ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Математика и механика № 77
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 512.552 MSC: 15B99, 16S50
doi: 10.17223/19988621/77/2

О *k*-ниль-хороших кольцах формальных матриц

**Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев[1],
Егор Александрович Тимошенко[2]**

[1, 2] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] nstsddts@yandex.ru
[2.] tea471@mail.tsu.ru

Аннотация. В 2018 г. Абдольюсефи, Ашрафи и Чэнь дали в своей работе определение 2-ниль-хорошего элемента кольца, обобщающее введенное двумя годами ранее Кэлугэряну и Ламом понятие изящного элемента кольца, а также определение 2-ниль-хорошего кольца. В той же работе было показано, что кольцо контекста Мориты, т.е. кольцо формальных матриц второго порядка, является 2-ниль-хорошим, если кольца, над которыми оно рассматривается, сами являются 2-ниль-хорошими. В настоящей статье мы проводим дальнейшее обобщение, определяя k-ниль-хорошие элементы и k-ниль-хорошие кольца, и указываем условие, при котором кольцо формальных матриц произвольного конечного порядка будет k-ниль-хорошим.
Ключевые слова: кольцо, k-ниль-хорошее кольцо, кольцо формальных матриц, контекст Мориты

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых – докторов наук МД-108.2020.1.

Для цитирования: Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А. О k-ниль-хороших кольцах формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 17–26. doi: 10.17223/19988621/77/2

Original article

About *k*-nil-good formal matrix rings

Tsyrendorzhi D. Norbosambuev[1], Egor A. Timoshenko[2]

[1, 2] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] nstsddts@yandex.ru
[2.] tea471@mail.tsu.ru

Abstract. We fix a positive integer $t \geq 2$. Let $R_1, R_2, \ldots, R_t$ be associative rings with identity and let M_{ij} be R_i-R_j-bimodules ($i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$) such that $M_{ii} = R_i$ for all i. Suppose that for any $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, t\}$, φ_{ijk} is a bimodule homomorphism $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$; we assume that φ_{iik} and φ_{ikk} coincide with the canonical isomorphisms $R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \to M_{ik}$ and $M_{ik} \otimes_{R_k} R_k \to M_{ik}$ respectively. Instead of $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$, where $a \in M_{ij}$ and $b \in M_{jk}$, we write simply ab. We also require that $(ab)c = a(bc)$ for all $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ and $c \in M_{kl}$. The set

$$K = \left\{ \left. \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \ldots & m_{1t} \\ m_{21} & r_2 & \ldots & m_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{t1} & m_{t2} & \ldots & r_t \end{pmatrix} \right| r_i \in R_i,\, m_{ij} \in M_{ij} \right\}$$

forms an associative ring with identity under the usual addition and the multiplication defined by the homomorphisms φ_{ijk}. We say that K is a *formal matrix ring of order t*.

Let R be an associative ring with identity and $k \geq 2$. An element of R is said to be *k-nil-good* if it is the sum of k invertible elements and a nilpotent; if all elements of R are *k-nil-good,* we say that R is a *k-nil-good ring*.

The main result is the following theorem.

Theorem 3.7. The ring K is k-nil-good ($k \geq 2$) if the rings $R_1, R_2, \ldots, R_t$ are k-nil-good.

Corollary 3.8. If the ring R_i is k_i-nil-good for all $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, then the ring K is k-nil-good, where $k = \max(k_1, k_2, \ldots, k_t)$.

Corollary 3.9. If R is a k-nil-good ring, then the ring $M(t, R)$ of all $t \times t$ square matrices over R is k-nil-good for every t.

The converses of Theorem 3.7 and Corollary 3.9 do not hold. For instance, the matrix ring $M(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ is 2-nil-good, while the field $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ is not a k-nil-good ring for each k.

Keywords: ring, k-nil-good ring, formal matrix ring, Morita context

Acknowledgments: The research was supported by the President of the Russian Federation Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

For citation: Norbosambuev, T.D., Timoshenko E.A. (2022) About k-nil-good formal matrix rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 17–26. doi: 10.17223/19988621/77/2

1. Кольца формальных матриц

Все кольца в статье – ассоциативные с единицей; $M(t, R)$ обозначает кольцо всех $(t \times t)$-матриц над кольцом R, а $U(R)$ – множество всех обратимых элементов кольца R. Через $\mathbf{Z}$ обозначаем кольцо целых чисел; ■ – символ конца доказательства либо его отсутствия.

