ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Математика и механика № 75

УДК 514.76 MSC: 53D10, 53C50
DOI 10.17223/19988621/75/4

**В.И. Паньженский, А.О. Растрепина**

# ЛЕВОИНВАРИАНТНАЯ ПАРАСАСАКИЕВА СТРУКТУРА НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Доказано, что на группе Гейзенберга существует левоинвариантная параконтактная метрическая структура, которая является нормальной и, следовательно, парасасакиевой. На этой группе имеется единственная контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением, инвариантная относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры. Установлено, что обнаруженная связность является контактной метрической связностью для любого парасасакиева многообразия. Введено понятие линейной связности, согласованной с распределением. Доказано, что связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность группы Гейзенберга согласованы с контактным распределением и их контактные геодезические совпадают с геодезическими усечённой связности.

**Ключевые слова:** *параконтактная структура*, *контактная метрическая связность*, *связность*, *согласованная с распределением*, *усеченная связность.*

## 1. Введение

Среди трёхмерных групп Ли группа Гейзенберга является одним из наиболее известных и простых примеров в исследовании теории динамических систем, теории управления, субримановой геометрии, а также других нильпотентных групп [1–5]. В работах [6–8] на группе Гейзенберга и её многомерном аналоге исследуется левоинвариантная каноническая сасакиева структура. Кроме левоинвариантных контактных метрических структур на группах Ли изучаются и левоинвариантные параконтактные метрические структуры. В частности, в работах [9, 10] дана классификация левоинвариантных парасасакиевых структур на пятимерных группах Ли.

В данной работе среди всех левоинвариантных параконтактных структур на группе Гейзенберга выделяется структура, аналогичная канонической сасакиевой структуре, фиксируя псевдориманову метрику, которая получается с помощью левых сдвигов из псевдоевклидовой, заданной в касательном пространстве единицы группы. Требуя инвариантность контактной формы относительно группы движений псевдоримановой метрики, однозначно определяются контактная структура и структурный эндоморфизм. Полученная таким образом левоинвариантная параконтактная метрическая структура является парасасакиевой. На группе Гейзенберга имеется единственная контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением, инвариантная относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры. Доказано, что обнаруженная связность является контактной метрической связностью для любого парасасакиева многообразия. Введено понятие связности, согласованной с распределением. Установлено, что на группе Гейзенберга, наделённой парасасакиевой структурой, связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность согласованы с контактным распределением, а их контактные геодезические совпадают с геодезическими усечённой связности. Исследовано строение контактных геодезических. Полученные в работе результаты справедливы и для многомерной группы Гейзенберга.

## 2. Параконтактная метрическая структура

Пусть $M$ – гладкое многообразие нечетной размерности $m=2n+1$. Контактной формой на $M$ называется дифференциальная 1-форма η, удовлетворяющая условию

$$\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0\,.$$

Контактная форма η определяет вполне неголономное $2n$-мерное распределение $H=\ker\eta$, которое называется контактной структурой на $M$. Гладкое многообразие, наделенное контактной структурой, называется контактным многообразием. Контактное распределение $H=\ker\eta$ называется первым фундаментальным распределением, или горизонтальным, а 1-мерное распределение $V=\ker d\eta$ – вторым фундаментальным распределением, или вертикальным. Существует единственное векторное поле $\xi\in V$, такое, что $\eta(\xi)=1$. Поле ξ называется характеристическим, или вектором Риба [11–12].

Параконтактной метрической структурой на контактном многообразии $M$ называется четвертка тензорных полей $(\eta,\xi,\varphi,g)$, где η – контактная форма, ξ – вектор Риба, $g$ – псевдориманова метрика, φ – структурный эндоморфизм модуля векторных полей на $M$. При этом требуется выполнение следующих условий [9]:

$$\varphi^2=id-\eta\otimes\xi\,; \tag{1}$$

$$d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y)\,; \tag{2}$$

$$g(\varphi X,\varphi Y)=-g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\,. \tag{3}$$

Кроме того, предполагается, что ограничение $J$ структурного эндоморфизма φ на контактное распределение $H$ определяет на $H$ паракомплексную структуру: $J^2=id$, собственные распределения которой $H^+$ и $H^-$, отвечающие собственным значениям ±1, имеют одинаковую размерность: $\dim H^+=\dim H^-=n$, а $g(JX,JY)=-g(X,Y)$ для векторных полей $X,Y\in H$. Ограничение псевдоримановой метрики $g$ на распределение $H$ имеет сигнатуру $(n, n)$. Нетрудно убедиться, что выполняются ещё и следующие равенства:

$$\eta(\xi)=1\,,\ \ d\eta(X,\xi)=0\,,\ \ \varphi(\xi)=0\,,\ \ \eta\circ\varphi=0\,,\ \ g(X,\xi)=\eta(X)\,. \tag{4}$$

Параконтактная метрическая структура называется $k$-контактной, если вектор Риба ξ является киллинговым. Нормальная параконтактная метрическая структура называется парасасакиевой. В работе [9] доказано, что параконтактная метрическая структура $(\eta,\xi,\varphi,g)$ является парасасакиевой тогда и только тогда, когда обращается в нуль следующий тензор:

$$[\varphi,\varphi](X,Y)-d\eta(X,Y)\xi=0\,, \tag{5}$$

где $$[\varphi,\varphi](X,Y)=\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса.

