

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/58/6

**ММ-оценка параметра равномерного распределения длительности
непродлевающегося случайного мертвого времени в полусинхронном
потоке событий в особом случае****Александр Михайлович Горцев¹, Анна Васильевна Веткина²**^{1, 2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *a-gortsev@mail.ru*² *anyavetkina@stud.tsu.ru*

Аннотация. Исследуется полусинхронный поток событий, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке $[0, T^*]$. Рассматривается особый случай, когда на параметры потока накладываются ограничения. Производится оценивание параметра T^* равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени методом моментов. Приводятся результаты статистических экспериментов, показывающие адекватность полученных оценок.

Ключевые слова: полусинхронный поток событий; непродлевающееся случайное мертвое время; равномерное распределение; оценка параметра; метод моментов

Для цитирования: Горцев А.М., Веткина А.В. ММ-оценка параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в полусинхронном потоке событий в особом случае // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 58–70. doi: 10.17223/19988605/58/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/6

**ММ-estimation of the parameter of the uniform distribution
of the duration of unextendable random dead time
in the semi-synchronous events flow in the special case****Alexander M. Gortsev¹, Anna V. Vetkina²**^{1, 2} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*¹ *a-gortsev@mail.ru*² *anyavetkina@stud.tsu.ru*

Abstract. The paper describes semi-synchronous events flow that is a common mathematical model of information flows of messages operating in telecommunication and information-computing networks, and that belongs to the class of doubly stochastic event flows. A special case is considered when restrictions are imposed on the flow

parameters. The functioning of the flow is considered under the conditions of a random unextendable dead time distributed according to a uniform law on the interval $[0, T^*]$. Parameter T^* of the dead time is estimated using the method of moments. The results of statistical experiments are presented.

Mathematical expectation of the duration of τ is the interval between adjacent events of the observed flow is defined by the formula

$$M(\tau | T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_1}{T^*} \left(\frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_1(x) dx d\tau +$$

$$+ \frac{1}{T^* (p\lambda_1 + \alpha_2)} \left(\frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_2(x) dx d\tau - \left(\frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-\lambda_1 T^*} \left(1 + \lambda_1 T^* + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_1(x) dx +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2} \left(\frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) e^{-\lambda_1 T^*} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_2(x) dx,$$

where $g_1(x) = x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}} / ((1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x)$, $g_2(x) = x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}} \ln x / ((1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x)$.

The estimate $\hat{T}^*$ is found numerically from the equation of moments $M(\tau | T^*) = C_1$, $C_1 = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$, where $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ are moments of occurrence of events in the observed flow. Value of C_1 is found using simulation modeling of the observed flow. Analysis of the numerical results shows that in the sense of the introduced criterion $\hat{V}(\hat{T}^*)$ (sample variance of the estimate $\hat{T}^*$), an increase of the parameter T^* has a negative effect on the quality of estimates $\hat{T}^*$, that is quite natural: increasing the parameter T^* leads to an increase in the number of lost events of the initial flow.

According to the results of the research, there are the following conclusions: 1) it is shown analytically that the equation of moments has a unique solution; 2) the results of simulation modelling show that the quality of the estimates in the sense of the introduced criterion (sample variance of the estimate $\hat{T}^*$) is quite satisfactory.

Keywords: semi-synchronous events flow; unextendable random dead time; uniform distribution; estimation of the parameter; method of moments

For citation: Gortsev, A.M., Vetkina, A.V. (2022) MM-estimation of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable random dead time in the semi-synchronous events flow in the special case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 58–70. doi: 10.17223/19988605/58/6

В настоящее время, как показывает практика, наиболее адекватной математической моделью реальных информационных потоков запросов в телекоммуникационных сетях являются дважды стохастические потоки событий – потоки, у которых случайными являются и моменты наступления событий, и интенсивность потока. В общем случае дважды стохастические потоки событий являются коррелированными потоками. В связи с этим исследование различных разновидностей дважды стохастических потоков являлось и является важной актуальной задачей.

Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [1, 2]; второй – потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Последние, в зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, делятся на три типа: 1) синхронные потоки (потоки, у которых состояние интенсивности меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [3–5]; 2) асинхронные потоки (потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [6–8]; 3) полусинхронные потоки (потоки, у которых одна часть состояний интенсивности меняется в моменты наступления событий потока, другая часть состояний интенсивности меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [9–11].

В реальных ситуациях часто приходится иметь дело с потоками, у которых не все события доступны наблюдению. Как правило, причиной ненаблюдаемости служит так называемое мертвое время регистрирующих приборов [12], порожденное зарегистрированным событием, в течение которого

другие события, наступившие в этот период, недоступны наблюдению (теряются). Регистрирующие приборы делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем и продлевающимся. Кроме того, длительность мертвого времени может быть как детерминированной величиной, одинаковой для всех событий [13], так и случайной с тем или иным законом распределения [14].

В этой связи можно считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении различного рода задач оценивания, по измерениям моментов наступления наблюдаемых событий исходного дважды стохастического потока (часть событий исходного потока не наблюдается (теряется)). В настоящей статье в качестве искажающего фактора рассматривается непродлевающееся случайное мертвое время.