Кольцам формальных матриц посвящено много работ (см., напр., [1–9]). Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц появились благодаря работе Мориты [10], в которой он ввел объект, впоследствии названный *контекстом Мориты*.

Под контекстом Мориты понимается набор $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$, в котором R и S – кольца, ${}_RM_S$ и ${}_SN_R$ – бимодули, а $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$ – бимодульные гомоморфизмы, для которых при всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполнены соотношения ассоциативности $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \psi(n \otimes m')$ и $\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \varphi(m \otimes n')$. Наборы такого вида возникли при изучении контравариантных функторов D_1

и D_2 между категориями модулей *Mod-R* и *Mod-S*, таких что выполнено $D_1D_2 \approx Id_{Mod\text{-}R}$ и $D_2D_1 \approx Id_{Mod\text{-}S}$ (позже Морита установил, что на самом деле это функторы Hom). С историей развития направления, связанного с контекстами Мориты, можно познакомиться в обзорной работе [6]; там же приведены ссылки на наиболее важные работы по этой теме.

Если дан контекст Мориты, то можно построить *кольцо контекста Мориты* (мы будем называть его также *кольцом формальных матриц второго порядка*) K, состоящее из всех матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \quad \text{где } r \in R,\, m \in M,\, n \in N,\, s \in S, \tag{1}$$

и снабженное поэлементным сложением и умножением, задаваемым правилом

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix}.$$

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц можно перенести на случай произвольного порядка $t \geq 2$. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_t$ – некоторые кольца и M_{ij} – R_i-R_j-бимодули, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$, такие, что $M_{ii} = R_i$. Далее, пусть для каждой тройки индексов $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ через φ_{ijk} обозначен бимодульный гомоморфизм $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$, причем φ_{iik} и φ_{ikk} совпадают с каноническими изоморфизмами $R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \to M_{ik}$ и $M_{ik} \otimes_{R_k} R_k \to M_{ik}$ соответственно. Для краткости элемент $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$, где $a \in M_{ij}$ и $b \in M_{jk}$, будем обозначать через ab. Как и для колец формальных матриц второго порядка, мы требуем выполнения соотношений ассоциативности $(ab)c = a(bc)$ для всех $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ и $c \in M_{kl}$. Множество

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \ldots & m_{1t} \\ m_{21} & r_2 & \ldots & m_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{t1} & m_{t2} & \ldots & r_t \end{pmatrix} \middle|\; r_i \in R_i,\, m_{ij} \in M_{ij} \right\} \tag{2}$$

всех матриц со значениями в бимодулях M_{ij} относительно поэлементного сложения и умножения, определяемого с помощью гомоморфизмов φ_{ijk}, образует кольцо, которое мы будем называть *кольцом формальных матриц порядка t*.

2. Аддитивные задачи в кольцах

В работе [11] введены понятия k-хорошего элемента и k-хорошего кольца:

Определение 2.1. Пусть k – натуральное число, большее 1.

а) Элемент кольца называется *k-хорошим*, если его можно представить в виде суммы k элементов, обратимых в этом кольце.

б) Кольцо R называется *k-хорошим*, если все его элементы k-хорошие.

в) Если кольцо R не является k-хорошим ни для какого значения k, но каждый элемент из R является k-хорошим для подходящего значения k, то будем говорить, что R – *ω-хорошее* кольцо.

Замечание. Несложно видеть, что если кольцо R является k-хорошим, то оно будет и $(k+j)$-хорошим для всякого натурального j. Поэтому имеет смысл говорить о минимальном k, для которого R есть k-хорошее кольцо.

Кольца, аддитивно порождаемые своими обратимыми элементами, – известная и достаточно хорошо изученная тема; хороший обзор дан в [12]. Отдельно выделим статью Хенриксена [13], в которой он показал, что кольцо $M(t, R)$, где $t \geq 2$, будет 3-хорошим вне зависимости от свойств кольца R. Независимо от Хенриксена в работе [14] Крылов установил, что кольцо $M(t, R)$ всегда является 4-хорошим. Упомянем также работы [7–9], в которых свойство хорошести рассматривалось для колец формальных матриц и отдельных формальных матриц.

