

Научная статья

УДК 517.983.33

doi: 10.17223/19988621/76/2

MSC: 15B51, 37L55

Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы в пространстве l_1

Аъзам Абдурахимович Имомов¹, Абдумалик Искандарович Эшниязов²

¹ *Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан, imomov_azam@mail.ru*

² *Гулистанский государственный университет, Гулистан, Узбекистан, eshniyozovabdumalik@yandex.com*

Аннотация. Работа посвящена бистохастическим квадратичным операторам; введено понятие бистохастического оператора произвольного порядка. Найдено необходимое и достаточное условие бистохастичности бесконечномерного квадратичного стохастического оператора. Изучен аналог теоремы Биркгофа о крайних точках множества бистохастических матриц.

Ключевые слова: бистохастический квадратичный оператор, бесконечномерный бистохастический квадратичный оператор, крайние точки множества бистохастических матриц

Для цитирования: Имомов А.А., Эшниязов А.И. Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы в пространстве l_1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 20–31. doi: 10.17223/19988621/76/2

Original article

Infinite distochastic square operators in l_1

Azam A. Imomov¹, Abdumalik I. Eshniyazov²

¹ *Karshi State University, Karshi, Uzbekistan, imomov_azam@mail.ru*

² *Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan, eshniyozovabdumalik@yandex.com*

Abstract. The article is devoted to bistochastic quadratic operators. The concept of a bistochastic quadratic operator is introduced and the property of such operators is studied. A necessary and sufficient condition for bistochasticity is given. An analogue of Birkhoff's theorem is studied for the class of bistochastic quadratic operators. A sufficient condition for the extremity of bistochastic quadratic operators is obtained, and a necessary condition is also obtained for small dimensions. The concept of bistochastic quadratic operators is generalized, and the concept of a bistochastic operator of arbitrary order is introduced.

Keywords: bistochastic quadratic operator, infinite-dimensional bistochastic quadratic operator, extreme points of the set of bistochastic matrices

For citation: Imomov, A.A., Eshniyazov, A.I. (2022) Infinite distochastic square operators in 1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 20–31. doi: 10.17223/19988621/76/2

Введение

Динамическая система – это объект или процесс, который характеризуется своим состоянием как совокупностью характеристик в некоторые моменты времени, и определен закон эволюции состояния динамической системы во времени. Математическое моделирование нелинейных динамических систем является междисциплинарным инструментом исследования разнообразных процессов в природе и обществе. Первые результаты исследований динамических систем были получены при анализе моделей естественно-научных дисциплин – механики, биологии, метеорологии, синергетики, популяционной генетики, биофизики и т.д. К примеру, можно указать задачи отбора в локусах в генетике (см.: [1]), в биофизике – модели молекулярной эволюции, одна из которых называется гиперциклами П. Шустера (см.: [2]). Все эти модели в значительной мере основываются на качественно-топологических методах теории динамических систем в целом. В свою очередь, прикладные задачи, возникающие в различных отраслях естествознания, все чаще становятся источником развития математических теорий. Особенности изменения генетической структуры в органических популяциях снабжают нас задачами, где также приходится изучать нелинейные (в основном квадратичные) преобразования и их траектории.

Одной из основных задач теории квадратичных стохастических операторов (КСО) считают проблему С. Улама [3] о полной топологической классификации КСО базисного симплекса. Сравнительно хорошо изученными среди КСО являются так называемые вольтерровы отображения, введенные и разработанные в работах Р.Н. Ганиходжаева на основе сформулированной задачи С. Улама.

Интерес к изучению предельного поведения траекторий квадратичных отображений двумерного симплекса и их обобщениям возрос с появлением сообщений о результатах численных экспериментов, начатых Э. Ферми, С. Уламом, Дж. Пастой. В этом направлении, в теоретическом плане, наиболее содержательные и полезные результаты получены в работах Г. Кестена, Ю.И. Любича, С.С. Валландера, М.И. Захаревича, Н.П. Зимакова, Н.Н. Ганиходжаева, Р.Н. Ганиходжаева, Ф.А. Шахиди и др.