В данной работе исследуется полусинхронный дважды стохастический поток событий с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным случайным процессом с двумя состояниями, параметры которого связаны определенным условием, так что рассматривается особый случай функционирования потока. В общем случае поток был исследован в работе [15]. Производится оценивание параметра длительности случайного мертвого времени. Для этого выводится аналитическая формула математического ожидания длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока и находится оценка параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени с использованием уравнения моментов. С помощью построенной имитационной модели наблюдаемого потока реализуются статистические эксперименты для получения численных результатов оценивания.

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2 . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока) S_1 , если $\lambda(t) = \lambda_1$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока) S_2 , если $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Если имеет место первое состояние процесса S_1 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1 . Если имеет место второе состояние процесса S_2 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2 . Переход из состояния S_1 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_2 возможен только в момент наступления события (свойство синхронности потока), при этом этот переход осуществляется с вероятностью p (с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1). Переход из состояния S_2 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_1 может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события (свойство асинхронности потока). При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$, где α_2 – интенсивность смены состояния S_2 на S_1 . Так как переход из второго состояния в первое не привязан к моменту наступления события во втором состоянии, то поток называется полусинхронным дважды стохастическим потоком событий. Рассматривается особый случай, когда введенные выше параметры связаны условием $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс ($\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс; наблюдаемыми являются только моменты наступления событий потока).

После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени, недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности $p(T) = 1/T^*$, где T – значение длительности мертвого времени, $0 \leq T \leq T^*$.

Возможный вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1 и S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; временная ось $(0, t)$ – ось моментов наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1, t_2, \dots$; временная ось $(0, t^{(1)})$ – ось наступления событий в моменты времени $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$ в первом (S_1) состоянии процесса $\lambda(t)$, на которой также указаны значения длительностей $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$ мертвых времен, порождаемых наблюдаемыми событиями потока; аналогично для временной оси $(0, t^{(2)})$; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – ненаблюдаемые, штриховкой – периоды мертвого времени; траектория процесса $\lambda(t)$ привязана к временной оси $(0, t^{(1)})$.

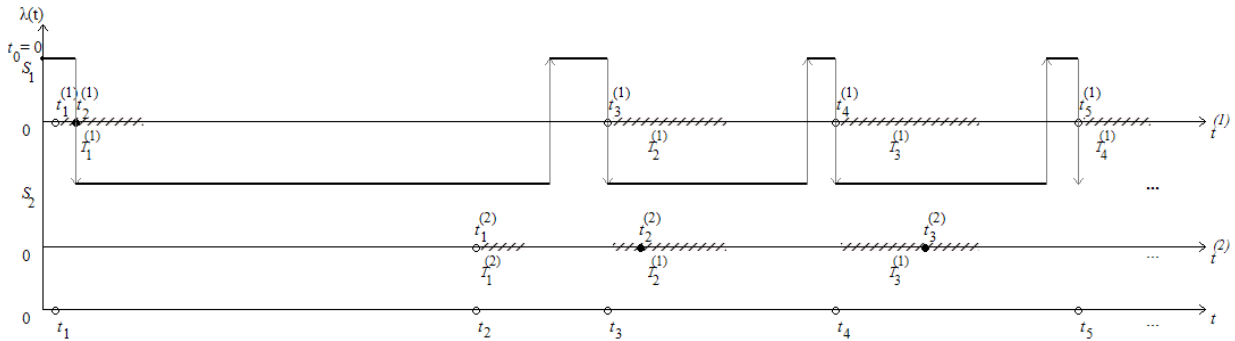


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий
Fig. 1. Formation of the observed event flow

Отметим, что в работе рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока, т.е. аналитические формулы получены для случая, при котором поток функционирует бесконечно долго ($t \rightarrow \infty$).

Цели данной работы:

- 1) На основании выборки моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_n$ на временном интервале $(0, T_m)$, где T_m – время наблюдения за потоком ($t_n < T_m$), оценить параметр равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени T^* .
- 2) Исследовать оценку $\hat{T}^*$. Для этого провести статистические эксперименты на имитационной модели наблюдаемого потока, устанавливающие стационарный режим и определяющие свойства полученной оценки.

2. Уравнение моментов для оценивания параметра T^*

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k \geq 0$). Так как рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k , т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$.

Для оценки неизвестного параметра T^* используется метод моментов [16]. Для этого находится теоретический момент – математическое ожидание случайной величины τ (длительность интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке) $M(\tau | T^*)$, после чего ММ-оценка параметра T^* находится численно из уравнения моментов $M(\tau | T^*) = C$, где C – выборочное среднее, $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k > 0$, являющееся оценкой математического ожидания $M(\tau | T^*)$.

