

Научная статья

УДК 51-72, 532.5.032, 532.51

doi: 10.17223/19988621/77/6

Неоднородное течение Пуазейля

Наталья Владимировна Бурмашева^{1, 2},

Анастасия Викторовна Дьячкова^{3, 4}, Евгений Юрьевич Просвирыков^{5, 6}

^{1, 3, 5} *Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

^{2, 4, 6} *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

^{1, 2} *nat_burm@mail.ru*

^{3, 4} *larinakaterina@hotmail.com*

^{5, 6} *evgen_pros@mail.ru*

Аннотация. Представлено новое точное решение системы уравнений Навье–Стокса, описывающее неоднородное сдвиговое течение Пуазейля в бесконечном горизонтальном слое. Система уравнений, характеризующая исследуемое движение жидкости, получается переопределенной после редукции уравнений Навье–Стокса и уравнения несжимаемости. Для разрешимости системы уравнений построено точное решение. Получено полиномиальное точное решение краевой задачи. Проведен анализ спектральных свойств поля скоростей. Показано, что в потоке имеет место существование застойных точек и зон с обратным течением, а также областей, где касательное напряжение меняет свой тип.

Ключевые слова: вертикально завихренная жидкость, изотермическое течение, неоднородное течение Пуазейля, точное решение, уравнения Навье–Стокса, противотечение, застойная точка

Для цитирования: Бурмашева Н.В., Дьячкова А.В., Просвирыков Е.Ю. Неоднородное течение Пуазейля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 68–85. doi: 10.17223/19988621/77/6

Original article

Inhomogeneous Poiseuille flow

Natal'ya V. Burmasheva^{1, 2}, Anastasiya V. Dyachkova^{3, 4},

Evgeniy Yu. Prosviryakov^{5, 6}

^{1, 3, 5} *Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation*

^{2, 4, 6} *Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation*

^{1, 2} *nat_burm@mail.ru*

^{3, 4} *larinakaterina@hotmail.com*

^{5, 6} *evgen_pros@mail.ru*

Abstract. The paper presents an investigation of the isothermal steady flow of a viscous incompressible fluid in an extended flat layer using hydrodynamic equations. The solu-

tion to the overdetermined system of equations is found in a class of velocities that are linear in regards to coordinates.

The bottom of the layer under consideration is limited by a stationary solid hydrophilic surface. At the upper boundary of the layer, the pressure field, which is inhomogeneous in both horizontal coordinates, and the velocity field are specified. These boundary conditions allow one to generalize the classical Poiseuille flow.

The exact solution, satisfying the set boundary value problem, is described by a series of polynomials of different orders. The highest (fifth) degree of the polynomials corresponds to a homogeneous component of the horizontal velocity. Here, the pressure field depends only on the horizontal coordinates; the dependence is linear. The detailed analysis of the velocity field is carried out. The obtained results confirm that the determined exact solution can describe multiple stratification of the velocity field and the corresponding field of tangent stresses.

The analysis of spectral properties of the velocity field is performed for a general case without specifying the values of physical constants that unambiguously identify the studied fluid. Therefore, the presented results are applicable to viscous fluids of various nature.

Keywords: vertically swirling fluid, isothermal flow, inhomogeneous Poiseuille flow, exact solution, Navier-Stokes equations, countercurrent, stagnation point

For citation: Burmasheva, N.V., Dyachkova, A.V., Prosviryakov, E.Yu. (2022) Inhomogeneous Poiseuille flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 68–85. doi: 10.17223/19988621/77/6

Введение

Движение жидкости, индуцируемое градиентом (изменением) давления на границах слоя, впервые было описано практически одновременно Хагеном и Пуазейлем [1–3]. В литературе, посвященной гидродинамике и ее приложениям, нет единства по терминологии названия такого движения жидкости [4]. Выводы Пуазейля о пропорциональности расхода жидкости четвертой степени радиуса (диаметра) трубы основывались на более тщательно разработанной методике и широте эксперимента, на точности наблюдений [4]. Термин «течение жидкости Хагена–Пуазейля» используется в основном в гемодинамике человека и животных [5, 6].

Точное решение Пуазейля является отправной точкой для описания ламинарного движения в трубах произвольного поперечного сечения [7–9]. Оно широко используется в задачах гидродинамической устойчивости для объяснения возникновения турбулентности при высоких значениях числа Рейнольдса [10–17]. Аналогичные исследования справедливы при изучении движений проводящих жидкостей и сред с неньютоновской реологией [18, 19]. Кроме того, использование профиля Пуазейля необходимо при моделировании течений жидкости в геофизической гидродинамике. Вращение жидкости и наличие градиента давления приводят к неожиданным эффектам при крупномасштабных течениях [20, 21].

Отдельно отметим, что именно точное решение Пуазейля фактически породило семейство точных решений Остроумова–Бириха для описания конвективных потоков в точной постановке [22, 23]. В настоящее время точное решение Остроумова–Бириха, примененное для описания однонаправленных потоков, используется для двумерных и трехмерных течений [20, 24–35].

В последнее время начат цикл исследований переопределенных систем уравнений в частных производных, которые получены после редукций уравнений

Навье–Стокса для несжимаемых жидкостей, движущихся в различных силовых полях [36–38]. Особый интерес представляют изобарические пространственно неоднородные течения жидкости типа Куэтта [39, 40]. В статьях [36–38, 40] были получены нетривиальные точные решения переопределенной системы уравнений Навье–Стокса и изучены их свойства. Показано, что точными решениями размерности «два с половиной» (две компоненты вектора скорости зависят от трех координат) можно осуществлять моделирование течений в экваториальной зоне Мирового океана. Учет градиентов давления при заданном трении (касательных напряжениях) на границе атмосферы и океана позволил исследовать противотечения в жидкости, вызванные вторичными градиентными потоками [41]. В данной статье предлагается восполнить пробел и исследовать неоднородные течения Пуазейля, используя классические граничные условия (течение Куэтта–Пуазейля).