В 1977 г. Николсон [15] ввел понятие чистоты для колец и их отдельных элементов:

Определение 2.2. а) Элемент кольца называется *чистым*, если он представим в виде суммы идемпотента и обратимого элемента.

б) Кольцо называется *чистым*, если все его элементы являются чистыми.

Работа Николсона послужила отправной точкой для дальнейших исследований чистоты. Так, в [16, 17] описываются некоторые классы абелевых групп, имеющих чистые кольца эндоморфизмов. В статье [18] Сяо и Тун рассматривали следующее обобщение понятия чистоты:

Определение 2.3. Пусть k – натуральное число.

а) Элемент кольца называют *k-чистым,* если его можно записать в виде суммы идемпотента и k обратимых элементов.

б) Кольцо R называют *k-чистым*, если все его элементы k-чистые.

В статье [19] появилось еще одно понятие, связанное с чистотой:

Определение 2.4. а) Элемент кольца называется *ниль-чистым* (*сильно ниль-чистым*), если он представим в виде суммы идемпотента и нильпотентного элемента (соответственно суммы коммутирующих между собой идемпотента и нильпотентного элемента).

б) Кольцо называется *ниль-чистым* (*сильно ниль-чистым*), если все его элементы являются ниль-чистыми (соответственно сильно ниль-чистыми).

Заметим, что всякое ниль-чистое кольцо является чистым (чистое разложение произвольного элемента x легко получить из ниль-чистого разложения элемента $x - 1$). Обратное неверно: так, поле $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ является чистым кольцом, но не является ниль-чистым.

Отталкиваясь от статей [15, 19], Кэлугэряну и Лам [20] дали следующее определение:

Определение 2.5. а) Элемент кольца называется *изящным,* если он представим в виде суммы нильпотентного и обратимого элементов.

б) Кольцо R называется *изящным*, если все его ненулевые элементы изящны.

В той же работе [20] было, в частности, установлено, что все изящные кольца являются простыми.

Обобщая свойство изящности, Данчев в статье [21] следующим образом определил свойство ниль-хорошести для колец и их элементов:

Определение 2.6. а) Элемент кольца называют:

– *ниль-хорошим*, если он представим в виде суммы нильпотентного элемента и элемента, который обратим либо равен 0;

– *сильно ниль-хорошим*, если его можно представить в виде суммы нильпотентного элемента и элемента, который обратим либо равен 0, причем эти два элемента коммутируют между собой;

– *уникально ниль-хорошим*, если он либо нильпотентен, либо единственным образом представим в виде суммы нильпотентного и обратимого элементов.

б) Кольцо называют *ниль-хорошим* (*сильно ниль-хорошим, уникально ниль-хорошим*), если все его элементы являются ниль-хорошими (соответственно сильно ниль-хорошими, уникально ниль-хорошими).

Несложно видеть, что всякое изящное кольцо является ниль-хорошим, однако обратное неверно. Например, кольца классов вычетов $\mathbf{Z}/2^l\mathbf{Z}$, где $l \geq 2$, являются ниль-хорошими, но не изящными. Класс ниль-хороших колец оказался более содержательным по сравнению с изящными кольцами несмотря на то, что различия между определениями 2.5 и 2.6 на первый взгляд кажутся незначительными.

Наконец, в работе [22] было введено понятие 2-ниль-хорошести:

Определение 2.7. а) Элемент кольца называют 2-*ниль-хорошим*, если он представим в виде суммы нильпотентного элемента и двух обратимых элементов.

б) Кольцо называют 2-*ниль-хорошим*, если все его элементы 2-ниль-хорошие.

Несмотря на название, 2-ниль-хорошие кольца служат обобщением скорее для изящных колец, чем для ниль-хороших: так, кольца $\mathbf{Z}/2^l\mathbf{Z}$, где $l \geq 1$, ниль-хорошие, но не являются 2-ниль-хорошими. С другой стороны, в [20] было показано, что всякое изящное кольцо, не изоморфное полю $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, является 2-хорошим (а значит, оно является и 2-ниль-хорошим).

3. *k*-ниль-хорошие формальные матрицы

В [22] было найдено достаточное условие, при котором кольцо формальных матриц второго порядка является 2-ниль-хорошим:

Теорема 3.1 [22]. Пусть K – это кольцо формальных матриц, соответствующее контексту Мориты $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$. Если кольца R и S являются 2-ниль-хорошими, то и K – 2-ниль-хорошее кольцо. ■

Применяя индукцию, можно получить отсюда

Следствие 3.2 [22]. Если R – 2-ниль-хорошее кольцо, то кольцо $M(t, R)$ также будет 2-ниль-хорошим при любом t. ■

По аналогии с [18] введем следующее обобщение свойства 2-ниль-хорошести для колец и их элементов:

Определение 3.3. Пусть k – натуральное число, большее 1.