В статье [10] приводится выражение для плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном полусинхронном потоке, функционирующем

в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T для случая $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$:

$$\begin{aligned} p(\tau|T) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \left[\lambda_1 - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - \lambda_1(\tau - T)) \right] e^{-\lambda_1(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \\ \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \pi_2(T) &= \frac{\lambda_1 p}{\alpha_2 + \lambda_1 p} - \left[\frac{\lambda_1 p}{\alpha_2 + \lambda_1 p} - \pi_2(0|T) \right] e^{-(\alpha_2 + \lambda_1 p)T}, \\ \pi_2(0|T) &= \frac{p\lambda_1 + \lambda_2 \pi_2(1-p) \left[1 - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1 p)T} \right]}{\lambda_1 - (1-p)\lambda_2 e^{-(\alpha_2 + \lambda_1 p)T}}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1 p}{\lambda_1 p + \alpha_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

π_2 – априорная финальная вероятность состояния S_2 процесса $\lambda(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Подчеркнем, что внесение непродлевающегося случайного мертвого времени в математическую модель полусинхронного потока событий может только изменить (в меньшую или большую сторону) корреляцию в потоке по сравнению с ситуацией отсутствия мертвого времени ($T^* = 0$) либо с ситуацией наличия детерминированного мертвого времени ($T > 0$), но не устранить ее полностью.

Тогда искомая плотность вероятности $p(\tau)$ примет вид

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(\tau, T) dT = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT,$$

где $p(\tau, T)$ – совместная плотность вероятности значений τ и T ; условная плотность вероятности $p(\tau|T)$ определена выражением (1); равномерная плотность $p(T)$ определена в разд. 1; (T) – область интегрирования значений случайной величины – длительности непродлевающегося случайного мертвого времени.

Возможны два варианта расположения значений величины τ ($\tau \geq 0$) относительно значения параметра T^* : 1) $0 < T < \tau < T^*$; 2) $0 < T < T^* \leq \tau$. В соответствии с этими вариантами в системе координат (τ, T) определяется область (T) , точки которой удовлетворяют неравенствам: 1) $\tau > T > 0$, $\tau < T^*$, $T^* \geq T$; 2) $\tau > T > 0$, $\tau \geq T^*$, $T^* \geq T$. Отсюда следует, что операция интегрирования по переменной T выполняется для двух областей – (T_1) , где $0 \leq \tau < T^*$, и (T_2) , где $\tau \geq T^*$: $(T) = (T_1) \cup (T_2)$.

Тогда выражение для плотности $p(\tau)$ примет следующий вид:

$$p(\tau) = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^\tau p(T) p(\tau|T) dT, & 0 \leq \tau < T^*, \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T) p(\tau|T) dT, & \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражение (1) в (2) и учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, $0 \leq T < T^*$, находим

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - (1 + \alpha_2 \pi_2 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{p \alpha_2^2 \pi_2}{p \lambda_1 + \alpha_2} (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) \tau}} g_1(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p \lambda_1 \alpha_2^2 \pi_2}{(p \lambda_1 + \alpha_2)^2} e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) \tau}} g_2(x) dx \right\}, \quad 0 \leq \tau < T^*, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} p_2(\tau) &= \frac{e^{-\lambda_1 \tau}}{T^*} \left\{ - (1 + \alpha_2 \pi_2 \tau) + (1 + \alpha_2 \pi_2 \tau - \alpha_2 \pi_2 T^*) e^{\lambda_1 T^*} + \frac{p \alpha_2^2 \pi_2}{p \lambda_1 + \alpha_2} (1 - \lambda_1 \tau) \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) T^*}} g_1(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p \lambda_1 \alpha_2^2 \pi_2}{(p \lambda_1 + \alpha_2)^2} \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) T^*}} g_2(x) dx \right\}, \quad \tau \geq T^*, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } g_1(x) = \frac{x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}}}{(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x}, \quad g_2(x) = \frac{x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}} \ln x}{(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x}.$$

Отметим, что в точке $\tau = T^*$ имеет место равенство двух плотностей $p_1(T^*) = p_2(T^*)$ и неравенство их производных $p_1'(T^*) \neq p_2'(T^*)$, т.е. функция $p(\tau)$, задаваемая формулой (2), где $p_1(\tau)$ определяется формулой (3), $p_2(\tau)$ – формулой (4), есть непрерывная функция и в точке $\tau = T^*$ имеет излом.

По определению математического ожидания случайной величины τ – длительности интервала между двумя соседними событиями наблюдаемого потока – с учетом формулы (2) имеем

$M(\tau | T^*) = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau$. Подставляя сюда плотности вероятности $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, определенные в (3), (4), находим

$$\begin{aligned} M(\tau | T^*) = & \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_1}{T^*} \left(\frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_1(x) dx d\tau + \\ & + \frac{1}{T^* (p\lambda_1 + \alpha_2)} \left(\frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_2(x) dx d\tau - \\ & - \left(\frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-\lambda_1 T^*} \left(1 + \lambda_1 T^* + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_1(x) dx + \\ & + \frac{\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2} \left(\frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) e^{-\lambda_1 T^*} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_2(x) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где $g_i(x)$, $i=1,2$, определены в (3), (4).

Отметим, что интегралы, входящие в (5), в элементарных функциях не выражаются.