Другой класс квадратичных стохастических операторов – совокупность всех бистochasticических квадратичных операторов (БКО) – введен в работе [4] по аналогии с определением линейного двояко-стохастического оператора посредством мажоризации Харди–Литтлвуда–Пойа. Проникновение мажорирования во многие теории, в частности в теорию КСО, придает особый акцент актуальности его применения. Следовательно, изучение класса БКО также становится актуальной задачей как в плане траекторной теории и теории многомерных матриц, так и с точки зрения теории мажоризации.

1. Определение бистокхастических операторов в бесконечномерном симплексе

Определение 1. Множество

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1 \right\}$$

называется бесконечномерным симплексом.

Известно [5], что $S = \overline{\text{extr}(S)}$, где $\text{extr}(S)$ – множество крайних точек в S , а $\text{co}(A)$ – выпуклая оболочка множества A . Более того, каждая точка

$$e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

где 1 стоит в k -й позиции, является крайней в S .

Определение 2. Оператор $V: S \rightarrow S$ называется квадратично стохастическим, если он имеет вид:

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{\infty} P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют следующим условиям

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij,k} = 1. \quad (1.2)$$

Очевидно, что условия (1.2) обеспечивают сохранение симплекса, т.е КСО отображает симплекс в себя.

Пусть $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, x_{[2]}, \dots)$ – невозрастающая перестановка точки x , т.е.

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots$$

для точки $x = (x_1, x_2, \dots)$ из S .

Определение 3. Говорят, что для точек x, y из симплекса S x мажорируется y (или y мажорирует x), и пишут $x \prec y$ (или $y \succ x$), если выполняется следующее условие:

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Напомним, что бесконечная матрица называется бистокхастической, если все ее элементы неотрицательны и сумма элементов каждой ее строки и каждого столбца равна 1. Известно [6], что $x \prec y$ эквивалентно существованию бесконечной бистокхастической матрицы P такой, что $x_{\downarrow} = Py_{\downarrow}$. Таким образом, для бесконечной бистокхастической матрицы P имеем $Py_{\downarrow} = y_{\downarrow}$ для каждого $y \in S$.

Теперь введем понятие бесконечномерного бистокхастического квадратичного оператора.

Определение 4. КСО (1.1) называется бистокхастическим, если

$$\forall x \prec x. \quad (1.3)$$

Например, линейные операторы, определенные в l_1 с бистокхастической матрицей, удовлетворяют (1.3).

2. Необходимое и достаточное условие бистохастичности оператора

Сформулируем необходимое и достаточное условие бистохастичности квадратичного стохастического оператора.

Теорема 2.1. Пусть V – БКО. Тогда коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\sum_{i,j \in \alpha} P_{ij,k} \leq |\alpha|, \quad \forall \alpha \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha| \leq +\infty, \quad k \in \mathbb{N};$
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} = +\infty \vee 0, \quad k \in \mathbb{N}.$

Доказательство. 1) Пусть $Vx \prec x$. Тогда, согласно [6], существует бистохастическая матрица $P(x) = (P_{ij}(x))$ (которая зависит от x) такая, что $(Vx)_\downarrow = P(x)x_\downarrow$. Рассмотрим множество $\alpha_0 \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha_0| < \infty$, и положим $x^0(\alpha_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, где

$$\begin{cases} x_i^0 = \frac{1}{|\alpha_0|}, & i \in \alpha_0, \\ x_i^0 = 0 & , \quad i \notin \alpha_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x^0 \in S$. Имеем

$$(Vx^0)_{[k]} = \sum_{i,j \in \alpha_0} P_{ij,[k]} \frac{1}{|\alpha_0|^2} = \sum_{i=1}^{|\alpha_0|} P_{ij}(x^0) \frac{1}{|\alpha_0|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}(x^0) \frac{1}{|\alpha_0|} = \frac{1}{|\alpha_0|}.$$