а) Элемент кольца назовем *k-ниль-хорошим*, если его можно представить в виде суммы одного нильпотентного и k обратимых элементов.

б) Кольцо R назовем *k-ниль-хорошим*, если все его элементы k-ниль-хорошие.

в) Если кольцо R не является k-ниль-хорошим ни для какого k, но каждый элемент из R является k-ниль-хорошим для подходящего k, то будем говорить, что R есть ω-*ниль-хорошее* кольцо.

Пример 3.4. Кольца $\mathbf{Z}/2^l\mathbf{Z}$, где $l \geq 1$, являются ω-ниль-хорошими.

Ясно, что если кольцо R является k-хорошим, то оно будет и k-ниль-хорошим.

Предложение 3.5. Если кольцо R является k-ниль-хорошим, то оно является и $(k + j)$-ниль-хорошим для всякого натурального j.

Доказательство. Достаточно доказать, что R является $(k+1)$-ниль-хорошим кольцом. Действительно, для всякого $x \in R$ мы можем записать элемент $x-1$ как сумму одного нильпотентного и k обратимых элементов. В этом случае элемент $x=(x-1)+1$ будет суммой одного нильпотентного и $k+1$ обратимых элементов, что и требовалось. ■

В статье [23] было показано, что существует подкольцо R поля рациональных чисел, которое является k-хорошим кольцом для достаточно большого k, но не является 2-хорошим кольцом. Естественно, такое кольцо R служит также примером k-ниль-хорошего кольца, которое не является 2-ниль-хорошим.

Докажем следующий технический факт.

Лемма 3.6. Пусть K – кольцо формальных матриц порядка t, заданное равенством (2). Если $X \in K$ – треугольная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы, обратимые в соответствующих кольцах R_i, то $X \in U(K)$.

Доказательство. Заметим, что кольцо вида (2) можно естественным образом представить в виде кольца, соответствующего контексту Мориты $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$, такому что R есть кольцо формальных матриц порядка $t-1$ и $S=R_t$. Поэтому достаточно будет доказать утверждение леммы для матрицы X вида (1), такой что $r \in U(R)$, $s \in U(S)$ и хотя бы один из элементов m и n равен 0 (после этого справедливость леммы легко устанавливается с помощью индукции). Положим

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} r^{-1} & -r^{-1}ms^{-1} \\ -s^{-1}nr^{-1} & s^{-1} \end{pmatrix} \in K;$$

очевидно, что E – единичный элемент кольца K. Имеем

$$XY=\begin{pmatrix} rr^{-1}-\varphi(m\otimes s^{-1}nr^{-1}) & -rr^{-1}ms^{-1}+ms^{-1} \\ nr^{-1}-ss^{-1}nr^{-1} & ss^{-1}-\psi(n\otimes r^{-1}ms^{-1}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E,$$

$$YX=\begin{pmatrix} r^{-1}r-\varphi(r^{-1}ms^{-1}\otimes n) & r^{-1}m-r^{-1}ms^{-1}s \\ -s^{-1}nr^{-1}r+s^{-1}n & s^{-1}s-\psi(s^{-1}nr^{-1}\otimes m) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

(в этих равенствах мы воспользовались тем, что все значения аргументов, к которым применяются φ и ψ, равны 0, так как $m=0$ или $n=0$). Таким образом, $Y=X^{-1}$ и $X \in U(K)$. ■

Теперь можно обобщить теорему 3.1 на случай формальных матриц порядка $t \geq 2$ и k-ниль-хороших колец:

Теорема 3.7. Кольцо K формальных матриц порядка t, заданное условием (2), является k-ниль-хорошим (где $k \geq 2$), если все кольца $R_1, R_2, \ldots, R_t$ сами являются k-ниль-хорошими.

