

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/77/7

Определение упругих полей в трансверсально-изотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил

Дмитрий Алексеевич Иванычев

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия, Lsivdml@mail.ru

Аннотация. Представлена методика определения напряженно-деформированного состояния анизотропных тел вращения, возникающего от действия неосесимметричных стационарных объемных сил, заданных по циклическому закону. Предложен способ формирования базиса, по которому искомое упругое состояние раскладывается ряд Фурье, коэффициенты которого представляют собой квадратуры. Решены конкретные задачи для конечного кругового цилиндра. Полученные характеристики упругого поля зависят от трех координат и имеют аналитический вид.

Ключевые слова: метод граничных состояний, трансверсально-изотропные материалы, объемные силы, пространство состояний, неосесимметричная деформация

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p_a".

Для цитирования: Иванычев Д.А. Определение упругих полей в трансверсально-изотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 86–100. doi: 10.17223/19988621/77/7

Original article

Determination of the elastic fields induced by body forces in transtropic bodies of revolution

Dmitriy A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation, lsivdml@mail.ru

Abstract. The paper presents a method for determining the stress-strain state of transversely isotropic bodies of revolution under the action of non-axisymmetric stationary body forces. This problem solution involves the use of boundary state method definitions. The basis of the space of internal states is formed using the fundamental polynomials. The polynomial is placed in any position of a displacement vector of the plane auxiliary state; the spatial state is determined by transition formulas. A set of such states forms a finite-dimensional basis, in which after orthogonalization, the desired state is expanded

into Fourier series with the same coefficients. The series coefficients are scalar products of the vectors of given and basic body forces. Finally, the determination of the elastic state is reduced to solving quadratures.

The solutions to problems of elasticity theory for a transversely isotropic circular cylinder are analyzed in terms of the action of body forces given by various cyclic laws (sine and cosine). Recommendations are given for constructing the basis of internal states depending on the type of the function of the given body forces. The analysis of the series convergence and the estimation of the solution accuracy are given in a graphical form.

Keywords: boundary state method, transversely isotropic materials, body forces, state space, non-axisymmetric deformation

Acknowledgments: The study was funded by RFBR and Lipetsk Region (project No. 19-41-480003).

For citation: Ivanychev, D.A. (2022) Determination of the elastic fields induced by body forces in transtropic bodies of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 86–100. doi: 10.17223/19988621/77/7

Развитие существующих и создание новых методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тел из сложных по структуре и реологии материалов по большей части опирается на общее или фундаментальное решение той или иной задачи теории упругости. Фундаментальный вклад в создание общих решений для анизотропной среды внесли С.Г. Лехницкий, А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев, А.С. Космодамианский и др. Однако эти решения были разработаны еще в прошлом столетии. Естественно, что современными учеными получены решения частных задач, которые могут быть применены для построения математических моделей на основе различных методов механики. Особенно это касается аналитических или численно-аналитических методов, которые позволяют получить решение в виде функции нескольких переменных (координаты, времени, температуры и др.). Развитие именно аналитических методов в последнее время преобладает над численными методами, где результатом решения является таблица значений той или иной величины во всей (а порой и не во всей) области тела.

В области реализации различных методов анализа НДС эластостатических тел с учетом влияния объемных сил можно выделить следующие исследования. В статье [1] исследовалось изотропное упругое тело, ограниченное концентрическими сферами и находящееся под действием осесимметричных нестационарных объемных сил. В работах [2, 3], используя разложения компонент вектора перемещений в ряды по окружной и радиальной координатам, получены аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер, находящихся под действием внутреннего давления и массовых сил. В работе [4] исследовались вынужденные деформации, возникающие от воздействий поверхностных и объемных сил. В [5] в дополнение к двум комплексным потенциалам Колосова–Мусхелишвили предложен третий потенциал, учитывающий влияние массовых сил. Приводятся аналитические решения некоторых задач плоской деформации. Работа [6] посвящена развитию метода ортогональных проекций. Исследовались задачи теории упругости с участием объемных и поверхностных сил в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций.

В работах [7, 8] редуцирован метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия объемных сил непотенциального характера.

Для трансверсально-изотропных тел, ограниченных коаксиальными поверхностями вращения, средствами метода граничных состояний решены первая основная [9] и вторая основная [10] задачи теории упругости при одновременном действии на тело массовых сил. По идентичной методике решена контактная задача [11].

Определению упругих полей от действия осесимметричных массовых сил на трансверсально-изотропное тело вращения вкупе с действием поверхностных сил и установившегося поля температур посвящены работы [12, 13].

Цель данной работы – развитие аналитического метода определения НДС, предложенного в работе [7], на класс трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием объемных сил, заданных по циклическому закону. Объемные силы носят неосесимметричный характер и зависят от трех цилиндрических координат.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения (рис. 1), под действием неосесимметричных объемных сил $X = \{R, Q, Z\}$, заданных по циклическому закону. Ось анизотропии трансверсально-изотропного тела совпадает с геометрической осью вращения z .

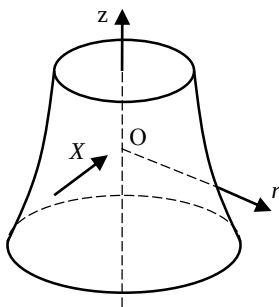


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения
Fig. 1. A transversely isotropic body of revolution

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле под действием объемных сил.