Так как α_0 – произвольное множество, то получаем

$$\sum_{i,j \in \alpha} P_{ij,[k]} \leq |\alpha|, \quad \forall \alpha \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha| \leq +\infty, \quad \forall k = \overline{1, m},$$

то есть

$$\sum_{i,j \in \alpha} P_{ij,k} \leq |\alpha|, \quad \forall \alpha \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha| \leq +\infty, \quad \forall k = \overline{1, m}.$$

2) Пусть

$$x^1 = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots \right).$$

Очевидно, что $x^1 \in S$. Тогда из (1.1) имеем

$$V(x^1)_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} \frac{1}{m^2}.$$

С другой стороны, так как $(Vx)_\downarrow = P(x)x_\downarrow$, тогда если $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} \neq 0$, то мы заключаем

$$V(x^1)_k = \sum_{i=1}^m P_{ii}(x^1) \frac{1}{m}.$$

Приравнявая последние два уравнения, получаем

$$\sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} = m \sum_{i=1}^m P_{1i}(x^1).$$

Далее, так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m P_{1i}(x) = 1,$$

то получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} = +\infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Обозначим $A_k = \{P_{ij,k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$(A_k x, x) = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j.$$

Тогда V переписывается следующим образом:

$$Vx = [(A_1 x, x), (A_2 x, x), \dots, (A_m x, x), \dots].$$

С целью краткости перепишем оператор, в итоге

$$V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m \dots). \quad (2.1)$$

Введем обозначение:

$$U = \left\{ A = (a_{ij}) : a_{ij} = a_{ji} \geq 0, \sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} \leq |\alpha|, |\alpha| < \infty, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} = \infty \vee 0 \right\}. \quad (2.2)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Если $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m \dots)$ – БКО, то $A_k \in U$.

Ниже будем исследовать структуру этого множества. Очевидно, что U является выпуклым множеством. Рассмотрим множество U как подмножество пространства

$$l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \left\{ x = (x_{n,m}) : x_{n,m} \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}, \|x\|_\infty = \sup_{n,m \in \mathbb{N}} |x_{n,m}| \right\}.$$

Известно [7], что пространство

$$l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \left\{ x = (x_{n,m}) : x_{n,m} \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}, \|x\|_1 = \sum_{n,m=1}^\infty |x_{n,m}| < \infty \right\}$$

является сопряженным к $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, т.е. $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Поэтому в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ можно рассмотреть $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ топологию; далее эту топологию обозначим как τ . Согласно теореме Банаха–Алаоглу, единичный шар является $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ слабо компактным в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Так как все элементы матрицы U не больше единицы, U является подмножеством единичного шара $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Так как U является замкнутым, то U является $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ слабо компактным в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Введем некоторые понятия. Пусть $\forall \alpha \subset \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq +\infty$. Множество α будем называть насыщенным относительно матрицы $A = (a_{ij})$, если $\sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} \leq |\alpha|$. Соответствующую подматрицу $(a_{ij})_{i,j \in \alpha}$ будем называть *насыщенной* подматрицей.

Обозначим

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подматрицу N матрицы A назовем свободной если она не содержится ни в какой насыщенной подматрице матрицы A .

Введем обозначения:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть Q является подмножеством U , элементы которого содержат M_i для некоторого $i = 1, 2, 3$. Следующая теорема описывает все крайние точки множества U , т.е. $\text{ext}U$.

Теорема 2.3.

$$A = (a_{ij}) \in \text{ext}U$$

тогда и только тогда, когда A не имеет свободных подматриц и

$$a_{ii} = 1 \vee 0, \quad a_{ij} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0, \quad A \notin Q.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = (a_{ij}) \in \text{ext}U$. Сначала докажем,

что $a_{ii} = 1 \vee 0$, $a_{ij} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$. Докажем это утверждение относительно порядка матрицы A . Для конечных матриц доказано (см. теорему 1.2). Докажем для бесконечных матриц.