Если $M$ – группа Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные параконтактные метрические структуры. Параконтактная метрическая структура называется левоинвариантной, если левоинвариантны определяющие её тензорные поля $\eta, \xi, \varphi, g$ .

## 3. Парасасакиева структура на группе Гейзенберга

Среди групповых трехмерных многообразий Тёрстона имеется нильпотентная группа Ли вещественных матриц вида

$$Nil = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^3 .$$

Данную группу называют также группой Гейзенберга. Левые сдвиги на группе $Nil$ определяются следующими формулами:

$$\overline{x} = x + c_1, \quad \overline{y} = y + c_2, \quad \overline{z} = z + c_2 x + c_3. \tag{6}$$

Дифференцируя (6) по параметрам $c_1, c_2, c_3$, находим левоинвариантные векторные поля на $Nil$ – базис её алгебры Ли

$$X_1 = \partial_1, \ \ X_2 = \partial_2 + x\partial_3, \ \ X_3 = \partial_3, \tag{7}$$

где $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$ – естественный базис векторных полей на группе $Nil$.

В касательном пространстве единицы группы рассмотрим псевдоевклидову метрику

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$$

и сдвинем её в произвольную точку $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$. Так как $dx = d\overline{x}$, $dy = d\overline{y}$, $dz = d\overline{z} - c_2 d\overline{x}$ , то

$$ds^2 = d\overline{x}^2 - d\overline{y}^2 + \left(d\overline{z} - c_2 d\overline{x}\right)^2 .$$

Поскольку единица группы $e\,(0, 0, 0)$ сдвигается в точку $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, то $c_2 = \overline{y}$. Опуская черту над произвольной точкой, получаем следующую инвариантную псевдориманову метрику:

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 + \left(dz - y dx\right)^2 . \tag{8}$$

**Теорема 1.** На группе Гейзенберга существует единственная левоинвариантная параконтактная метрическая структура с псевдоримановой метрикой (8), инвариантная относительно группы движений, причем эта структура является парасасакиевой.

***Доказательство.*** Хорошо известно, что размерность группы движений трехмерного риманова или псевдориманова пространства с непостоянной кривизной не превосходит четырех. Чтобы выяснить, допускает ли метрика (8) кроме операторов сдвигов (7) и оператор вращения, необходимо проинтегрировать уравнения инвариантности (уравнения Киллинга)

$$X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} = 0.$$

Для метрики (8) общее решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$X^1 = c_4 y + c_1, \quad X^2 = c_4 x + c_2, \quad X^3 = c_2 x + \frac{1}{2} c_4 \left( x^2 + y^2 \right) + c_3,$$

где $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ – произвольные постоянные. Это означает, что размерность группы движений равна четырем, причем постоянным $c_1$, $c_2$, $c_3$ соответствуют левоинвариантные векторные поля (7), а постоянной $c_4$ – оператор вращения

$$X_4 = y\partial_1 + x\partial_2 + \frac{1}{2}\left( x^2 + y^2 \right)\partial_3. \tag{9}$$

Интегрируя уравнения левоинвариантности дифференциальной 1-формы

$$X_\alpha^p \partial_p \eta_i + \partial_i X_\alpha^p \eta_p = 0 \quad \alpha = \overline{1,4}$$

относительно векторных полей (7) и (9), находим, что $\eta = c(-ydx + dz)$, где $c = const \neq 0$. Так как $d\eta = cdx \wedge dy$ и $\eta \wedge d\eta = c^2 dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$, то форма $\eta$ является контактной, а поскольку $\eta$ и $c\eta$ определяют одну и ту же контактную структуру, то полагая $c = 1$, имеем искомую контактную форму

$$\eta = -ydx + dz\,. \tag{10}$$

Из условий $d\eta(X, \xi) = 0$ и $\eta(\xi) = 1$ следует, что векторное поле Риба имеет вид

$$\xi = \partial_3\,. \tag{11}$$

Структурный эндоморфизм $\varphi$ теперь однозначно определяется условием (2). Действительно, в координатах имеем

$$d\eta_{ij} = g_{ip}\varphi_j^p,$$

откуда

$$\varphi_j^k = g^{ks} d\eta_{sj}.$$

Так как

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{1+y^2} & \mathbf{0} & \mathbf{-y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-y} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad g^{ks} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{1+y^2} \end{pmatrix}, \quad d\eta_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