Доказательство. Пусть матрица $X \in K$ имеет вид, указанный в равенстве (2). Поскольку $R_1, R_2, \ldots, R_t$ – k-ниль-хорошие кольца, то для всякого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ можно записать $r_i = y_i + u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} \ldots + u_{ik}$, где y_i – нильпотентный элемент из R_i и $u_{ij} \in U(R_i)$ при всех $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Полагая

$$U_1=\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ m_{21} & u_{21} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{t1} & m_{t2} & \ldots & u_{t1} \end{pmatrix}, \quad U_2=\begin{pmatrix} u_{12} & m_{12} & \ldots & m_{1t} \\ 0 & u_{22} & \ldots & m_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{t2} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_t \end{pmatrix}, \quad U_j = \begin{pmatrix} u_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{tj} \end{pmatrix}$$

(где $j \in \{3, 4, \dots, k\}$), имеем $X = N + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k$. Очевидно, что матрица N является нильпотентным элементом кольца K и в силу леммы 3.6 для каждого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ выполнено $U_j \in U(K)$. Теорема доказана. ■

С учетом предложения 3.5 получаем такое следствие:

Следствие 3.8. Пусть кольцо K формальных матриц порядка t задано равенством (2). Если кольцо R_i является k_i-ниль-хорошим для всякого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, то кольцо K является k-ниль-хорошим, где $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_t)$. ■

Теорема 3.7 позволяет также обобщить следствие 3.2:

Следствие 3.9. Если R – k-ниль-хорошее кольцо, то кольцо $M(t, R)$ также будет k-ниль-хорошим при любом t. ■

Заметим, что утверждения теоремы 3.7 и следствия 3.9 нельзя обратить:

Пример 3.10. Рассмотрим кольцо $M(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$; пусть E – единичная матрица. Всякий элемент кольца можно представить в виде суммы двух обратимых:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E + E, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + E, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(представления остальных десяти матриц из $M(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ получаются аналогично). Поэтому $M(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ – 2-хорошее кольцо, а значит, оно является k-ниль-хорошим кольцом для любого значения $k \geq 2$. При этом очевидно, что само поле $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ не является k-ниль-хорошим кольцом ни для какого $k \geq 2$.

Список источников

1. *Крылов П.А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 456–463.
2. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19, № 1. С. 65–119.
3. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017.
4. *Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д.* Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 5. С. 1116–1127. doi: 10.17377/smzh.2018.59.512
5. *Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д.* Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53, С. 16–21. doi: 10.17223/19988621/53/2
6. *Loustaunau P., Shapiro J.* Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. doi: 10.1007/BFb0091253 (Lecture Notes in Mathematics. V. 1448).
7. *Норбосамбуев Ц.Д.* О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4 (36). С. 34–40. doi: 10.17223/19988621/36/4

8. *Норбосамбуев Ц.Д.* 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел // Всерос. молодежная науч. конф. «Все грани математики и механики» : сб. ст. Томск : Изд. дом ТГУ, 2016. С. 6–12.
9. *Норбосамбуев Ц.Д.* Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 5–12. doi: 10.17223/19988621/52/1
10. *Morita K.* Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
11. *Vámos P.* 2-good rings // Quart. J. Math. 2005. V. 56, No. 3. P. 417–430. doi: 10.1093/qmath/hah046
12. *Srivastava A.K.* A survey of rings generated by units // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math. 2010. V. 19. P. 203–213. doi: 10.5802/afst.1281
13. *Henriksen M.* Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31, No. 1. P. 182–193. doi: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.
14. *Крылов П.А.* Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов // Известия вузов. Математика. 1976. № 4. С. 56–66.
15. *Nicholson W.K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 229. P. 269–278. doi: 10.2307/1998510
16. *Сорокин К.С.* Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17, № 8. С. 105–108.
17. *Сорокин К.С.* Самомалые SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20, № 5. С. 141–148.
18. *Xiao G., Tong W. n*-clean rings and weakly unit stable range rings // Comm. Algebra. 2005. V. 33, No. 5. P. 1501–1517. doi: 10.1081/AGB-200060531
19. *Diesl A.J.* Nil clean rings // J. Algebra. 2013. V. 383. P. 197–211. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020
20. *Călugăreanu G., Lam T.Y.* Fine rings: A new class of simple rings // J. Algebra Appl. 2016. V. 15, No. 9. Art. 1650173. doi: 10.1142/S0219498816501735
21. *Danchev P.* Nil-good unital rings // Int. J. Algebra. 2016. V. 10, No. 5. P. 239–252. doi: 10.12988/ija.2016.6212
22. *Abdolyousefi M.S., Ashrafi N., Chen H.* On 2-nil-good rings // J. Algebra Appl. 2018. V. 17, No. 6. Art. 1850110. doi: 10.1142/S0219498818501104
23. *Goldsmith B., Meehan C., Wallutis S.L.* On unit sum numbers of rational groups // Rocky Mountain J. Math. 2002. V. 32, No. 4. P. 1431–1450. doi: 10.1216/rmjm/1181070032