Постановка задачи

Изотермическое установившееся течение (вертикальная компонента вектора скорости полагается тождественно равной нулю) вязкой несжимаемой жидкости описывается следующей системой уравнений [36–40]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1), состоящей из уравнений переноса момента импульса и уравнения несжимаемости, введены обозначения: V_x , V_y – компоненты скорости, параллельные соответственно горизонтальным осям Ox , Oy введенной декартовой системы координат; $P = P(x, y, z)$ – давление, отнесенное к постоянной плотности жидкости ρ ; ν – коэффициент кинематической вязкости. Система уравнений (1) является квадратично нелинейной. Она описывает слоистые и сдвиговые течения вязкой несжимаемой жидкости в приближении гидростатики, поскольку в силу допущения о сдвиговом характере течения конвективная производная и лапласиан в третьем уравнении системы Навье–Стокса тождественно равны нулю [42, 43]. Напомним, что изобарические течения были изучены в [34, 35, 40, 44, 45], и там же были описаны механизмы генерации и эволюции противотечений в бесконечном горизонтальном слое жидкости.

Будем искать точное решение системы (1) в следующем виде [31–33]:

$$V_x = u(z) + a(z)y, \quad V_y = v(z), \quad P = P_0 + S_1x + S_2y. \quad (2)$$

Структура точного решения для давления определяется простейшим дифференциальным уравнением в частных производных $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$. Горизонтальные градиенты S_1 , S_2 и фоновое P_0 являются постоянными значениями по толщине слоя и определяются граничными условиями. Неоднородное поле скоростей (2) порождает неоднородное поле касательных напряжений:

$$\tau_{xz} = \eta \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \eta(u' + a' y), \quad \tau_{yz} = \eta \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = \eta v'.$$

Здесь η – коэффициент динамической вязкости, а штрихом обозначена производная по переменной z .

Подставляя выражения (2) для гидродинамических полей в систему (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных функций u , a , v , P :

$$a'' = 0, \quad vv'' = P_2, \quad vu'' = P_1 - va, \quad P_0' = 0. \quad (3)$$

Система (3) состоит из обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и имеет девятый порядок. Она является замкнутой (число уравнений совпадает с числом определяемых функций) и наследует нелинейные свойства системы (1). Кроме того, уравнения (3) преимущественно являются однородными и изолированными, исключение составляет только уравнение для нахождения скорости u .

Общее решение системы (3) получается последовательным интегрированием уравнений, которое определяется набором полиномиальных функций:

$$\begin{aligned} a &= c_3 z + c_4, \\ v &= \frac{P_2}{2v} P_2 z^2 + c_1 z + c_2, \\ u &= \frac{c_3 P_2^2}{40v^2} z^5 + \frac{12vc_1 c_3 + c_4 P_2^2}{24v^2} z^4 + \frac{c_1 c_4 + c_2 c_3}{6v} z^3 + \frac{c_2 c_4 + P_1}{2v} z^2 + c_5 z + c_6. \end{aligned} \quad (4)$$

В решении (4) наибольшая степень (пятая) приведенных полиномов отвечает выражению для скорости u . Также заметим, что коэффициенты представления (2) для поля давления, согласно общему решению (4), оказались постоянными. Это означает, что распределение поля давления P во всей области течения вязкой жидкости можно считать известным из краевого условия для давления. Линии уровня давления представляют набор вертикальных плоскостей, пересекающих горизонтальную плоскость по прямым вида $P_1 x + P_2 y = \text{const}$. По этой причине больший интерес вызывают характеристики распределения поля скорости.

Решение (4) системы дифференциальных уравнений (1) содержит ряд постоянных интегрирования, значения которых необходимо определить из краевых условий. Рассмотрим далее течение жидкости в горизонтальном бесконечно протяженном слое заданной толщины h , нижней границе которого соответствует значение $z = 0$ вертикальной координаты. Будем полагать, что на границе $z = 0$ выполняется условие прилипания, которое ввиду структуры решения (2) равносильно условиям

$$u(0) = v(0) = 0, \quad a(0) = 0.$$

Кроме того, будем считать известным распределение полей скорости и давления на верхней границе $z = h$. Эти условия, согласно выражениям (2), можно представить в следующем виде [39, 40, 45]:

$$\begin{aligned} u(h) &= W \cos \varphi, \quad a(h) = \Omega, \quad v(h) = W \sin \varphi, \\ P_0(h) &= S, \quad P_1(h) = S_1, \quad P_2(h) = S_2. \end{aligned}$$

Здесь W – значение скорости на поверхности жидкости, φ – угол, характеризующий направление этой скорости [30, 39, 45]. Приведенные граничные условия записаны в приближении «твердой» крышки [5, 39, 42, 45]. Это означает, что верхняя граница слоя не деформируется, т.е. является плоской. В этом случае, поскольку рассматривается изобарическое течение, кинематическое и динамическое условия для свободной границы выполняются автоматически [5, 39, 40, 42, 43, 45]. Такой подход позволяет исследовать крупномасштабные ветровые течения, отфильтровывая при этом возможность описания волн на межфазной границе. Такой подход хорошо себя зарекомендовал, поэтому используется в статье. К тому же классическое точное решение Пуазейля было получено для известной границы, поэтому для сравнения результатов решено было не вводить в рассмотрение деформацию свободной поверхности.

Краевая задача

Решение (4) с учетом сформулированных краевых условий принимает вид:

$$u = Z \left[\frac{h^4 \Omega S_1}{120\nu^2} (3Z^4 - 5Z^3 + 2) + \frac{h^2 S_2}{2\nu} (Z - 1) + \frac{h^2 W \Omega \sin \varphi}{12\nu} (Z^3 - 1) + W \cos \varphi \right], \quad (5)$$

$$v = Z \left(W \sin \varphi + \frac{S_1 h^2}{2\nu} (Z - 1) \right), \quad (6)$$

$$a = \Omega Z, \quad (7)$$

$$P = S + S_1 x + S_2 y. \quad (8)$$

Здесь $Z = z/h$ – безразмерная вертикальная координата, принимающая значения в интервале $[0, 1]$.

Решение (5)–(7) для поля скорости является полиномиальным, оно определяется суперпозицией нескольких потоков, индуцированных различными физическими причинами. Прежде всего это движение ветра на верхней границе слоя и неоднородное распределение давления на этой границе. Выражение (6) для скорости v описывает классическое течение Куэтта–Пуазейля. На формирование свойств скорости (5), помимо потоков, вызванных горизонтальным перепадом давления и движением верхней границы слоя, влияет еще наличие ненулевой вертикальной завихренности на этой поверхности. Таким образом, полученное решение обобщает классическое решение Пуазейля [2, 3] на случай неоднородных течений вертикально завихренных жидкостей.