Теорема. Математическое ожидание $M(\tau | T^*)$, определяемое формулой (5), является возрастающей функцией переменной (параметра) T^* ($T^* \geq 0$).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $T^* = 0$, означающий, что непродлевающееся случайное мертвое время в полусинхронном потоке событий отсутствует. Полагая в (5) $T^* = 0$, получаем

$$\begin{aligned} M(\tau | T^* = 0) = & \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} + \lambda_1 \left(\frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ \left(1/T^* \right) \int_0^{T^*} \tau (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_1(x) dx d\tau \right\} + \\ & + \frac{1}{(p\lambda_1 + \alpha_2)} \left(\frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ \left(1/T^* \right) \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_2(x) dx d\tau \right\} - \\ & - \left(\frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ e^{-\lambda_1 T^*} \left(1 + \lambda_1 T^* + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \times \right. \\ & \times \left. \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_1(x) dx \right\} + \frac{\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2} \left(\frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ e^{-\lambda_1 T^*} \left(1 + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_2(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) в выражениях в фигурных скобках при $T^* \rightarrow 0$ имеют место неопределенности $0/0$, раскрывая которые, находим

$$M(\tau | T^* = 0) = (p\lambda_1 + \alpha_2) / \lambda_1 (p\lambda_2 + \alpha_2) > 0. \quad (7)$$

Рассмотрим производную математического ожидания $M(\tau | T^*)$ по T^* . Используя выражение (5), получаем

$$M'(\tau|T^*) = \frac{1}{T^*} \left\{ T^* + \frac{p\lambda_1 + (1+p)\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} - M(\tau|T^*) - \frac{(p\alpha_2)^2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)[(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 e^{(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*}]} \right\}, \quad (8)$$

где $M(\tau|T^*)$ определено выражением (5).

Сначала найдем $\lim_{T^* \rightarrow 0} M'(\tau|T^*)$. Раскрывая в (8) неопределенности $0/0$, возникающие при $T^* \rightarrow 0$, и производя необходимые преобразования, находим

$$M'(\tau|T^* = 0) = \lim_{T^* \rightarrow 0} M'(\tau|T^*) = \frac{[p\lambda_2 + \alpha_2(1+p)][p\lambda_2 + \alpha_2(1-p)]}{2(p\lambda_2 + \alpha_2)^2} > 0. \quad (9)$$

Запишем (8) в виде

$$M'(\tau|T^*) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{T^*} \right)^2 F(T^*) = \frac{(T^*)^2 + F(T^*)}{2(T^*)^2}, \quad (10)$$

$$F(T^*) = 2T^* \left\{ \frac{T^*}{2} + \frac{p\lambda_1 + (1+p)\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} - M(\tau|T^*) - \frac{(p\alpha_2)^2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)[(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 e^{(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*}]} \right\},$$

где $M(\tau|T^*)$ определено выражением (5).

Покажем, что производная математического ожидания (5) больше нуля: $M'(\tau|T^*) > 0$ для $T^* > 0$. Тогда $M'(\tau|T^*) > 0$ для $T^* \geq 0$, так как имеет место $M'(\tau|T^* = 0) > 0$ (формула (9)). Отсюда будет следовать, что математическое ожидание $M(\tau|T^*)$ есть возрастающая функция переменной (параметра) T^* ($T^* \geq 0$), и тем самым устанавливается утверждение теоремы.

Так как знаменатель в (10) больше нуля для $T^* > 0$, то рассмотрим числитель в (10): $\Psi(T^*) = (T^*)^2 + F(T^*)$, $T^* \geq 0$. Имеем $\Psi(T^* = 0) = 0$; $\lim_{T^* \rightarrow \infty} \Psi(T^*) = \infty$;

$$\Psi'(T^*) = 2T^* \left\{ 1 - \left[\frac{p\alpha_2}{\lambda_1 - (1-p)\lambda_2 e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*}} \right]^2 e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*} \right\}, \quad T^* > 0. \quad (11)$$

Нужно показать, что $\Psi'(T^*) > 0$ для $T^* > 0$. Тогда функция $\Psi(T^*)$ – возрастающая функция переменной (параметра) T^* (возрастает от нуля до бесконечности), т.е. $\Psi(T^*) > 0$ для $T^* > 0$, и тогда $M'(\tau|T^*) > 0$ для $T^* > 0$. Обозначим $h(T^*)$ – функция в фигурных скобках формулы (11). Тогда имеем

$$h(T^*) > 1 - \left(\frac{p\alpha_2}{p\lambda_2 + \alpha_2} \right)^2 = \frac{[p\lambda_2 + (1-p)\alpha_2][p\lambda_2 + (1+p)\alpha_2]}{(p\lambda_2 + \alpha_2)^2} > 0, \quad T^* > 0.$$

Таким образом, функция $h(T^*)$, $T^* > 0$, является положительной функцией: $h(T^*) > 0$, $T^* > 0$. Последнее, во-первых, доказывает, что $\Psi'(T^*) > 0$, $T^* > 0$, и, во-вторых, доказывает теорему.