References

1. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic.* 47(4). pp. 258–262. DOI: 10.1007/s10469-008-9016-y.
2. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*). 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
3. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices* (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
4. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Automorphisms of formal matrix algebras. *Siberian Mathematical Journal.* 59(5). pp. 885–893. DOI: 10.1134/S0037446618050129.
5. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Gruppa avtomorfizmov odnogo klassa algebr formal'nykh matrits [Group of automorphisms of one class of formal matrix algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 53. pp. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
6. Loustaunau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.

7. Norbosambuev T.D. (2015) O summakh diagonal'nykh i obratimykh obobshchennykh matrits [On sums of diagonal and invertible formal matrices] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(36). pp. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
8. Norbosambuev T.D. (2016) 2-khoroshiye diagonal’nye formal’nyye matritsy nad kol'tsom tselykh chisel [2-good diagonal formal matrices over the ring of integers]. *All-Russia Youth Scientific Conference “Vse grani matematiki i mekhaniki”* (*sbornik statey*). Tomsk: Izd. dom TGU. pp. 6–12.
9. Norbosambuev T.D. (2018) Rang formal'noy matritsy. Sistema formal'nykh lineynykh uravneniy. Deliteli nulya [Rank of a formal matrix. System of formal linear equations. Zero divisors]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 52. pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
10. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A.* 6. pp. 83–142.
11. Vámos P. (2005) 2-good rings. *Quarterly Journal of Mathematics*. 56(3). pp. 417–430. DOI: 10.1093/qmath/hah046.
12. Srivastava A.K. (2010) A survey of rings generated by units. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. *Mathématiques*. 19. pp. 203–213. DOI: 10.5802/afst.1281.
13. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra.* 31(1). pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.
14. Krylov P.A. (1976) Summy avtomorfizmov abelevykh grupp i radikal Dzhekobsona kol'tsa endomorfizmov [Sums of automorphisms of Abelian groups and the Jacobson radical of the endomorphism ring]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*. 4. pp. 56–66.
15. Nicholson W.K. (1977) Lifting idempotents and exchange rings. *Transactions of the American Mathematical Society*. 229. pp. 269–278. DOI: 10.2307/1998510.
16. Sorokin K.S. (2014) Completely decomposable Abelian groups with clean endomorphism rings. *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*). 197(5). pp. 655–657. DOI: 10.1007/s10958-014-1748-8.
17. Sorokin K.S. (2018) Self-small SP-groups with clean endomorphism rings. *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*). 230(3). pp. 445–450. DOI: 10.1007/s10958-018-3752-x.
18. Xiao G., Tong W. (2005) *n*-clean rings and weakly unit stable range rings. *Communications in Algebra*. 33(5). pp. 1501–1517. DOI: 10.1081/AGB-200060531.
19. Diesl A.J. (2013) Nil clean rings. *Journal of Algebra*. 383. pp. 197–211. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020.
20. Călugăreanu G., Lam T.Y. (2016) Fine rings: A new class of simple rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 15(9). Article ID: 1650173. DOI: 10.1142/S0219498816501735.
21. Danchev P. (2016) Nil-good unital rings. *International Journal of Algebra*. 10(5). pp. 239–252. DOI: 10.12988/ija.2016.6212.
22. Abdolyousefi M.S., Ashrafi N., Chen H. (2018) On 2-nil-good rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 17(6). Article ID: 1850110. DOI: 10.1142/S0219498818501104.
23. Goldsmith B., Meehan C., Wallutis S.L. (2002) On unit sum numbers of rational groups. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 32(4). pp. 1431–1450. DOI: 10.1216/rmjm/1181070032.

***Сведения об авторах*:**

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nstsddts@yandex.ru

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

***Information about the authors*:**
Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru
Timoshenko Egor A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 30.03.2021; принята к публикации 19.05.2022

The article was submitted 30.03.2021; accepted for publication 19.05.2022