Отметим, что если горизонтальные перепады давления S_1 и S_2 положить равными нулю, то решение (5)–(8) примет более простой вид:

$$V_x = \frac{WZ}{12\nu} \left[h^2 \Omega \sin \varphi (Z^3 - 1) + 12\nu \cos \varphi \right] + \Omega Z, \\ V_y = W \sin \varphi Z, \quad P = S = \text{const}.$$

Это точное решение, описывающее неоднородное течение Куэтта, было найдено и исследовано в статье [40]. Скорость V_y не допускает возникновения противотечений вдоль оси Oy . Ввиду этих обстоятельств интерес представляет исследование влияния неоднородных членов в представлении поля давления (влияния коэффициентов S_1 и S_2) на свойства течения (5)–(7).

Анализ поля скорости

Точное решение (6) определяется квадратичной зависимостью от вертикальной координаты Z . При этом один из нулей рассматриваемого полинома (6) выделен явно – это $Z = 0$. Линейная функция, стоящая в скобках в (6), может обращаться в нуль внутри рассматриваемого слоя не более одного раза. Достаточным условием для этого является выполнение неравенства:

$$v(0)v(1) = W \sin \varphi \left(W \sin \varphi - \frac{S_1 h^2}{2v} \right) < 0.$$

Далее проанализируем поведение скорости $V_x = u + ay$. Для удобства представим решение (5), (7) в следующем виде:

$$V_x = Z(mZ^4 + kZ^3 + nZ + d_y). \quad (9)$$

В выражении (9) для краткости введены обозначения:

$$d_y = d + \Omega y,$$

$$d = \frac{1}{120v^2} (2h^4 \Omega S_1 - 60vh^2 S_2 - 10vh^2 W \Omega \sin \varphi + 120Wv^2 \cos \varphi),$$

$$k = \frac{h^2 \Omega}{24v^2} (2vW \sin \varphi - h^2 S_1), \quad m = \frac{h^4 \Omega S_1}{40v^2}, \quad n = \frac{h^2 S_2}{2v}.$$

Слагаемое $d_y = d + \Omega y$ является постоянным в конкретном сечении, определяемом координатой y , и меняется только при переходе к другому сечению (при изменении y).

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент $d_y = 0$. Решение (9) тогда принимает вид:

$$V_x = Z^2(mZ^3 + kZ^2 + n). \quad (10)$$

Заметим, что при $m = k = n = 0$ решение (10) вырождается в тривиальное ($V_x = 0$). При этом случаи, где $m = k = 0$, $m = n = 0$, $k = n = 0$, также не представляют интереса, так как при указанных комбинациях значений параметров скорость V_x будет иметь вид $V_x = CZ^q$ (где $q = 2, 4$ или 5 соответственно), и единственной нулевой точкой скорости V_x будет точка $Z = 0$. Поэтому остаются два альтернативных варианта: только один из коэффициентов m, k, n равен нулю и ни один из коэффициентов m, k, n не равен нулю. Начнем анализ с первого варианта.

Если в решении (10) только один из коэффициентов m, k, n принимает нулевое значение, то полином $f = mZ^3 + kZ^2 + n$, стоящий в круглых скобках в (10), определяется одним из следующих выражений:

$$f|_{m=0} = kZ^2 + n, \quad f|_{k=0} = mZ^3 + n, \quad f|_{n=0} = mZ^3 + kZ^2.$$

В случаях $m = 0$ и $k = 0$ производные этих функций соответственно равны

$$f'|_{m=0} = 2kZ \quad \text{и} \quad f'|_{k=0} = 3mZ^2.$$

Очевидно, указанные производные на интервале $(0, 1)$ в нуль не обращаются, а значит, функции $f|_{m=0}$ и $f|_{k=0}$ являются монотонными. Следовательно, скорость V_x при $m = 0$ и $k = 0$ имеет не более одного нуля (рис. 1). В случае же $n = 0$ скорость V_x (10) можно преобразовать к виду:

$$V_x|_{n=0} = Z^4(mZ + k),$$

из которого следует, что у скорости V_x также не может быть более одной нулевой точки на исследуемом интервале $(0, 1)$ (см. рис. 1). Причем указанная точка имеет место только при выполнении неравенства $k(m + k) < 0$.

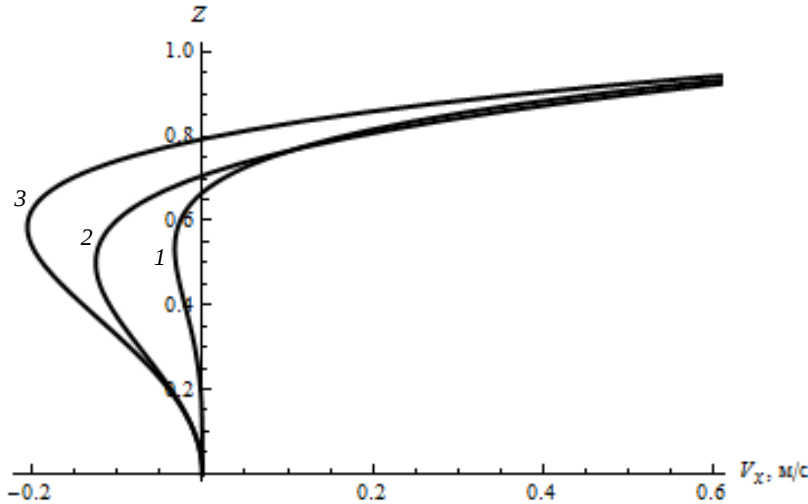


Рис. 1. Профиль скорости V_x при $d_y = 0$, $v = 1.412 \cdot 10^2$ м²/с, $\varphi = \pi/3$, $h = 100$ м, $W = 2$ м/с (кривая 1 – случай $n = 0$ ($S_1 = 0$, $S_2 = 0.0815219$ кг/(м²с²), $\Omega = 0.293479$ с⁻¹), кривая 2 – случай $k = 0$ ($S_1 = 0.0815219$ кг/(м²с²), $S_2 = 0$, $\Omega = 0.293479$ с⁻¹), кривая 3 – случай $m = 0$ ($S_1 = 0$, $S_2 = -0.02824$ кг/(м²с²), $\Omega = 0.195652$ с⁻¹))