Сначала докажем, что если $A = (a_{ij}) \in \text{ext}U$, то $a_{ii} = 1 \vee 0$. Пусть $0 < a_{ii} < 1$. Если 1 содержится в некотором насыщенном множестве, то по предположению индукции заключаем, что $a_{11} = 0 \vee 1$, иначе матрицы

$$A' = \{a_{11} = a_{11} + \varepsilon, \quad a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a_{11} = a_{11} - \varepsilon, \quad a_{ij} = a_{ji}\},$$

где ε – достаточно малое число, принадлежат U , и более того, $2A = A' + A''$, что противоречит крайности матрицы A .

Теперь докажем, что $a_{ij} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$. Пусть существует $a_{i_0 j_0} \neq 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$ ($i_0 \neq j_0$). Если $\{i_0, j_0\} \subset \alpha$ для некоторого насыщенного множества α , то по

предположению индукции следует, что $a_{i_0 j_0} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$. Если не существует такого насыщенного множества, то матрицы

$$A' = \{a'_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a''_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} - \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

принадлежат U , более того, $2A = A' + A''$, что противоречит тому, что $A = \text{extr}U$.

Докажем, что $A \notin Q$. Пусть A имеет подматрицу M_1 . Без ограничения общности обозначим ее через $(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Рассмотрим матрицы

$$A' = \{a'_{12} = a_{12} + \varepsilon, a'_{13} = a_{13} - \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a''_{12} = a_{12} - \varepsilon, a''_{13} = a_{13} + \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}.$$

Для этих матриц выполняются $2A = A' + A''$ и $A', A'' \in U$, что противоречит крайности A . Случаи, когда A имеет подматрицы, равные M_2 и M_3 , рассматриваются аналогично.

Теперь допустим, что A имеет свободную подматрицу $(a_{ij})_{i,j=1,2}$. Положим

$$A' = \{a'_{12} = a_{12} + \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a''_{12} = a_{12} - \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}.$$

Так как $(a_{ij})_{i,j=1,2}$ – свободная, то она не содержится ни в какой насыщенной подматрице матрицы A , следовательно, $A', A'' \in U$, т.е. A не является крайней.

Достаточность. Докажем от противного. Допустим, что существуют матрицы $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in U$ такие, что $2A = B + C$ и $B \neq C$. Из $a_{ii} = 1 \vee 0$ следует, что $b_{ii} = c_{ii} = 1 \vee 0$. Пусть существуют числа i_0 и j_0 , для которых $b_{i_0 j_0} \neq c_{i_0 j_0}$. Без ограничения общности можно предположить, что $(i_0, j_0) = (1, 2)$. Из

$$2 \begin{pmatrix} a_{11} & 1/2 \\ 1/2 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

и $b_{12} \neq c_{12}$ получаем $a_{11} = a_{22} = 0$. Так как A не имеет свободных подматриц, то существует множество α , такое что $\{1, 2\} \subset \alpha$.

Далее из

$$\sum_{i,j \in \alpha} b_{ij} \leq |\alpha|, \quad \sum_{i,j \in \alpha} c_{ij} \leq |\alpha|$$

и

$$\sum_{i,j \in \alpha} b_{ij} + \sum_{i,j \in \alpha} c_{ij} = 2 \sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} = 2|\alpha|$$

получаем

$$\sum_{i,j \in \alpha} b_{ij} = \sum_{i,j \in \alpha} c_{ij} = |\alpha|. \quad (2.3)$$

Так как $b_{12} \neq c_{12}$, из (2.3.) получаем, что существуют числа (i_1, j_1) такие, что $b_{i_1 j_1} \neq c_{i_1 j_1}$. Предположим, что $(i_1, j_1) = (3, 1) \vee (3, 4)$.

Случай 1. Пусть, $(i_1, j_1) = (3, 1)$. Имеем

$$2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & a_{13} \\ \frac{1}{2} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & 0 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & 0 & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как $b_{13} \neq c_{13}$, то получаем $b_{33} = c_{33} = 0$ и $a_{13} = \frac{1}{2}$. Стало быть, A содержит либо M_1 , либо M_2 , что является противоречием.