то

$$\varphi_j^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Условия (1) и (3) в координатах имеют вид

$$\varphi_p^k \varphi_i^p = \delta_i^k - \eta_i \xi^k,$$

$$g_{ps}\varphi_i^p \varphi_j^s = -g_{ij} + \eta_i \eta_j$$

и легко проверяются. Так как, очевидно, $L_\xi g = 0$, то параконтактная структура является $k$-контактной. Более того, данная структура является парасасакиевой. Действительно, условие (5) в координатах имеет вид

$$\varphi_i^p \partial_p \varphi_j^k - \varphi_j^p \partial_p \varphi_i^k + \varphi_p^k \partial_j \varphi_i^p - \varphi_p^k \partial_i \varphi_j^p - (d\eta)_{ij}\, \xi^k = 0,$$

и для параконтактной метрической структуры $(\eta, \xi, \varphi, g)$ (10) – (12) и (8) выполняется тождественно. ■

Так как группа движений псевдоримановой метрики (8) сохраняет контактную форму $\eta$, а следовательно, и $\xi$, то она сохраняет и эндоморфизм $\varphi$, т.е. группа движений является группой автоморфизмов парасасакиевой структуры.

## 4. Контактная метрическая связность

Линейная связность $\tilde{\nabla}$ называется контактной метрической связностью [13], если в этой связности контактная форма $\eta$ и метрический тензор $g$ ковариантно постоянны: $\tilde{\nabla}\eta = 0$, $\tilde{\nabla}g = 0$. Из $\tilde{\nabla}\eta = 0$ следует, что связность $\tilde{\nabla}$ необходимо имеет кручение, а из $\tilde{\nabla}g = 0$ следует, что ковариантный тензор деформации $T$ связности Леви-Чивиты $\nabla$ кососимметричен по последним двум аргументам. Если тензор $T$ кососимметричен по всем своим аргументам, то имеем связность с кососимметрическим кручением. В этом случае $T = \frac{1}{2}S$ и

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}S_{ij}^k,$$

где $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ – коэффициенты контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$, $\Gamma_{ij}^k$ – коэффициенты связности Леви-Чивиты, $S_{ij}^k$ – компоненты тензора кручения, а $S_{ijk} = S_{ij}^p g_{kp}$ – кососимметричны по всем индексам и, следовательно, определяют дифференциальную 3-форму – форму кручения.

**Теорема 2.** На группе Гейзенберга с левоинвариантной парасасакиевой структурой существует единственная контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением. Эта связность инвариантна относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры и определяется следующей формулой:

$$g\left(\tilde{\nabla}_X Y, Z\right) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z). \tag{13}$$

***Доказательство.*** Так как $g^{kp}\eta_p = \xi^k$ и $S_{ij}^k = S_{ijp}g^{kp}$, то условие ковариантного постоянства контактной формы в связности $\tilde{\nabla}$ примет вид

$$\tilde{\nabla}_i\eta_j = \partial_i\eta_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^k\eta_k = \partial_i\eta_j - \Gamma_{ij}^k\eta_k - \frac{1}{2}S_{ijk}\xi^k = 0, \tag{14}$$

где

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{y} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{y}^2 - \mathbf{1}) & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{y}^2 - \mathbf{1}) & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{y} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{y} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

– коэффициенты связности Леви-Чивиты псевдоримановой метрики (8). Если индексы $i, j$ принимают значения (1, 1), (2, 2), (3, 3), а также (1, 3) и (2, 3), то левая часть в (14) тождественно равна нулю. Если $i = 1$, $j = 2$ или $i = 2$, $j = 1$, то

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_{123} = 0 \text{ или } \frac{1}{2} + S_{213} = 0,$$

откуда следует, что

$$S_{123} = S_{231} = S_{312} = -S_{213} = -S_{321} = -S_{132} = 1.$$

Таким образом,

$$S = dx \wedge dy \wedge dz = (d\eta) \wedge \eta,$$

откуда следует, что связность $\widetilde{\nabla}$ определяется формулой (13). Так как в силу перестановочности внешнего дифференцирования и дифференцирования Ли, 2-форма $d\eta$ инвариантна относительно группы автоморфизмов, то инвариантен и тензор кручения и, следовательно, инвариантна и связность $\widetilde{\nabla}$. ■

Вычислительная формула для коэффициентов $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ контактной метрической связности $\widetilde{\nabla}$ имеет вид

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left( \partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij} + (d\eta \wedge \eta)_{ijp} \right).$$

Компоненты тензора кручения и связности $\widetilde{\nabla}$ определяются следующими матрицами:

$$S_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-y} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad S_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad S_{ij}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1+y^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-(1+y^2)} & \mathbf{0} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-y} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{y^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-y} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в связности $\widetilde{\nabla}$ все структурные тензоры парасасакиевой структуры ковариантно постоянны.