Fig. 1. Profile of velocity V_x at $d_y = 0$, $v = 1.412 \cdot 10^2$ м²/с, $\varphi = \pi/3$, $h = 100$ м, $W = 2$ м/с (1, the case of $n = 0$ ($S_1 = 0$, $S_2 = 0.0815219$ кг/(м²с²), $\Omega = 0.293479$ с⁻¹); 2, the case of $k = 0$ ($S_1 = 0.0815219$ кг/(м²с²), $S_2 = 0$, $\Omega = 0.293479$ с⁻¹); and 3, the case of $m = 0$ ($S_1 = 0$, $S_2 = -0.02824$ кг/(м²с²), $\Omega = 0.195652$ с⁻¹))

В случае, когда все коэффициенты в выражении (10) отличны от нуля, скорость V_x , согласно [46], принимает нулевое значение внутри слоя не более двух раз (рис. 2). Необходимым условием для этого является выполнение неравенства

$$n(m + n + k) > 0,$$

означающего, что полином f , входящий в (10), принимает на концах интервала $(0, 1)$ значения одного знака.

В общем же случае ($d_y \neq 0$) скорость V_x , определяемая точным решением (6), может иметь на одну нулевую точку больше [46]. Появление дополнительной нулевой точки обосновывается учетом дополнительного потока, определяемого коэффициентом d_y . Профиль скорости (9) с максимальным числом нулевых точек приведен на рис. 3.

Отметим, что удельная кинетическая энергия

$$E_k = \frac{\rho}{2} (V_x^2 + V_y^2)$$

принимает нулевое значение только при одновременном обращении в нуль обеих (ненулевых) компонент вектора скорости. Выше было показано, что скорость V_y может обращаться в нуль внутри рассматриваемого горизонтального слоя не более одного раза. Это означает, что энергия E_k может иметь не более одной нулевой точки внутри слоя (рис. 4).

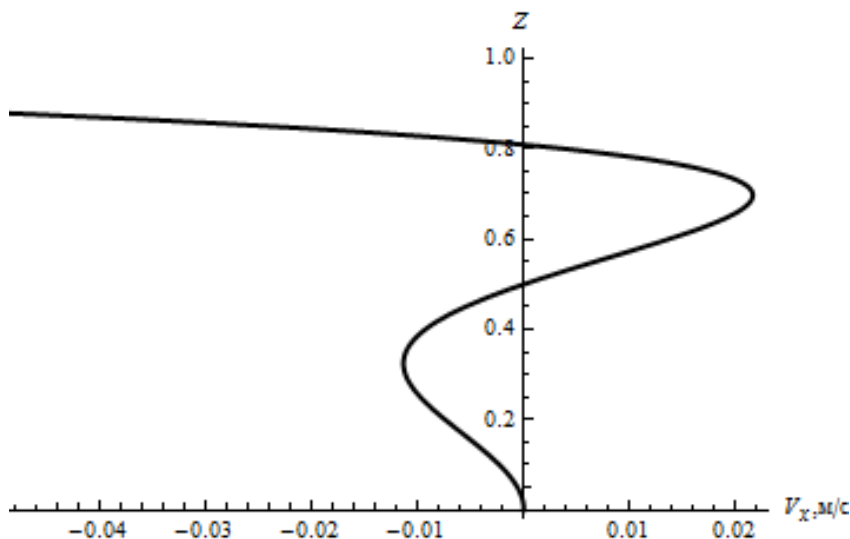


Рис. 2. Профиль скорости V_x при $d_y = 0$ и $m, k, n \neq 0$

($\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi = \pi/3$, $h = 100 \text{ м}$, $W = -0.5 \text{ м/с}$, $S_1 = -0.0305707 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$,
 $S_2 = -0.00706 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$, $\Omega = 0.52174 \text{ с}^{-1}$)

Fig. 2. Profile of velocity V_x at $d_y = 0$ and $m, k, n \neq 0$

($\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi = \pi/3$, $h = 100 \text{ м}$, $W = -0.5 \text{ м/с}$, $S_1 = -0.0305707 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$,
 $S_2 = -0.00706 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$, $\Omega = 0.52174 \text{ с}^{-1}$)

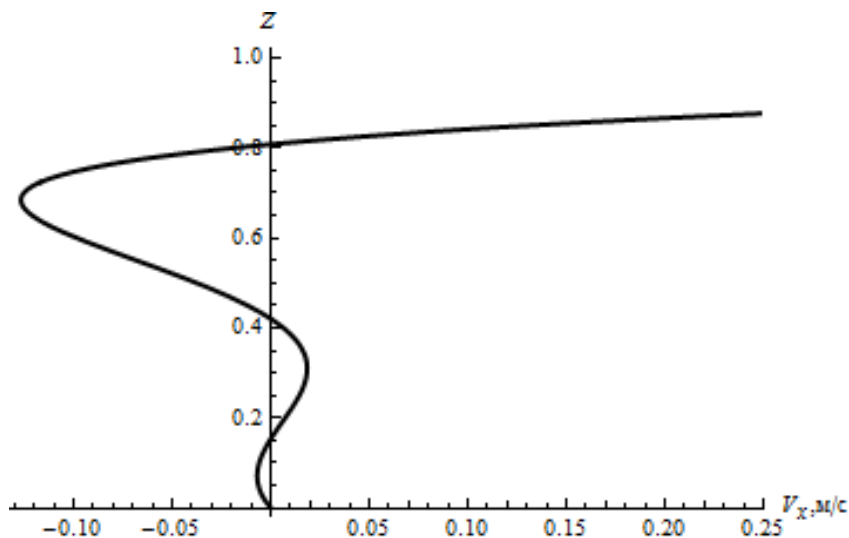


Рис. 3. Профиль скорости V_x в общем случае

($\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi = \pi/3$, $h = 100 \text{ м}$, $W = 1.6 \text{ м/с}$, $S_1 = 0.0978262 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$,
 $S_2 = 0.02824 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$, $\Omega = 0.815219 \text{ с}^{-1}$)