Так как $M(\tau|T^*)$ – возрастающая функция переменной (параметра) T^* , $T^* > 0$, то уравнение моментов имеет единственное решение. Уравнение моментов может не иметь решения только в единственном случае, когда $C < (p\lambda_1 + \alpha_2) / \lambda_1(p\lambda_2 + \alpha_2)$ ($C < M(\tau|T^* = 0)$, формула (7)); тогда принимается $\hat{T}^* = 0$. Подчеркнем, что решение уравнения моментов возможно только численно.

3. Результаты статистических экспериментов для наблюдаемого потока в особом случае

С целью установления качества получаемых ММ-оценок $\hat{T}^*$ параметра T^* поставлены статистические эксперименты.

Первый статистический эксперимент (установление стационарного режима). Для параметров потока $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1,1$, $\alpha_2 = 0,9$, $p = 0,6$ и параметров точности $\varepsilon = 0,0001$, $\Delta T^* = 0,001$, получено 100 реализаций ($N = 100$) имитационной модели наблюдаемого потока и, соответственно, получено 100 решений уравнения моментов, для двух значений параметра $T^* = 1; 3$ и для каждого значения единиц времени моделирования $T_m = 50, 100, \dots, 1\,500$. На основании полученных данных вычислялось выборочное среднее искомой оценки $\hat{M}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i^*$ и ее выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i^* - T^*)^2$, где T^* – известное из имитационной модели значение параметра.

Имитационная модель наблюдаемого потока построена с привлечением традиционных подходов к имитации входящих потоков событий в системах массового обслуживания [17]. Численное решение уравнения моментов осуществляется методом простой итерации [18].

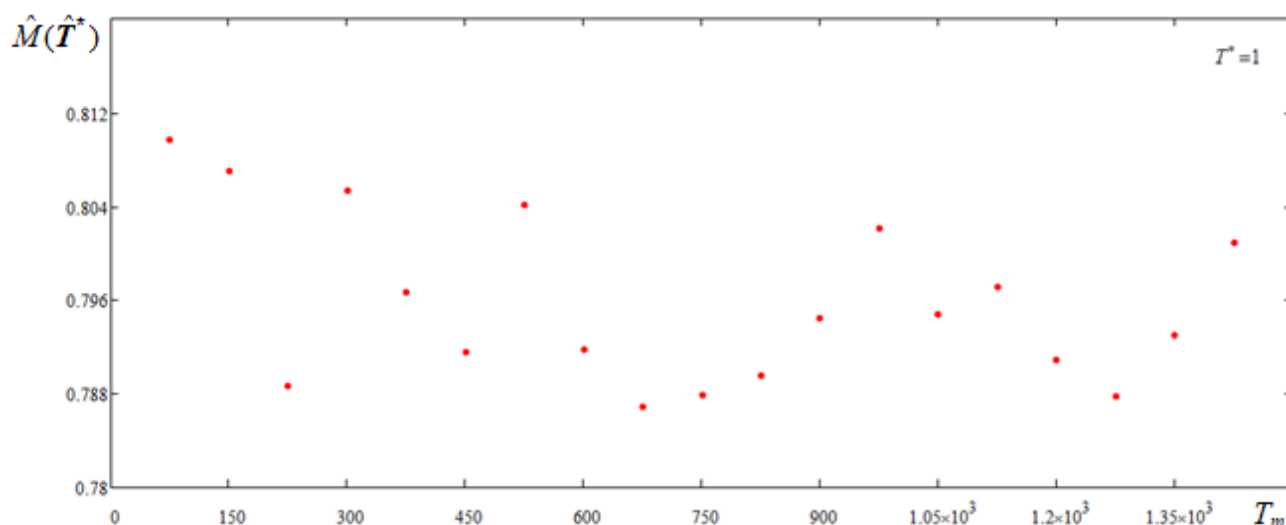
В табл. 1 приведены результаты для $\hat{M}(\hat{T}^*)$. В первой строке таблицы указано время моделирования T_m (время наблюдения за потоком) ($T_m = 50, 100, \dots, 1\,450$ ед. времени); во второй и третьей строках указано выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ для $T^* = 1$ и $T^* = 3$ соответственно.