**Теорема 3.** Линейная связность $\widetilde{\nabla}$, определённая формулой (13), является контактной метрической связностью для любого парасасакиева многообразия.

***Доказательство.*** Так как связность $\widetilde{\nabla}$ имеет кососимметрическое кручение, то она является метрической. Известно (см., например, [11, 12]), что на контактном многообразии существует атлас Дарбу, в каждой карте которого контактная форма $\eta$ имеет вид

$$\eta = -x^{n+1} dx^1 - \ldots - x^{2n} dx^n + dx^m.$$

В координатах Дарбу

$$d\eta = dx^1 \wedge dx^{n+1} + \ldots + dx^n \wedge dx^{2n}, \quad \xi = \partial_m.$$

Найдем ковариантную производную от контактной формы

$$\widetilde{\nabla}_i\eta_j=\partial_i\eta_j-\widetilde{\Gamma}_{ij}^k\eta_k=\partial_i\eta_j-\frac{1}{2}g^{kp}\left(\partial_i g_{pj}+\partial_j g_{ip}-\partial_p g_{ij}\right)\eta_k-\frac{1}{2}S_{ijp}g^{pk}\eta_k=$$

$$=\partial_i\eta_j-\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{mj}+\partial_j g_{im}-\partial_m g_{ij}\right)-\frac{1}{2}S_{ijm}.$$

Так как $(d\eta\wedge\eta)_{ijm}=0$, а $\eta_m=1$, то $S_{ijm}=(d\eta)_{ij}$. Поскольку парасасакиева структура является $k$-контактной, то вектор $\xi$ является киллинговым и, следовательно, уравнения Киллинга

$$\xi^k\partial_k g_{ij}+\partial_i\xi^k g_{kj}+\partial_j\xi^k g_{ik}=0$$

обращаются в тождество, откуда следует, что $\partial_m g_{ij}=0$. Теперь ковариантная производная от формы $\eta$ примет вид

$$\widetilde{\nabla}_i\eta_j=\partial_i\eta_j-\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{mj}+\partial_j g_{im}\right)-\frac{1}{2}(d\eta)_{ij}.$$

Из условия (3) следует, что

$$g(X,Y)=-h(X,Y)+\eta(X)\eta(Y),$$

где $h(X,Y)=g(\varphi X,\varphi Y)$. Структурный эндоморфизм определяется условием (2), поэтому

$$h_{ij}=g_{sp}\varphi_i^s\varphi_j^p=g_{sp}g^{sl}(d\eta)_{li}\,g^{pk}(d\eta)_{ki}.$$

Но $(d\eta)_{im}=0$, тогда и $h_{im}=0$, следовательно,

$$g_{mj}=\eta_m\eta_j=\eta_j,\quad g_{im}=\eta_i\eta_m=\eta_i,$$

и

$$\widetilde{\nabla}_i\eta_j=\partial_i\eta_j-\frac{1}{2}\left(\partial_i\eta_j+\partial_j\eta_i\right)-\frac{1}{2}\left(\partial_i\eta_j-\partial_j\eta_i\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\partial_i\eta_j-\frac{1}{2}\partial_j\eta_i-\frac{1}{2}\partial_i\eta_j+\frac{1}{2}\partial_j\eta_i=0.\qquad\blacksquare$$

**Замечание 1.** Из доказательства данной теоремы следует, что связность $\widetilde{\nabla}$ является контактной метрической для любой $k$-контактной параконтактной метрической структуры.

### 5. Связность, согласованная с распределением. Геодезические

Пусть $M$ – гладкое $n$-мерное многообразие и $H$ – распределение на $M$, т.е. совокупность $\{H_p\}$ $r$-мерных подпространств касательных пространств $T_pM$, гладко зависящих от $p\in M$. *Линейную связность* $\nabla$ *назовём согласованной с распределением H, если через каждую точку p в каждом касательном направлении* $v_p\in H_p$ *проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H.* Такие геодезические назовём контактными геодезическими связности $\nabla$.

Пусть $g$ – (псевдо) риманова метрика на $M$, $\nabla$ – связность Леви-Чивиты. Ортогональная проекция $\overline{\nabla}$ связности $\nabla$ на распределение $H$ называется усеченной связностью [1, 2]. В неголономной механике считается, что механическая система с лагранжианом $L$ и неголономным распределением $H$ на конфигурационном пространстве движется по траектории, которая, вообще говоря, не является решением вариационной задачи на минимум. В [1] доказано, что траектории движения такой системы с квадратичным лагранжианом являются геодезическими усеченной связности.