Fig. 3. Profile of velocity V_x in a general case

($\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi = \pi/3$, $h = 100 \text{ м}$, $W = 1.6 \text{ м/с}$, $S_1 = 0.0978262 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$,
 $S_2 = 0.02824 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$, $\Omega = 0.815219 \text{ с}^{-1}$)

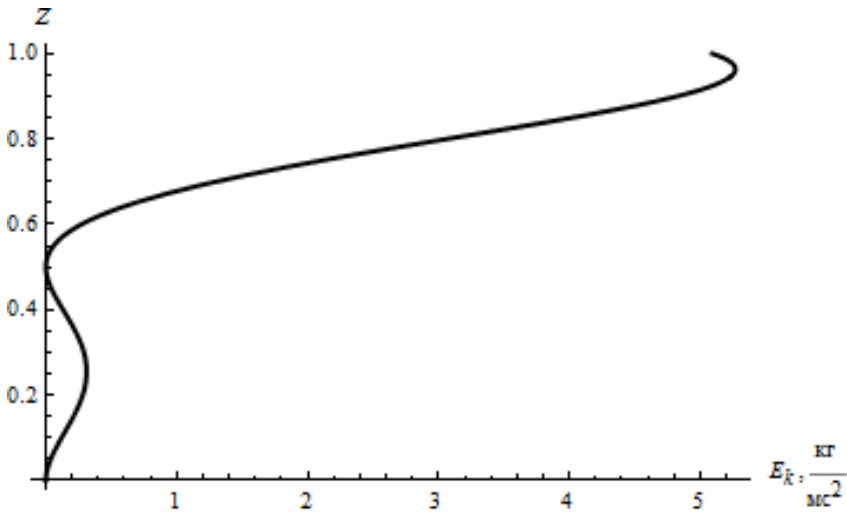


Рис. 4. Профиль кинетической энергии E_k
Fig. 4. Profile of kinetic energy E_k

Профиль, представленный на рис. 4, иллюстрирует наличие одной нулевой точки внутри рассматриваемого слоя, а также немонотонный характер энергии E_k . Последнее объясняется сложной нелинейной зависимостью скорости V_x от вертикальной координаты Z .

Распределение линий тока для значений, отвечающих приведенному профилю удельной кинетической энергии E_k , представлено на рис. 5.

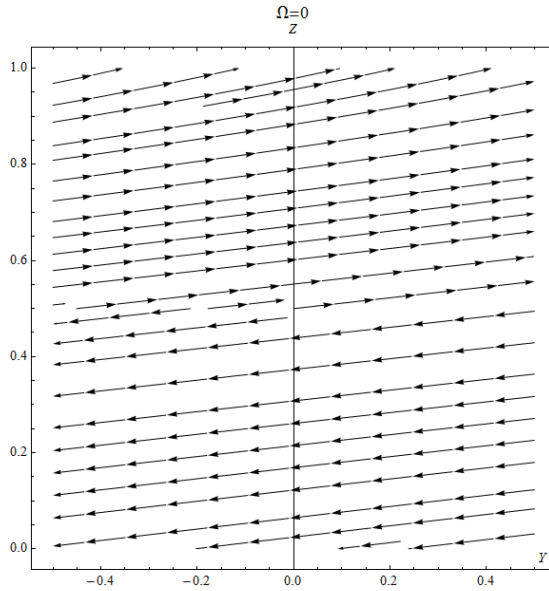


Рис. 5. Линии тока при $\Omega = 0$
Fig. 5. Streamlines at $\Omega = 0$

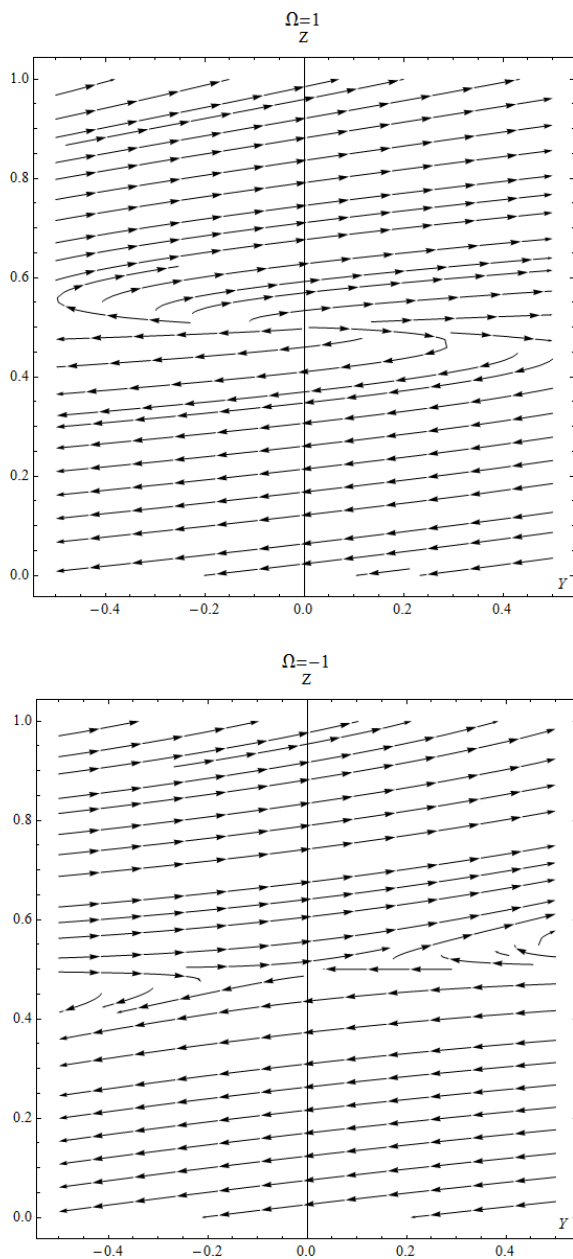


Рис. 6. Линии тока при разных значениях параметра $\Omega \neq 0$
Fig. 6. Streamlines at different values of parameter $\Omega \neq 0$

Отметим, что для сечения $y = 0$ вклад неоднородного слагаемого au в структуру скорости V_x будет нулевой. Учет неоднородного слагаемого au (т.е. выбор сечения $y \neq 0$) приводит к усложнению топологии поля скорости, что хорошо видно на рис. 6.