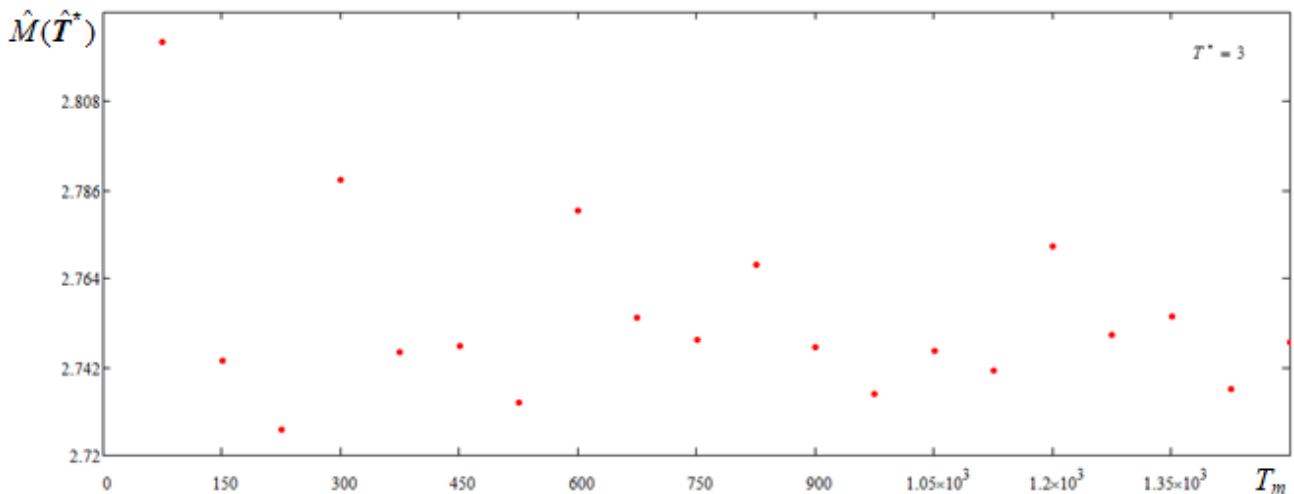
Таблица 1

Численные результаты первого статистического эксперимента для $\hat{M}(\hat{T}^*)$

T_m		50	100	150	200	250	300	350	400	450	
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	$T^* = 1$	0,7504	0,7722	0,7494	0,7609	0,7608	0,7515	0,7603	0,7516	0,7484	
	$T^* = 3$	2,817	2,737	2,72	2,783	2,74	2,741	2,727	2,775	2,748	
T_m		500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,7492	0,7487	0,7572	0,7617	0,7547	0,7562	0,7507	0,7477	0,754	0,7601	
	2,743	2,762	2,741	2,729	2,74	2,735	2,767	2,744	2,749	2,731	
T_m		1 000	1 050	1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,7548	0,7466	0,7539	0,7592	0,7539	0,7507	0,7553	0,757	0,748	0,7551	
	2,742	2,757	2,755	2,733	2,743	2,752	2,751	2,731	2,75	2,755	

Для наглядности на рис. 2 и 3 приведены графики зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от значения времени моделирования T_m для $T^* = 1$ и $T^* = 3$, построенные по данным табл. 1.

Рис. 2. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ Fig. 2. Plot of $\hat{M}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$

Рис. 3. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$ Fig. 3. Plot of $\hat{M}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$

Из анализа результатов табл. 1 и графиков зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от значения T_m следует:

1) стационарный режим функционирования наблюдаемого потока устанавливается при $T_m \geq 850$ ед. времени;

2) оценка $\hat{T}^*$ является смещенной оценкой; абсолютная погрешность вычислений равна 0,07 и 0,06 для $T^* = 1$ и $T^* = 3$ соответственно; причиной смещения оценки $\hat{T}^*$ ($\hat{T}^* < T^*$) относительно истинного T^* (известного из имитационной модели) является то, что значения случайного мертвого времени T сосредоточены около теоретического среднего ($T^*/2$).

В табл. 2 приведены результаты для $\hat{V}(\hat{T}^*)$. Структура табл. 2 аналогична структуре табл. 1.