**Теорема 4.** На группе Гейзенберга, наделенной парасасакиевой структурой $(\eta,\xi,\varphi,g)$, связность Леви-Чивиты $\nabla$ является связностью, согласованной с контактным распределением $H=\ker\eta$, а её контактные геодезические совпадают с геодезическими усечённой связности $\overline{\nabla}$.

***Доказательство.*** Рассмотрим неголономное поле реперов $\{p,e_i\}$, адаптированных к структуре почти произведения $H\oplus V$:

$$e_1=\partial_1+y\partial_3\,,\quad e_2=\partial_2\,,\quad e_3=\partial_3\,,$$

где первые два векторных поля $e_1,\ e_2$ принадлежат контактному распределению *H*, а $e_3=\xi$ принадлежит распределению *V*. Разложения коммутаторов координатных векторных полей

$$\left[e_i,e_j\right]=\Omega_{ij}^k e_k$$

являются структурными уравнениями поля реперов $\{p,e_i\}$, а коэффициенты разложения $\Omega_{ij}^k$ определяют объект неголономности. Для рассматриваемого поля реперов имеем

$$[e_1,e_2]=-e_3,\quad [e_1,e_3]=0,\quad [e_2,e_3]=0.$$

Таким образом, $\Omega_{12}^3=-\Omega_{21}^3=-1,$ остальные компоненты равны нулю. Дуальный реперу $\{p,e_i\}$ корепер $\{p,\theta^j\}$ определяется условием $\theta^j(e_i)=\delta_i^j$, откуда следует, что

$$\theta^1=dx\,,\quad \theta^2=dy\,,\quad \theta^3=-ydx+dz\,.$$

Репер $\{p,e_i\}$ является ортонормированным относительно псевдоримановой метрики (8): $e_i\cdot e_j=0,\quad e_1^2=1,\quad e_2^2=-1,\quad e_3^2=1,$ поэтому в этом репере метрика (8) имеет стандартный вид

$$g(X,X)={X^1}^2-{X^2}^2+{X^3}^2,$$

где $X^i$ – неголономные координаты вектора $X=X^ie_i$.

Вычислим неголономные коэффициенты $\gamma_{ij}^k$ связности Леви-Чивиты $\nabla$: $\nabla_{e_i}e_j=\gamma_{ij}^ke_k$. Применяя известную вычислительную формулу (см., например, [14]), находим, что

$$\gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\delta^{ks}\left(\Omega_{ij}^l\delta_{sl}+\Omega_{si}^l\delta_{jl}+\Omega_{sj}^l\delta_{il}\right),$$

где $\delta_{ij}=\delta^{ij}=0$, если $i\neq j$, $\delta^{11}=\delta^{33}=\delta_{11}=\delta_{33}=1$, а $\delta^{22}=\delta_{22}=-1$. Имеем следующие ненулевые коэффициенты связности $\nabla$:

$$\gamma_{23}^{1}=\gamma_{32}^{1}=-\frac{1}{2},\quad \gamma_{13}^{2}=\gamma_{31}^{2}=-\frac{1}{2},\quad \gamma_{12}^{3}=-\gamma_{21}^{3}=-\frac{1}{2}.$$

Ортогональная проекция связности $\nabla$ на контактное распределение, т.е. усечённая связность $\overline{\nabla}$ определяется коэффициентами $\overline{\gamma}_{ij}^{k}$ : $\overline{\nabla}_{e_i}e_j=\overline{\gamma}_{ij}^{k}e_k$, где $\overline{\gamma}_{ij}^{k}=\gamma_{ij}^{k}$ ($i,j,k=1,2$), поэтому $\overline{\nabla}_{e_i}e_j=0$. Горизонтальная кривая $\gamma$: $x^i=x^i(s)$ ($x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $s$ – естественный параметр) называется горизонтальной геодезической, если она является геодезической относительно усечённой связности $\overline{\nabla}$ : $\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$, где $\dot\gamma$ – поле касательных векторов кривой $\gamma$. Пусть $\dot{x}^i\left(i=\overline{1,3}\right)$ – естественные координаты поля $\dot\gamma$ : $\dot\gamma=\dot{x}^i\partial_i$, а $v^i\left(i=1,2\right)$ – неголономные координаты поля $\dot\gamma$ в базисе $\{e_1,e_2\}$ : $\dot\gamma=v^ie_i$. Так как

$$\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma=v^i\overline{\nabla}_{e_i}\left(v^ke_k\right)=v^ie_i\left(v^k\right)e_k+v^iv^k\overline{\nabla}_{e_i}e_k=v^ie_i\left(v^k\right)e_k,$$

то уравнения геодезических примут вид

$$v^ie_i\left(v^k\right)=0. \tag{15}$$

Переписав уравнения (15) в естественных координатах, получим дифференциальные уравнения геодезических усечённой связности $\overline{\nabla}$ :

$$\frac{d^2x}{ds^2}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}=0,\quad \frac{dz}{ds}=y\frac{dx}{ds}. \tag{16}$$