Анализ поля касательных напряжений

Аналогично исследованию для поля скорости проанализируем свойства касательных напряжений

$$\tau_{xz} = \eta \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial V_x}{\partial Z} = \frac{\eta}{h} (5mZ^4 + 4kZ^3 + 2nZ + d_y), \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = \eta \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial V_y}{\partial Z} = \frac{\eta}{h} (2bZ + c). \quad (12)$$

Структура выражения (12) позволяет сделать вывод о том, что внутри слоя рассматриваемой жидкости может существовать только одна точка стратификации. В этой точке касательное напряжение τ_{xz} меняет свой тип с растягивающего на сжимающее или наоборот.

Касательное напряжение τ_{xz} (11) определяется линейной комбинацией монотонных функций Z^4 , Z^3 , Z и d_y . Согласно [46], такая комбинация (как функция) может принимать нулевое значение не более трех раз (рис. 7).

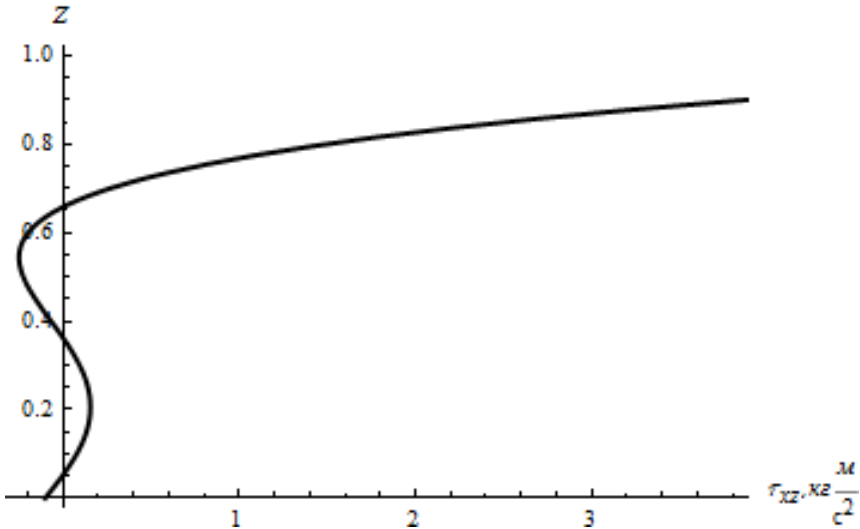


Рис. 7. Профиль касательного напряжения τ_{xz} в общем случае

($\eta = 144.179$ кг·с/м, $\varphi = \pi/3$, $h = 100$ м, $W = 1.24845$ м/с, $S_1 = 0.0763317$ кг/(м²с²),
 $S_2 = 0.0195867$ кг/(м²с²), $\Omega = 0.434783$ с⁻¹)

Fig. 7. Profile of tangential stress τ_{xz} in a general case

($\eta = 144.179$ kg·s/m, $\varphi = \pi/3$, $h = 100$ m, $W = 1.24845$ m/s, $S_1 = 0.0763317$ kg/(m²s²),
 $S_2 = 0.0195867$ kg/(m²s²), $\Omega = 0.434783$ s⁻¹)

Наличие трех нулевых точек у напряжения τ_{xz} говорит о возможности решения (5), (7) описывать множественную стратификацию. В данном случае речь идет о возможности расслоения поля τ_{xz} на четыре зоны, при пересечении границ которых напряжение τ_{xz} меняет знак (или, что то же самое, меняет тип).

Заключение

Получено аналитическое решение краевой задачи, описывающей неоднородное течение Пуазейля вертикально завихренной жидкости в горизонтальном слое при учете ветрового воздействия на одной из его границ. Исследовано возможное поведение поля скорости течения в зависимости от задаваемых на верхней границе характеристик ветра. Показано, что в слое жидкости могут возникать области с обратным течением, причем в рассматриваемом слое в некоторых случаях течение может сменить направление до трех раз. Соответственно, в жидкости могут существовать точки стратификации, делящие рассматриваемый слой на подслои, в которых касательное напряжение меняет свой тип – с растягивающего на сжимающее или наоборот. Показано, что число этих областей меняется в зависимости от значений параметров краевой задачи (граничного управления). Кинетическая энергия внутри рассматриваемого слоя однократно принимает нулевое значение и имеет немонотонный характер, что объясняется структурой построенного решения для поля скорости и его сложной зависимостью от вертикальной координаты.

Список источников

1. Hagen G. Über die Bewegung des Wasser in engen zylindrischen Röhren // Pogg. Ann. 1839. Ver. 46. S. 423–442.
2. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1840. V. 11. P. 961–967; 1041–1048.
3. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite) // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1841. V. 12. P. 112–115.
4. Воларович М.П. Работы Пуазейля о течении жидкости в трубах // Известия Академии наук СССР. Сер. физическая. 1947. Т. XI, № 1. С. 7–18.
5. Pedley T.J., The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge ; New York ; Melbourne : Cambridge University Press, 1980. 446 p.
6. Регирер С.А. Квазиодномерная теория перистальтических потоков // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 5. С. 89–97.
7. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering. London : Taylor & Francis, 2002. 406 p.
8. Князев Д.В., Колпаков И.Ю. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11, № 1. С. 89–97.
9. Аристов С.Н., Князев Д.В. Новое точное решение задачи о вращательно-симметричном течении Куэтта–Пуазейля // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 5 (285). С. 71–77. doi: 10.1007/s10808-007-0087-7
10. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 363–377. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.35
11. Бойко А.В., Кириловский С.В., Маслов А.А., Поплавская Т.В. Инженерное моделирование ламинарно-турбулентного перехода: достижения и проблемы (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 5. С. 30–49. DOI: 10.15372/PMTF20150503