Таблица 2

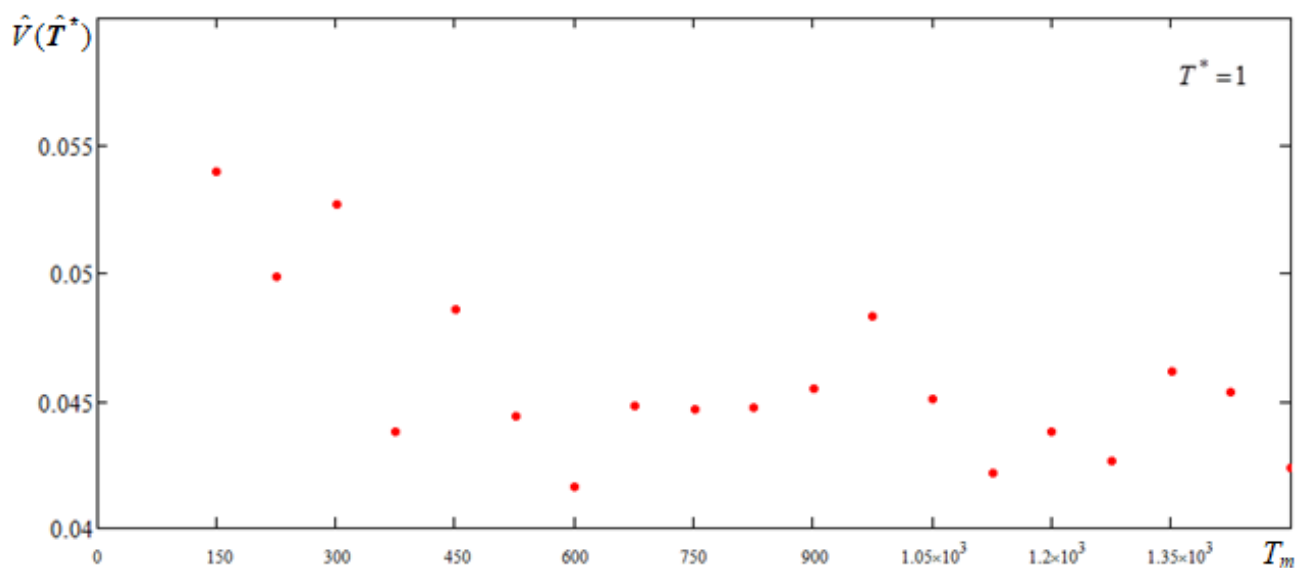
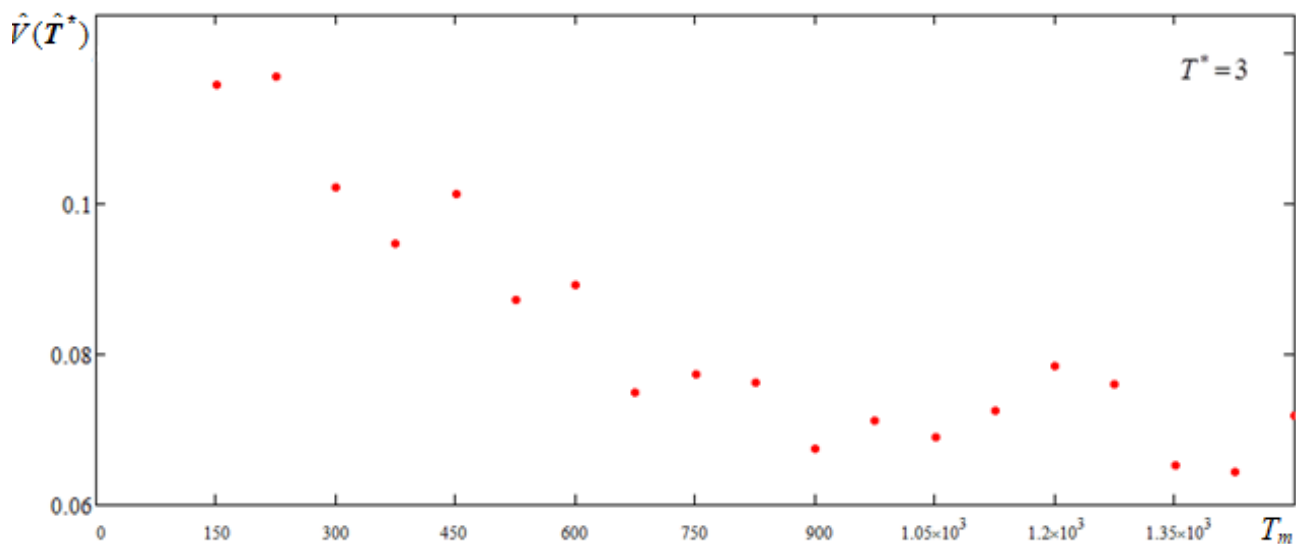
Численные результаты первого статистического эксперимента для $\hat{V}(\hat{T}^*)$

T_m		50	100	150	200	250	300	350	400	450	
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	$T^* = 1$	0,089	0,070	0,067	0,070	0,060	0,066	0,061	0,058	0,062	
	$T^* = 3$	0,233	0,119	0,121	0,106	0,098	0,105	0,090	0,092	0,078	
T_m		500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,062	0,062	0,063	0,066	0,063	0,059	0,061	0,060	0,064	0,063	
	0,080	0,079	0,070	0,074	0,071	0,075	0,081	0,079	0,068	0,067	
T_m		1 000	1 050	1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,060	0,060	0,061	0,064	0,060	0,060	0,064	0,061	0,058	0,063	
	0,075	0,075	0,072	0,069	0,070	0,075	0,069	0,067	0,077	0,071	

На рис. 4 и 5 приведены графики зависимости выборочной вариации $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от времени моделирования T_m для $T^* = 1$ и $T^* = 3$, построенные по данным табл. 2.

Результаты эксперимента указывают на смещенность построенной оценки, так как выборочная вариация, т.е. разброс значений случайной величины $\hat{T}^*$ не стремится к 0; однако вариация стремится к числу, близкому к нулю, т.е. методика оценивания качественна и полученную оценку можно принимать за истинную с достаточно малой погрешностью. Также заметим, что выборочная вариация устанавливается возле своего стационарного значения при времени моделирования $T_m \geq 650$ ед. времени. Таким образом, можно считать, что при $T_m \geq 650$ достигается нужная для практики точность.

Подчеркнем, что выборочная вариация при $T^* = 3$ больше, чем при $T^* = 1$. Последнее является естественным, так как при больших T^* происходит большая потеря событий исходного потока, что влечет за собой ухудшение качества оценивания при одинаковых T_m .