Случай 2. Пусть, $(i_1, j_1) = (3, 4)$. В этом случае, по аналогии случаю 1, получаем, что A содержит одну из следующих матриц: M_1 , M_2 , M_3 .

Теорема доказана.

Напомним, что бесконечная матрица называется перестановочной, если в каждой ее строке и столбце находится ровно один единичный элемент, а все остальные равны нулю.

Следствие 2.1. Пусть P – бесконечная перестановочная матрица. Тогда $P \in \text{extr}U$.

Следствие 2.2. Пусть, матрица A определяется следующим образом:

$$A = \left\{ a_{ij} : a_{kk} = 1, a_{ik} = \frac{1}{2}, a_{ij} = 0, i, j \neq k, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тогда $A \in \text{extr}U$.

Рассмотрим множество

$$T = \left\{ (t_{ij}) : t_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m t_{ij} = \infty \vee 0 \right\}.$$

По аналогии для множества U можно доказать, что множество T является $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ – слабо компактным в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Рассмотрим уравнение относительно T :

$$A = \frac{1}{2}(T + T'). \quad (2.4.)$$

Здесь T' – транспонированная матрица.

Ниже исследуем условия для разрешимости уравнения (2.4).

Теорема 2.4. Пусть, $A = (a_{ij})$ – симметрическая неотрицательная матрица.

Для существования матрицы $T = (t_{ij}) \in T$ удовлетворяющей уравнению (2.4), необходимым и достаточным условием является $A \in U$.

Доказательство. Необходимость. Если $T = (t_{ij})$ стохастическая матрица и выполняется (2.4), тогда

$$\sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j \in \alpha} t_{ij} + \sum_{i,j \in \alpha} t_{ji} \right) = \sum_{i,j \in \alpha} t_{ij} = \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} t_{ij} \leq \sum_{i,j \in \alpha} 1 = |\alpha|.$$

Достаточность. Сначала докажем для крайних точек множества U . Пусть $A \in \text{extr}U$, тогда $a_{ii} = 0 \vee 1$, $a_{ij} = 0 \vee \frac{1}{2} \vee 1$

Пусть $a_{i_0 j_0} = \frac{1}{2}$ (i_0, j_0 – фиксированы). Рассмотрим следующие случаи:

(I) Существует j_0 , такой что $a_{ij_0} = 1$.

(II) Существует i_0 , такой что $a_{i_0 j} = 1$.

В обоих случаях легко доказать, что соответствующее $A \in \text{extr}U$.

Следствие 2.3. Если V – БКО, то существуют матрицы $T_i \in \mathbf{T}$ такие, что

$$\forall x = ((T_1 x, x), (T_2 x, x), \dots, (T_m x, x) \dots).$$

Следствие 2.4. Пусть $A \in U$. Тогда выполняется следующее уравнение:

$$(Ax, x) \leq x_{[1]}, \quad \forall x \in S. \quad (2.5)$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$(Tx, x) \leq x_{[1]}, \quad \forall x \in S, \quad (2.6)$$

где $T \in \mathbf{T}$. Действительно, так как $t_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} \leq 1$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j \leq x_{[1]}$$

для всех $x \in l_1$. В частности, так как $x \in S$, то

$$(Tx, x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j.$$

Учитывая $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1$ и последнее неравенство, получаем (2.6).

Из теоремы (2.3) и неравенства (2.6) получаем (2.5).

Из доказанного следствия возникает вопрос: для каких матриц A выполняется неравенство

$$(Ax, x) \leq x_{[1]} + \dots + x_{[k]} \quad (2.7)$$

для всех $x \in S$, где $k \in \mathbb{N}$? При $k=1$ ответ на вопрос дается следствием 2.4.