Интегрируя уравнения (16), находим параметрические уравнения геодезических

$$x=a_1s+b_1,\quad y=a_2s+b_2,\quad z=\frac{1}{2}a_1a_2s^2+a_1b_2s+b_3. \tag{17}$$

Дифференциальные уравнения геодезических связности Леви-Чивиты имеют вид

$$\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}=0,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}+y\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds}=0,$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}+\left(y^2-1\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-y\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}=0.$$

Для контактных геодезических $\frac{dz}{ds}=y\frac{dx}{ds}$, поэтому они определяются следующей системой:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}=0,\quad \frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0,$$

откуда $$x=a_1s+b_1,\quad y=a_2s+b_2,\quad z=\frac{1}{2}a_1a_2s+a_3s+b_3.$$

Но $\dfrac{dz}{ds} = a_1 a_2 s + a_3 = (a_2 s + b_2) a_1$, поэтому $a_3 = a_1 b_2$, и, следовательно, контактные геодезические связности $\nabla$ совпадают с геодезическими усеченной связности $\overline{\nabla}$. ■

**Замечание 2.** Контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением имеет такие геодезические, что и связность Леви-Чивиты $\nabla$. Оказывается, что и проекции связностей $\nabla$ и $\tilde{\nabla}$ совпадают. Действительно, так как

$$d\eta \wedge \eta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3,$$

то имеем следующие ненулевые компоненты $\tilde{S}_{ij}^k = \delta^{ks} \tilde{S}_{ijs}$ $\left(\delta^{22} = -1\right)$ тензора кручения $\tilde{S}$:

$$\tilde{S}_{12}^3 = \tilde{S}_{23}^1 = -\tilde{S}_{31}^2 = 1, \;\; \tilde{S}_{21}^3 = \tilde{S}_{32}^1 = -\tilde{S}_{13}^2 = -1.$$

Так как $\tilde{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ij}^k + \dfrac{1}{2}\tilde{S}_{ij}^k$, то $\tilde{\gamma}_{31}^2 = \tilde{\gamma}_{32}^1 = -1$, остальные нули, то $\overline{\overline{\tilde{\nabla}}}_{e_i} e_j = 0 \;\; (i, j = 1, 2)$, т.е. $\overline{\nabla} = \overline{\overline{\tilde{\nabla}}}$. Таким образом, контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ также согласована с контактным распределением, и её контактные геодезические совпадают с геодезическими усеченной связности $\overline{\nabla} = \overline{\overline{\tilde{\nabla}}}$. Заметим, что $\tilde{\nabla}\eta = 0$, а $\nabla\eta \neq 0$.

Примером связности, несогласованной с контактным распределением, может служить полусимметрическая связность, определенная контактной формой (10) и метрическим тензором (8).

При исследовании строения контактных геодезических, в силу левоинвариантности парасасакиевой структуры и связности $\nabla$, можно ограничиться геодезическими, выходящими из единицы группы

$$x = a_1 s, \quad y = a_2 s, \quad z = \frac{1}{2} a_1 a_2 s. \tag{18}$$

Кроме того, мы отождествим группу Гейзенберга *Nil* с $\mathbf{R}^3$, поставив в соответствие каждой матрице из *Nil* с определяющими элементами $x, y, z$ точку $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, при этом ортонормированному реперу $\{p, e_1, e_2, e_3\}$ в единице группы будет соответствовать репер $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в $\mathbf{R}^3$, где $O = (0,0,0)$, $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$. Этот репер является ортонормированным относительно стандартной евклидовой метрики $\rho_E$ в $\mathbf{R}^3$. Контактной плоскости в единице группы соответствует координатная плоскость $Oxy$. Единичный вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ этой плоскости определяет направление геодезической. Обозначим направленный угол между $\mathbf{i}$ и $\mathbf{a}$ через $\theta$. Тогда уравнения геодезических (18) примут вид

$$x = s\cos\theta, \quad y = s\sin\theta, \quad z = \frac{1}{2} s^2 \cos\theta \sin\theta. \tag{19}$$