Рис. 4. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ Fig. 4. Plot of $\hat{V}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ Рис. 5. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$ Fig. 5. Plot of $\hat{V}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$

Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра T^ на качество оценок).* Второй статистический эксперимент организован аналогично первому и поставлен при фиксированном времени моделирования $T_m = 1\,000$ ед. времени, что соответствует, как следует из табл. 1, 2, времени установления стационарного режима, и при тех же значениях параметров имитационной модели, что и первый статистический эксперимент, за исключением значений T^* . Сначала второй статистический эксперимент реализуется для $T^* = 1$, затем для $T^* = 2, \dots$, затем для $T^* = 5$.

Результаты второго статистического эксперимента приведены в табл. 3.

Таблица 3

Численные результаты второго статистического эксперимента

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,75589	1,73959	2,754	3,7257	4,7408
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,06058	0,07089	0,06818	0,08088	0,08848

Данный эксперимент демонстрирует, что при увеличении значений параметра равномерного распределения мертвого времени T^* увеличивается выборочная вариация оценки. Это объясняется тем, что при больших значениях T^* увеличивается число потерянных событий исходного потока и, как следствие, ухудшается качество оценивания.

Заключение

В данной работе рассмотрен коррелированный полусинхронный дважды стохастический поток событий с непродлевающимся случайным мертвым временем, распределенным по равномерному закону. В реальных регистрирующих устройствах величина и характер мертвого времени зависят от многих факторов [12]. Регистрирующие приборы при этом обладают значением длительности мертвого времени T , ограниченным сверху некоторой величиной T^* ($T \leq T^*$). Переходя к случайному мертвому времени [12], вполне естественно рассматривать его распределение как равномерное на некотором отрезке $[0, T^*]$.

Аналитически получены формулы (3), (4), определяющие плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке при случайном мертвом времени для особого случая $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, доказана непрерывность данной плотности, выведена формула (5) для математического ожидания длительности интервала между соседними событиями и доказано возрастание данной функции для $T^* > 0$.

Методом моментов найдена ММ-оценка параметра T^* равномерного распределения длительности случайного мертвого времени, полученная оценка экспериментально исследована на качество. Приведенные результаты численных расчетов указывают на приемлемое качество оценивания.

В заключение отметим роль отечественных ученых научной школы Г.П. Башарина, статьи которых [19, 20] послужили толчком к исследованию дважды стохастических потоков событий как математических моделей реальных информационных потоков сообщений в телекоммуникационных сетях и системах [21, 22].

Список источников

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, № 3. P. 433–441.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, № 4. P. 923–930.
3. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № S6. С. 232–239.
4. Nezhe'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
5. Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного MAP-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 57–67.
6. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
7. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
8. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 9–13.
9. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
10. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.

11. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.
12. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
13. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
14. Горцев А.М., Загородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 40. С. 32–40.
15. Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 54. С. 28–37.
16. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
17. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. М. : Сов. радио, 1978. 248 с.
18. Самохин А.Б. Метод простой итерации для решения линейных операторных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28, № 10. С. 1578–1583.
19. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
20. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
21. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.Н. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
22. Нежелская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.

References

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
3. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232–239.
4. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated map event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Sciences*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
5. Nezhelskaya, L.A. (2015) Joint probability density of the intervals duration in modulated map event flows and its recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 57–67.
6. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
7. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
8. Vasilieva, L.A (2002) Otsenivanie parametrov dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy v usloviyakh prisutstviya mertvogo vremeni [The abstract of clause estimation of parameters twice-stochastic flow of events in conditions of presence of dead time]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 9–13.
9. Nezhelskaya, L. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy na-blyudaemosti [Optimal estimation of the states of semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
10. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29.
11. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23–32. DOI: 10.17223/19988605/32/3

12. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
13. Nezheleskaya, L.A. (2014) Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time]. *Communications in Computer and Information Sciences*. 487. pp. 342–350.
14. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Estimation of the parameter of unextendable dead time random duration in the Poisson flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
15. Gortsev, A.M. & Vetkina, A.V. (2021) Estimation of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable dead time in the semi-synchronous events flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 54. pp. 28–37. DOI: 10.17223/19988605/54/4
16. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
17. Lifshits, A.L. & Malts, E.A. (1978) *Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya* [Statistical modeling of queuing systems]. Moscow: Sovetskoe radio.
18. Samokhin, A.B. (1988) Metod prostoy iteratsii dlya resheniya lineynykh operatornykh uravneniy [The simple iteration method for solving linear operator equations]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 28(10). pp. 1578–1583.
19. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
20. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication network]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
21. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic Systems with Correlated Flows. Theory and Application in Telecommunication Networks]. Moscow: Tekhnosfera.
22. Nezheleskaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobyitiy* [Estimation of States and Parameters of Doubly Stochastic Event Flows]. Physical and Mathematical Sciences Dr. Diss. Tomsk.

Информация об авторах:

Горцев Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Веткина Анна Васильевна – магистрант Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anyavetkina@stud.tsu.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Gortsev Alexander Mikhailovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

Vetkina Anna Vasil'evna – National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: anyavetkina@stud.tsu.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 24.08.2021; принята к публикации 28.02.2022

Received 24.08.2021; accepted for publication 28.02.2022