Введем следующие множества:

$$\mathbf{T}_k = \left\{ T = (t_{ij}), i, j \in \mathbb{N}: 0 \leq t_{ij} \leq 1, \sum_{j=1}^m t_{ij} \leq k \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m t_{ij} = \infty \vee 0 \right\}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$U_k = \left\{ A = (a_{ij}): a_{ij} = a_{ji}, \quad A = \frac{1}{2}(T + T'), \quad T \in \mathbf{T}_k \right\}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Теорема 2.5. Для матрицы $A \in U_k$ выполняется неравенство (2.7).

Доказательство. Пусть $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, \dots, x_{[m]}, \dots)$ – невозрастающая перестановка

вектора x и $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots$ – произвольные числа, такие что $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \leq k$.

Рассмотрим сумму

$$\lambda_1 x_{[1]} + \lambda_2 x_{[2]} + \dots + \lambda_m x_{[m]} + \dots \quad (2.8)$$

Пусть $i < j$. Замену коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_m \dots$ на $\lambda_1, \dots, \lambda_i - \varepsilon, \dots, \lambda_j + \varepsilon, \dots, \lambda_m \dots$ назовем сдвигом право, если $\varepsilon > 0$. Сдвиг называется допустимым, если сохраняется условие $0 \leq \lambda'_i$, где λ'_i – новые коэффициенты, полученные в результате сдвига.

Так как $x_{[i]} \geq x_{[j]}$, то при допустимых сдвигах вправо сумма (2.8) не возрастает. Также очевидно, что допустимый сдвиг возможен до получения набора $0, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 1, r$ где количество единиц равняется

$$l = \left\lceil \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right\rceil \quad \text{и} \quad r = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right\}.$$

Здесь $[a]$ и $\{a\}$ соответственно означают целую и дробную часть числа a . Заметим, что если $l = k$, то $r = 0$. Поэтому

$$\lambda_1 x_{[1]} + \lambda_2 x_{[2]} + \dots + \lambda_m x_{[m]} + \dots \leq x_{[1]} + \dots + x_{[l]} + r x_{[l+1]} \leq x_{[1]} + \dots + x_{[k]} \quad (2.9)$$

для всех $x \in S$ и $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i \leq k$.

Пусть $x \in S$ и $A \in U_k$. Выберем $T \in T_k$, так что

$$A = \frac{1}{2}(T + T')$$

Тогда

$$(Tx, x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j \right).$$

Так как $0 \leq t_{ij} \leq 1$ и $\sum_{j=1}^m t_{ij} \leq k$, то согласно (2.9) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^k x_{[i]}.$$

В силу $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1$ получаем

$$(Tx, x) \leq \sum_{i=1}^k x_{[i]}$$

и

$$(Ax, x) \leq \sum_{i=1}^k x_{[i]}.$$

Пусть B – множество всех БКО. Тогда теорема 2.2 означает, что для $V \in B$ условия

$$A_k \in U_1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

являются необходимыми.

Пусть $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots)$ – БКО. Если

$$\forall |\alpha| < \infty, \alpha \subset \mathbb{N}, \sum_{k \in \alpha} A_k \in U_{|\alpha|}, \quad (2.11)$$

то согласно теореме 2.4 выполняется неравенство (2.7). Поэтому выполняется $Vx \prec x$. Таким образом, условия (2.11) достаточны для бистохастичности оператора. Теорема доказана.

3. Крайние точки множества бесконечномерных бистохастических операторов

Данный раздел посвящен изучению крайних точек множества бесконечномерных бистохастических операторов.

Приведем простую лемму.

Лемма 3.1. Если для симметрической матрицы A имеем

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij,k} x_i x_j = 0, \quad \forall x \in S,$$

то $A = 0$.

Доказательство. Положим $x = \lambda e_i + (1-\lambda)e_j$. Здесь, как прежде, e_i, e_j – вершины симплекса, и $0 < \lambda < 1$.

$$(a_{ij} + a_{ji})\lambda(1-\lambda) = 0.$$

Согласно симметричности матрицы A получаем $A = 0$.

Обозначим $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots)$. Из определения бистохастичности следует, что если $V \in \mathbf{B}$, то $V_\pi = (A_{\pi(1)} | A_{\pi(2)} | \dots | A_{\pi(m)} | \dots) \in \mathbf{B}$ для любой перестановки π множества индексов $\mathbb{N}$.

Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots) \in \text{extr}\mathbf{B}$. Тогда

$$V_\pi = (A_{\pi(1)} | A_{\pi(2)} | \dots | A_{\pi(m)} | \dots) \in \text{extr}\mathbf{B}$$

для любой перестановки π множества индексов $\mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

Теорема 3.2. Пусть, $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots) \in \mathbf{B}$. Если $A_i \in \text{extr}\mathbf{U}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, тогда

$$V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots) \in \text{extr}\mathbf{B}.$$

Доказательство. Предположим, что $V \notin \text{extr}\mathbf{B}$. Тогда $\exists V', V'' \in \mathbf{B}$, $V' \neq V''$ такие, что $2V = V' + V''$. Пусть $V' = (A'_1 | \dots | A'_m | \dots)$, $V'' = (A''_1 | \dots | A''_m | \dots)$. Тогда

$$(2A_1 - A'_1 - A''_1 | \dots | 2A_m - A'_m - A''_m | \dots) = 0.$$

Поэтому $2A_i - A'_i - A''_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Так как $A_i \in \text{extr}\mathbf{U}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, то $A_i = A'_i = A''_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Итак, $V' = V''$, что противоречит тому, что $V \notin \text{extr}\mathbf{B}$.

Авторы выражают особую благодарность профессору Р.Н. Ганиходжаеву и рецензенту за значимые замечания и важнейшие советы при оформлении данной статьи.

Список источников

1. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев : Наукова думка, 1983. 296 с

2. Файстель Р., Романовский Ю.М., Васильев В.А. Эволюция гиперциклов Эйгена, протекающих в коацерватах // Биофизика. 1980. Т. 25, № 5. С. 882–887.
3. Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I. q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // Phys. Rev. Lett. 2005 V. 95. Art. 064102.
4. Ганиходжаев Р.Н. К определению бистохастических квадратичных операторов // УМН. 1993. Т. 4. С. 231–232.
5. Roy N. Extreme points and $\ell^1(\Gamma)$ spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. № 86. P. 216–218.
6. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М. : Мир, 1983. 575 с.
7. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М. : Наука, 1972. 232 с.

References

1. Lyubich Yu.I. (1983) *Matematicheskiye struktury v populyatsionnoy genetike* [Mathematical structures in population genetics]. Kiev: Naukova dumka.
2. Feistel R., Romanovskii Yu.M., Vasil'ev V.A. (1980) Evolyutsiya gipertsiklov Eygena, protekayushchikh v koatservatakh [Evolution of Eigen's Hypercycles Existing in Coacervates]. *Biofizika*. 25(5). pp. 882–887.
3. Flach S., Ivanchenko M.V. and Kanakov O.I. (2005) q-breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem. *Physical Review Letters*. 95(064102).
4. Ganikhodzhaev R.N. (1993) On the definition of bistochastic quadratic operators. *Russian Mathematical Surveys*. 48(4). pp. 244–246.
5. Roy N. (1982) Extreme points and $\ell^1(\Gamma)$ spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 86(2). pp. 216–218.
6. Marshall A.W., Olkin I. (1980) *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Academic Press.
7. Marcus M., Mink H. (1964) *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Boston: Allyn and Bacon.

Сведения об авторах:

Имомов Аъзам Абдурахимович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии физико-математического факультета Каршинского государственного университета (Карши, Узбекистан). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Эшниязов Абдумалик Искандарович – старший преподаватель кафедры математики Гулистанского государственного университета (Гулистан, Узбекистан). E-mail: eshniyozovabdumalik@yandex.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Imomov Azam A. (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Karshi State University, Karshi, Uzbekistan). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Eshniyazov Abdumalik I. (Researcher-teacher, Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan). E-mail: eshniyozovabdumalik@yandex.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 30.03.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 30.03.2021; accepted for publication 22.03.2022