Если $\cos\theta \sin\theta \neq 0$, первые два уравнения (19) в плоскости *Oxy* определяют прямую *l* с направляющим вектором $\mathbf{a}$, а третье уравнение – параболу в плоскости *Olz*. Если $\cos\theta \sin\theta = 0$, то при $\sin\theta = 0$ геодезической является ось *Ox*, если $\cos\theta = 0$, то ось *Oy*. При малых $\theta$ $\sin\theta \to 0$, коэффициент $\cos\theta \sin\theta > 0$ мал и ветви параболы расположены в подпространстве $z \geq 0$ и парабола мало отличается от прямой *Ox*. С возрастанием $\theta$ это различие растёт и при $\theta = \frac{\pi}{4}$ достигает своего максимума. При $\theta > \frac{\pi}{4}$ происходит «распрямление» параболы и при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\cos\theta = 0$ парабола «превращается» в прямую *Oy*. При $\theta > \frac{\pi}{2}$ ветви параболы «опускаются вниз» $(z \leq 0)$. С увеличением $\theta$ парабола становится «круче», достигает своего максимума при $\theta = \frac{3\pi}{4}$, затем опять распрямляется и становится прямой *Ox* при $\theta = \pi$. Далее ветви параболы опять поднимаются вверх. В третьем координатном угле $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ имеем те же параболы, что и в первом $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, а в четвертом $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$ те же самые что и во втором $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, т.е. направления **a** и **-a** определяют одну и ту же геодезическую. Заметим, что ортогональные проекции парабол на соответствующие контактные плоскости являются прямыми линиями.

Ограничение псевдоримановой метрики (8) на контактное распределение является псевдоевклидовой метрикой

$$ds^2\Big|_H = dx^2 - dy^2 . \tag{20}$$

В контактной плоскости *Oxy* направления $y = \pm x$ являются изотропными относительно метрики (20). Именно геодезическая в изотропном направлении имеет максимальное отклонение от прямой линии.

**Замечание 3.** Результаты данной работы справедливы и для многомерной группы Гейзенберга [6–8]

$$Nil = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{t}} & \mathbf{E_n} & \mathbf{x^t} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{x^t} = \left(\mathbf{x^1} \quad \mathbf{...} \quad \mathbf{x^n}\right)^{\mathbf{t}}$, $\mathbf{y} = \left(\mathbf{x^{n+1}} \quad \mathbf{...} \quad \mathbf{x^{2n}}\right)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{...} \quad \mathbf{0}) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{E_n}$ – единичная матрица размера $n \times n$. Структурные тензоры $(\eta, \xi, \varphi, g)$ парасасакиевой метрической структуры на *Nil* имеют следующий вид

$$\eta = -x^{n+1}dx^1 - \ldots - x^{2n}dx^n + dx^m, \quad \xi = \partial_m,$$

$$ds^2 = dx^{1^2} + \ldots + dx^{n^2} - dx^{(n+1)^2} - \ldots - dx^{(2n)^2} + \left(-x^{n+1}dx^1 - \ldots - x^{2n}dx^n + dx^m\right)^2,$$

$$\varphi_j^k = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E_n^*} & \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{t}} \\ \mathbf{E_n^*} & \mathbf{O} & \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{t}} \\ \boldsymbol{\theta} & \mathbf{y}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix}\mathbf{x}^{2n} & \ldots & \mathbf{x}^{n+1}\end{pmatrix}$, $\mathbf{O}$ – нулевая $n \times n$-матрица, $\mathbf{E}_\mathbf{n}^*$ – $n \times n$-матрица, ненулевыми элементами которой являются единицы по побочной диагонали. Аналогичное поведение геодезических мы наблюдем и в многомерном случае. Если допустимые направления лежат в координатных плоскостях $(e_\alpha, e_{n+\alpha})$, $\alpha \in \overline{1,n}$, то геодезические ведут себя так же, как и в трехмерном случае. Все координатные прямые репера $\{O, e_i\}$, $i \in \overline{1,2n}$ являются геодезическими. Кроме того, все прямые, лежащие в координатных плоскостях, отличных от $(e_\alpha, e_{n+\alpha})$, также являются геодезическими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вершик А.М.*, *Фадеев Л.Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. Л.: Издательство ЛГУ, 1975. С. 129–141.
2. *Вершик А.М.*, *Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85.
3. *Сачков Ю.Л.* Теория управления на группах Ли // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 5–59. DOI: 10.1007/s10958-008-9275-0.
4. *Agrachev A.*, *Barilari D.*, *Boscain U.* Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry. Trieste, Italy: SISSA, 2012. 179 p.
5. *Alvarez M.A.*, *Rodríguez-Vallarte M.C.*, *Salgado G.* Contact nilpotent Lie algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. 2017. V. 145. No. 4. P. 1467–1474. DOI: 10.1090/proc/13341.
6. *Gonzalez J.C.*, *Chinea D.* Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group H(p,1) // Proceedings of the American Mathematical Society. 1989. V. 105. No. 1. P. 173–184. DOI: 10.1090/S0002-9939-1989-0973843-9.
7. *Binz E.*, *Pods S.* The Geometry of Heisenberg Groups: Mathematical Surveys and Monographs (V. 151). Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2008. 321 p.
8. *Boyer C.P.* The Sasakian geometry of the Heisenberg group // Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie. 2009. V. 52. No. 3. P. 251–262.
9. *Смоленцев Н.К.* Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
10. *Смоленцев Н.К.*, *Шагабудинова И.Ю.* О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 37–52. DOI: 10.17223/19988621/69/4.
11. *Blair D.E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976. 148 p. DOI: 10.1007/BFb0079307.
12. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.
13. *Panzhensky V.I.*, *Klimova T.R.* Contact metric connection on the Heisenberg group // Russian Mathematics. 2018. V. 62. No. 11. P. 45–52. DOI: 10.3103/S1066369X18110051.
14. *Громол Д.*, *Клингенберг В.*, *Мейер В.* Риманова геометрия в целом / пер. с нем. Ю.Д. Бураго; под ред. и с доп. В.А. Топоногова. М.: Мир, 1971. 343 с.