12. Станкевич Ю.А., Фисенко С.П. Перестройка профиля Пуазейля в неизотермических течениях в реакторе // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 6. С. 1225–1228.
13. Савенков И.В. О неустойчивости плоского течения Пуазейля между упругими пластинами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 12. С. 2288–2295.
14. Трошкин О.В. К нелинейной устойчивости течений Куэтта, Пуазейля и Колмогорова в плоском канале // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443, № 1. С. 29.
15. Проскурин А.В., Сагалаков А.М. Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля // Журнал технической физики. 2012. Т. 82, № 5. С. 29–35.
16. Чефранов С.Г., Чефранов А.Г. Устранение парадокса линейной устойчивости течения Хагена–Пуазейля и вязкий диссипативный механизм возникновения турбулентности в пограничном слое // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2014. Т. 146, № 2. С. 373–383.
17. Савенков И.В. Об осесимметричной неустойчивости течения Пуазейля–Куэтта между концентрическими цилиндрами при высоких числах Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 295. doi: 10.7868/S0044466915020179
18. Скульский О.И., Аристов С.Н. Механика аномально вязких жидкостей. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 2004. 156 с.
19. Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Макарова М.А., Пышнограй Г.В. Обобщение закона Пуазейля для плоскопараллельного течения вязкоупругих сред // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 581–590.
20. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь : Пермский гос. ун-т, 2006. 155 с.
21. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Адвективное течение во вращающейся жидкой пленке // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 1. doi: 10.15372/PMTF20160121
22. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1952. 256 с.
23. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. Т. 3. С. 69–72.
24. Бирих Р.В., Пухначёв В.В. Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // Доклады РАН. 2011. Т. 436, № 3. С. 323–327.
25. Бирих Р.В., Пухначёв В.В. Конвективное течение в горизонтальном канале с неньютоновской реологией поверхности при нестационарном продольном градиенте температуры // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 1. С. 192–198.
26. Пухначёв В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского государственного университета. 2011. № 1-2. С. 62–69.
27. Андреев В.К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Красноярск : ИВМ СО РАН, 2010. 68 с.
28. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20. doi: 10.1134/S0021894413020016
29. Шварц К.Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 26–30.
30. Аристов С.Н., Просвираков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, №4. С. 651–657.
31. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. V. 23, No. 2. P. 341–360. doi: 10.14498/vsgtu1670.

32. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24, No. 3. С. 528–541. doi: 10.14498/vsgtu1770
33. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54, № 1. С. 114–124. doi: 10.31857/S0040357119060034
34. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Сневак Л.Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т. 8, № 4. С. 445–456. doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38
35. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Сневак Л.Ф. Нестационарная конвекция Бенара–Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 2. С. 132–141. doi: 10.7868/S0040357116020019
36. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 79–87. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87
37. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2020. Т. 32. С. 33–48. doi: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2020. Is. 3. P. 29–46. doi: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046
39. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородное конвективное течение Куэтта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 3–9. doi: 10.7868/S0568528116050030
40. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182.
41. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15, No. 3. P. 271–283.
42. Marshall J., Hill C., Perelman L., Adroft A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic and non-hydrostatic ocean modeling // Geophys. Res J. 1997. V. 102, No. C.3. P. 5733–5752.
43. Гилл А. Динамика атмосферы и океана : в 2 т. М. : Мир, 1986.
44. Зубарев Н.М., Просвиряков Е.Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. № 6. С. 65–71. DOI: 10.15372/PMTF20190607
45. Привалова В.В., Просвиряков Е.Ю. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12, № 2. С. 230–242. doi: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20
46. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Исследование стратификации гидродинамических полей для слоистых течений вертикально завихренной жидкости // DReaM. 2020. Вып. 4. С. 62–78. doi: 10.17804/2410-9908.2020.4.062-078

References

1. Hagen G. (1839) Über die Bewegung des Wasser in engen cylindrischen Röhren. *Annalen der Physik*. 46. pp. 423–442.

2. Poiseuille J.-L.-M. (1840) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. 11. pp. 961–967, pp. 1041–1048.
3. Poiseuille J.-L.-M. (1841) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite). *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. 12. pp. 112–115.
4. Volarovich M.P. (1947) Raboty Puazeylya o techenii zhidkosti v trubakh [Poiseuille's work on a fluid flow in pipes]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya fizicheskaya*. 1. pp. 7–18.
5. Pedley T.J. (1980) *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge–New York–Melbourne: Cambridge University Press.
6. Regirer S.A. (1984) Quasi-one-dimensional theory of peristaltic flows. *Fluid Dynamics*. 19(5). pp. 747–754.
7. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. (2002) *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. London: Taylor & Francis.
8. Knyazev D.V., Kolpakov I.Yu. (2015) Tochnye resheniya zadachi o techenii vyazkoy zhidkosti v tsilindricheskoy oblasti s menyayushchimsya radiusom [The exact solutions of the problem of a viscous fluid flow in a cylindrical domain with varying radius]. *Nelineynaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 11(1). pp. 89–97.
9. Aristov S.N., Knyazev D.V. (2007) New exact solution of the problem of rotationally symmetric Couette-Poiseuille flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48(5). pp. 680–685. DOI: 10.1007/s10808-007-0087-7.
10. Fomin A.A., Fomina L.N. (2014) Chislennoe modelirovanie techeniya zhidkosti v ploskoy kaverne pri bol'shikh chislakh Reynol'dsa [Numerical simulation of viscous 2d lid-driven cavity flow at high Reynolds numbers]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 7(4). pp. 363–377. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.35.
11. Boiko A.V., Kirilovskiy S.V., Maslov A.A., Poplavskaya T.V. (2015) Engineering modeling of the laminar–turbulent transition: achievements and problems (review). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(5). pp. 761–776. DOI: 10.1134/S002189441505003X.
12. Stankevich Yu.A., Fisenko S.P. (2011) Perestroyka profilya Puazeylya v neizotermicheskikh techeniyakh v reaktore [Reconstruction of the Poiseuille profile in nonisothermal flows in a reactor]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(6). pp. 1225–1228.
13. Savenkov I.V. (2011) Instability of the two-dimensional Poiseuille flow between elastic plates. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 51(12). pp. 2155–2161. DOI: 10.1134/S0965542511120177.
14. Troshkin O.V. (2012) K nelineynoy ustoychivosti techeniy Kuetta, Puazeylya i Kolmogorova v ploskom kanale [Nonlinear stability of Couette, Poiseuille, and Kolmogorov flows in a plane channel]. *Doklady Akademii nauk*. 443(1). p. 29.
15. Proskurin A.V., Sagalakov A.M. (2012) Ustoychivost' techeniya Puazeylya pri nalichii prodol'nogo magnitnogo polya [Stability of Poiseuille flow in the presence of a longitudinal magnetic field]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics*. 82(5). pp. 29–35.
16. Chefranov S.G., Chefranov A.G. (2014) Ustranenie paradoksa lineynoy ustoychivosti techeniya Khagena-Puazeylya i vyazkiy dissipativnyy mekhanizm vozniknoveniya turbulentnosti v pogranichnom sloye [Hagen-Poiseuille flow linear stability paradox resolving and viscous dissipative mechanism of the turbulence emergence in the boundary layer]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki – Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 146(2). pp. 373–383.
17. Savenkov I.V. (2015) Axisymmetric instability of the Poiseuille-Couette flow between concentric cylinders at high Reynolds numbers. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 55(2). pp. 291–297. DOI: 10.1134/S0965542515020177.

