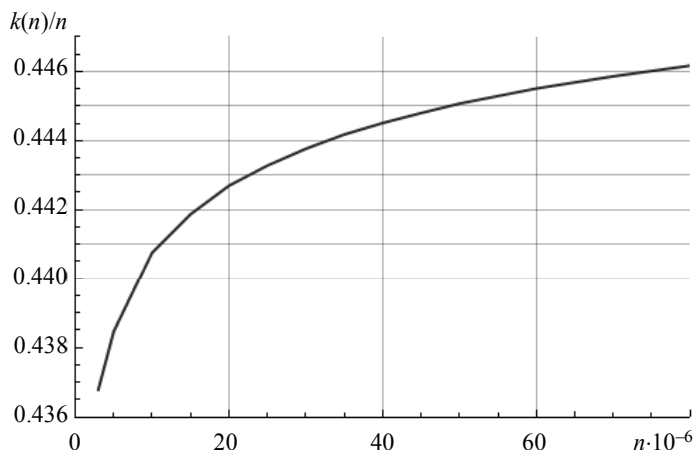


Рис. 6. Изменения отношения $k(n)/n$ при изменении n от 3 000 000 до 80 000 000

Fig. 6. Variation in the $k(n)/n$ ratio when n varies from 3,000,000 to 80,000,000

На рис. 5 и 6 видно, что значения $k(n)/n$ растут с замедлением при увеличении n . Доля интервалов кратных 6 среди первых 80 миллионов интервалов составляет приблизительно 44,6%. Это значительно больше числа $1/3$ – ожидаемого значения до проделанных экспериментов, если учесть что допускаются только четные остатки при делении на 6. Возможно, для больших значений n наблюдаемая тенденция в изменениях $k(n)/n$ сохраняется.

В действительности, справедливо следующее утверждение, более сильное, чем гипотеза 2.

Теорема 3. Среди всех интервалов между соседними простыми числами доля интервалов с длиной кратной 6 составляет половину в асимптотическом смысле.

Доказательство следует из теоремы Дирихле и её уточнения.

Теорема Дирихле [11, р. 16]. Пусть целые числа a и $d > 0$ взаимно просты. Тогда арифметическая прогрессия $\{a, a + d, a + 2d, \dots\}$ содержит бесконечно много простых чисел.

Теорема о простых числах в классах вычетов [12, с. 25]. Обозначим через $\pi(x; d, a)$ количество простых чисел данной прогрессии, не превосходящих x , тогда справедливы следующие соотношения:

$$\pi(x; d, a) \sim \frac{1}{\varphi(d)} \pi(x) \sim \frac{1}{\varphi(d)} \frac{x}{\ln x} \sim \frac{1}{\varphi(d)} \operatorname{li}(x),$$

где φ обозначает функцию Эйлера и $\operatorname{li}(x)$ – интегральный логарифм от x . Запись $f(x) \sim g(x)$ обозначает «асимптотическую эквивалентность функций f и g при x , стремящемся к бесконечности», и означает существование определенного предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1.$$

Доказательство асимптотических эквивалентностей см. в [13, с. 88].

Таким образом, предыдущая теорема говорит, что множества простых чисел $\{p \mid p \bmod 6 = 1\}$ и $\{p \mid p \bmod 6 = 5\}$ имеют одинаковую асимптотическую плотность. Очевидно, что $d_i \bmod 6 = 0$ равносильно тому, что $p_{i+1} \equiv p_i \pmod{6}$. Из равновероятности $p \bmod 6 = 1$ и $p \bmod 6 = 5$ следует, что для $(p_i \bmod 6, p_{i+1} \bmod 6)$ различные пары значений $(1, 1)$, $(5, 5)$, $(1, 5)$ и $(5, 1)$ равновероятны. Поэтому сре-

ди всех интервалов между соседними простыми числами доля интервалов с длиной кратной 6 составляет половину в асимптотическом смысле.