Статья поступила 11.08.2021

Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. (2022) LEFT-INVARIANT PARA-SASAKIAN STRUCTURE ON THE HEISENBERG GROUP. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 38–51

DOI 10.17223/19988621/75/4

Keywords: paracontact structure, contact metric connection, connection compatible with a distribution, truncated connection.

Among the eight three-dimensional Thurston geometries, there is the Heisenberg group, the nilpotent Lie group of real 3×3 matrices of a special form. It is known that this group has a left-invariant Sasakian structure. This article proves that there is also a paracontact metric structure on the Heisenberg group, which is also Sasakian. This group has a unique contact metric connection with skew-symmetric torsion, which is invariant under the group of automorphisms of the para-Sasakian structure. The discovered connection is proved to be a contact metric connection for any para-Sasakian structure. The concept of a connection compatible with the distribution is introduced. It is found that the Levi-Civita connection and the contact metric connection on the Heisenberg group endowed with a para-Sasakian structure are compatible with the contact distribution. Their orthogonal projections on this distribution determine the same truncated connection. It is proved that Levi-Civita contact geodesics and truncated geodesics coincide. It is found that contact geodesics are either straight lines lying in the contact planes or parabolas the orthogonal projections of which on the contact planes are straight lines. The results obtained in this article are also valid for the multidimensional Heisenberg group.

AMS Mathematical Subject Classification: 53D10, 53C50

*Vladimir I. PAN'ZHENSKII* (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, prof., Head of the Department "Mathematical Education", Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: kaf-geom@yandex.ru

*Anastasia O. RASTREPINA* (senior laboratory assistant of the Department "Mathematical Education" Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: n.rastrepina@mail.ru

REFERENCES

1. Vershik A.M., Faddeev L.D. (1975) Lagranzheva mekhanika v invariantnom izlozhenii [Lagrangian mechanics in invariant form]. *Problemy teoreticheskoy fiziki – Problems of Theoretical Physics*. pp. 129–141.
2. Vershik A.M., Gershkovich V.Ya. (1987) Negolonomnyye dinamicheskiye sistemy. Geometriya raspredeleniy i variatsionnyye zadachi [Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems]. *Itogi Nauki i Tekhniki*. 16. pp. 5–85. Moscow: VINITI.
3. Sachkov Y.L. (2009) Control theory on Lie groups. *Journal of Mathematical Sciences*. 156(3). 381–439. DOI: 10.1007/s10958-008-9275-0.
4. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. (2012) *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*. Trieste: SISSA.
5. Alvarez M.A., Rodríguez-Vallarte M.C., Salgado G. (2017) Contact nilpotent Lie algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 145(4). pp. 1467–1474. DOI: 10.1090/proc/13341.
6. Gonzalez J.C., Chinea D. (1989) Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group H(p,1). *Proceedings of the American Mathematical Society*. 105(1). pp. 173–184. DOI: 10.1090/S0002-9939-1989-0973843-9.
7. Binz E., Pods S. (2008) *The Geometry of Heisenberg Groups: Mathematical Surveys and Monographs* (*V. 151*). Providence, R.I.: American Mathematical Society.
8. Boyer C.P. (2009) The Sasakian geometry of the Heisenberg group. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*. 52(3). pp. 251–262.

9. Smolentsev N.K. (2019) Levoinvariantnyye para-sasakiyevy struktury na gruppakh Li [Left-invariant para-Sasakian structures on Lie groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
10. Smolentsev N.K., Shagabudinova, I.Y. (2021) O parasasakiyevykh strukturakh na pyatimernykh algebrakh Li [On parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 37–52. DOI: 10.17223/19988621/69/4.
11. Blair D.E. (1976) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BFb0079307.
12. Kirichenko V.F. (2013) *Differentsial'no-geometricheskiye struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa: Pechatnyi Dom.
13. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. (2018) The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russian Mathematics*. 62(11). pp. 45–52. DOI: 10.3103/S1066369X18110051.
14. Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W. (1971) Rimanova geometriya v tselom [Global Riemannian Geometry]. Moscow: Mir.

Received: August 11, 2021