18. Skul'skiy O.I., Aristov S.N. (2004) *Mekhanika anomal'no vyazkikh zhidkostey* [Mechanics of abnormally viscous fluids]. Ekaterinburg: Izdatel'stvo UrO RAN.
19. Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Makarova M.A., Pyshnograd G.V. (2007) Obobshchenie zakona Puazeilya dlya ploskoparallel'nogo techeniya vyazkouprugikh sred [Generalization of the Poiseuille law for a plane-parallel flow of viscoelastic media]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 13(4). pp. 581–590.
20. Aristov S.N., Shvarts K.G. (2006) *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical flows of advective nature in a rotating fluid layer]. Perm: Perm State University Publ.
21. Aristov S.N., Shvarts K.G. (2016) Advective flow in a rotating liquid film. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(1). pp. 188–194. DOI: 10.1134/S0021894416010211.
22. Ostroumov G.A. (1958) *Free Convection under the Condition of the Internal Problem*. National Advisory Committee for Aeronautics. Washington: NACA Technical Memorandum 1407.
23. Birikh R.V. (1966) Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 7. pp. 43–44.
24. Biri R.V., Puhnachev V.V. (2011) An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient. *Doklady Physics*. 56(1). pp. 47–52. DOI: 10.1134/S1028335811010095.
25. Biri R.V., Puhnachev V.V. (2015) Convective flow in a horizontal channel with non-Newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient. *Fluid Dynamics*. 50(1). pp. 173–179. DOI: 10.1134/S0015462815010172.
26. Pukhnachev V.V. (2011) Nestatsionarnye analogi resheniya Birikha [Non-stationary analogues of the Birikh solution]. *Izvestiya AltGU – Izvestiya of Altai State University*. 1–2. pp. 62–69.
27. Andreev V.K. (2010) *Resheniya Birikha uravneniy konveksii i nekotorye ego obobshcheniya* [The Birikh solution of the convection equations and some of generalizations]. Krasnoyarsk: IVM SO RAN Publ.
28. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. (2013) Stability of non-isothermal fluids (Review). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54(2). pp. 171–184. DOI: 10.1134/S0021894413020016.
29. Shvarts K.G. (2014) Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*. 49 (4). pp. 438–442. DOI: 10.1134/S0015462814040036.
30. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. (2013) O sloistykh techeniyakh ploskoy svobodnoy konveksii [On laminar flows of planar free convection]. *Nelineynaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 9(4). pp. 651–657.
31. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2019) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 23(2). pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
32. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 24(3). pp. 528–541. DOI: 10.14498/vsgtu1770.
33. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 54(1). pp. 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
34. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. (2015) Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Computational Continuum Mechanics*. 8(4). pp. 445–456. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.

35. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y., Spevak L.F. (2016) Unsteady-state Bénard-Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 50(2). pp. 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.
36. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Tochnoe reshenie uravneniy Nav'e–Stoksa, opisyvayushchee prostranstvenno neodnorodnye techeniya vrashchayushcheyasya zhidkosti [Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN – Proceedings of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS*. 26(2). pp. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
37. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”*. 32. pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 3. pp. 29–46. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.
39. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. (2016) Neodnorodnoe konvektivnoe techenie Kuetta [Inhomogeneous convective Couette flow]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*. 5. pp. 3–9. DOI: 10.7868/S0568528116050030.
40. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. (2014) Neodnorodnye techeniya Kuetta [Inhomogeneous Couette flow]. *Nelineynaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 10(2). pp. 177–182.
41. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. (2019) Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 15(3). pp. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
42. Marshall J., Hill C., Perelman L., Adroft A. (1997) Hydrostatic, quasi-hydrostatic and non-hydrostatic ocean modeling. *Journal of Geophysical Research*. 102(3). pp. 5733–5752.
43. Gill A.E. (1982) *Atmosphere-Ocean Dynamics*. New York: Academic Press.
44. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. (2019) Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 60(6). pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.
45. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. (2019) Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Computational Continuum Mechanics*. 12(2). pp. 230–242. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
46. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Studying the stratification of hydrodynamic fields for laminar flows of vertically swirling fluids. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 4. pp. 62–78. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.4.062-078.

Сведения об авторах:

Бурмашева Наталья Владимировна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник сектора нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения УрО РАН; доцент Уральского гуманитарного института Уральского федерального университета, Екатеринбург, Россия. E-mail: nat_burm@mail.ru

Дьячкова Анастасия Викторовна – инженер сектора нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения УрО РАН; магистрант Института естественных наук и математики Уральского федерального университета, Екатеринбург, Россия. E-mail: larinakaterina@hotmail.com

Просвирыков Евгений Юрьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник сектора нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения УрО РАН; профессор Института фундаментального образования Уральского федерального университета, Екатеринбург, Россия. E-mail: evgen_pros@mail.ru

Information about the authors:

Burmasheva Natal'ya V. (Candidate of Technical Sciences, Institute of Engineering Science UB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: nat_burm@mail.ru

Dyachkova Anastasiya V. (Institute of Engineering Science UB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: larinakaterina@hotmail.com

Prosviryakov Evgeniy Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Engineering Science UB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: evgen_pros@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.07.2021; принята к публикации 19.05.2022

The article was submitted 07.07.2021; accepted for publication 19.05.2022