Сравним теперь роль экспериментов, проводимых при решении двух задач: первая – сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю и вторая – исследование динамики интервалов между последовательными простыми числами. В первой задаче эксперименты были необходимы – они помогли, начиная с известных фактов, сформулировать цепочки достоверных догадок, доказать которые оказалось уже нетрудно с помощью математической индукции. Во втором исследовании первоначально не было даже уверенности в том, что проделываемые вычисления могут к чему-то привести. И для доказательства теоремы о значении $\frac{1}{2}$ для предела проделанные эксперименты не нужны. Нужна только догадка о формулировке теоремы. Но проделанные эксперименты имеют самостоятельную ценность. Они дополнительно показали, каким образом осуществляется предельный переход на протяжении первых 80 миллионов простых чисел. Об этом говорит гипотеза 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolfram S.* A New Kind of Science. Wolfram Media, 2002. 1197 p.
2. *Wolfram Mathematica.* URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>.
3. *Поля Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.
4. *Поля Д.* Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание: пер. с англ. 3-е изд. М.: КомКнига, 2010. 448 с.
5. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2010. 152 с.
6. *Троицкий вариант.* № 13(839). 30 сентября 2008.
7. *Weisstein Eric W.* Experimental Mathematics // From MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html>
8. *Зюзьков В.М.* Эксперименты в теории чисел. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. 348 с. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000658998>.
9. *Зюзьков В.М.* Сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 15–21. DOI: 10.17223/19988621/69/2.
10. *Weisstein Eric W.* Prime Gaps // From MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/PrimeGaps.html>.
11. *Hardy G.H., Wright E.M.* An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford, England: Clarendon Press, 2008. 642 p.
12. *Крэндэлл Р., Померанс К.* Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты. М.: УРСС; Книжный дом «Либроком», 2011. 664 с.
13. *Гельфанд А.О., Линник Ю.В.* Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962. 272 с.

Статья поступила 16.09.2021.

Zyuz'kov V.M. (2022) EXPERIMENTAL MATHEMATICS AND ITS USE IN NUMBER THEORY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 23–32

DOI 10.17223/19988621/75/2

Keywords: experimental mathematics, Fibonacci numbers, prime gaps, Mathematica system.

The purpose of the work is to show the usefulness and features of experimental mathematics. Two number theory problems are solved using Wolfram Mathematica. The solution to the first problem has already been published. Congruencies of the form $F(A(p)) \equiv \varepsilon F(S) \pmod{p}$ by prime

modulo p are proved, whenever $A(p)$ is a polynomial respect p with integer coefficients. Here, $F(n)$ is an n th Fibonacci number, ε is 1 or -1 , and S is a simple expression which contains only coefficients of the polynomial $A(p)$. The second problem examines the behavior of prime gaps. It is proved that if G is the set of all prime gaps whose length is a multiple of 6, the asymptotic density of G is $1/2$. The first study is mentioned to compare the role of experimentation for these two tasks. In the first study, experiments were necessary – they helped, starting with known facts, to formulate chains of reliable guesses which turned out to be easy to prove. In the second study, it was not certain that the calculations being done could lead to anything. It was possible to arrive at the formulation of a theorem on the value of $1/2$ for the limit without experimental calculations. Only a conjecture about the formulation of the theorem is required. However, the experiments additionally led to a hypothesis on how the passage to the limit is implemented for the first 80 million primes.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 11A41, 11A07, 11B39

Valentin M. ZYUZ'KOV (Senior Researcher, Associate Professor of chair of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University, Professor of chair of computer systems in control and design of the Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Wolfram S. (2002) *A New Kind of Science*. Wolfram Media.
2. *Wolfram Mathematica*. Access mode: <http://www.wolfram.com/mathematica>.
3. Polya G. (1954) *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics. Vol. 2. Patterns of Plausible Inference*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.
4. Polya G. (1981) *Mathematical Discovery*. New York: Wiley.
5. Lakatos I. (1963–64) Proofs and Refutations. *British Journal for the Philosophy of Sciences*, 14, pp. 1–25, 120–139, 221–245, 296–342.
6. Access mode: <https://trv-science.ru/2008/09/you-i-manin-ne-my-vybiraem-matematiku-svoejj-professiejj-a-ona-nas-vybiraet/>.
7. Weisstein E.W. *Experimental Mathematics*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. Access mode: <https://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html>.
8. Zyuz'kov V.M. (2019) *Eksperimenty v teorii chisel* [Experiments in the number theory]. Tomsk: Izd-vo NTL. Access mode: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vts:000658998>.
9. Zyuz'kov V.M. (2021) Sravneniya s chislami Fibonachchi po prostomu modulyu [Congruencies of the Fibonacci numbers modulo a prime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 15–21. DOI6 10.17223/19988621/69/2.
10. Weisstein E.W. *Prime Gaps*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. Access mode: <https://mathworld.wolfram.com/PrimeGaps.html>.
11. Hardy G.H., Wright E.M. (2008) *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford, England: Clarendon Press.
12. Crandall R., Pomerance C. (2005) *Prime numbers. A Computation perspective*. Springer Science.
13. Gelfand A.O., Linnik Yu.V. (1962) *Elementarnyye metody v analiticheskoy teorii chisel* [Elementary Methods in Analytical Number Theory] Moscow: Fizmatgiz.

Received: September 16, 2021