2. Определяющие соотношения

В общем случае деформации трансверсально-изотропного тела в цилиндрической системе координат r, θ, z имеют место следующие соотношения.

Дифференциальные уравнение равновесия [14]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [15]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= 0; \\ -\frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z}) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [14]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь: u, v, w – компоненты вектора перемещения вдоль осей r, θ, z соответственно; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{zr}, \gamma_{z\theta}$ – компоненты тензора деформаций; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ – компоненты тензора напряжений; R, Q, Z – компоненты вектора объемных сил $\mathbf{X}$ вдоль соответствующих осей; E_z и E_r – модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси r при растяжении вдоль оси z ;

ν_r – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G_r и G_z – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

3. Общее решение

В работе [14] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которых зависят от двух координат z и y (переменных). Ось η перпендикулярна плоскости zy . В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_z^{pl}\}$, возникающая в бесконечных цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление η).

Переход к пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta; \quad y = r \cos(\beta). \\ u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + u_n \sin(n\theta)]; \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + v_n \cos(n\theta)]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)], \end{aligned} \quad (5)$$

где a и b – пределы суммирования.

Деформации вычисляются через соотношения Коши (2), напряжения – через закон Гука (3), объемные силы – из уравнений равновесия (1).

4. Метод решения

Определение упругого состояния анизотропного тела осуществляется средствами, схожими со средствами метода граничных состояний (МГС) [16]. В качестве базиса в пространстве внутренних состояний Ξ принимаются наборы

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}, \quad \xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, X_i^{(k)}\}.$$

В работах [12, 13] изложен метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от действия неконсервативных непрерывных объемных сил. Здесь используем тот же подход.

Для построения поля перемещений для тела от действия объемных сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная система многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, образуя некоторое допустимое упругое состояние:

$$\mathbf{u}^{pl} = \begin{Bmatrix} u_y^{pl} \\ u_\eta^{pl} \\ u_z^{pl} \end{Bmatrix} \in \left\{ \begin{Bmatrix} y^\alpha z^\beta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ y^\alpha z^\beta \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\alpha z^\beta \end{Bmatrix} \right\}.$$

Далее согласно (5) и (6) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r, \theta, z)$ пространственного состояния, и по цепочке (2), (4), (1) определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и объемные силы.

Осуществляя перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), можно получить множество состояний и сформировать конечномерный базис, позволяющий разложить произвольный вектор непрерывных объемных сил в ряд Фурье по его элементам при увеличении числа n до бесконечности.

После построения базиса состояний проводится его ортонормирование, используя рекурсивно-матричный алгоритм ортогонализации [17]. Алгоритм реализует процесс ортогонализации Грама–Шмидта, в котором перекрестные скалярные произведения (например, для 1-го и 2-го состояний) вычисляются по формуле

$$(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = \int_V \mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{X}^{(2)} dV;$$

$$\mathbf{X}^{(k)} = X_i^{(k)} = \{R^{(k)}(r, \theta, z), Q^{(k)}(r, \theta, z), Z^{(k)}(r, \theta, z)\}.$$

Любой непрерывный вектор объемных сил может быть представлен в виде ряда Фурье, разложенного по элементам ортонормированного базиса:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}^{(k)}; \quad c_k = (\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(k)}), \quad (7)$$

где $\mathbf{X} = \{R, Q, Z\}$ – заданные объемные силы.

Каждому базисному вектору $\mathbf{X}^{(k)}$ соответствуют вектор перемещения и тензоры деформаций и напряжений, в совокупности образующие внутреннее состояние от действия объемных сил

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

или в развернутом виде:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^{(k)}. \quad (8)$$

Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой объемных сил одного из базисных элементов в качестве заданных, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$, n – номер тестируемого базисного элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

5. Решение задач

Исследуем упругое равновесие трансверсально-изотропного кругового цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [18]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи (с масштабным коэффициентом $\eta^* = 10^5$ кгс/см²), аналогия которой представлена в работе [19], упругие характеристики материала составили: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_r = 2.29$; $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$. Цилиндр занимает область $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

Для решения задачи, когда все три компоненты заданного вектора объемных сил не равны нулю, требуется довольно большой «отрезок» базиса внутренних состояний. В этом случае целесообразно воспользоваться принципом независимости действия сил и решить три отдельных задачи, в каждой из которых заданы $\mathbf{X} = \{R, 0, 0\}$, $\mathbf{X} = \{0, Q, 0\}$, $\mathbf{X} = \{0, 0, Z\}$, а полученные упругие поля сложить.

При практической реализации приема решения задач и его тестировании при различных видах функций заданных объемных сил оказалось, что не для любого вида функций объемных сил существует решение. Возможность получения строгого или приближенного решения зависит от способа формирования базиса.

В общем случае формирования базиса внутренних состояний в выражениях (6) суммирование осуществляется от $a = 0$, до $b = \infty$. При построении базиса необходимо стремиться к наибольшей простоте вида функций, описывающих компоненты упруго поля. Поэтому рассмотрим сначала базис, формируемый из левых частей выражений (6), с пределами суммирования $a = 0$ и $b = 1$:

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)]. \quad (9)$$

В данном случае задача будет разрешима, если заданные объемные силы R, Q, Z содержат тригонометрические функции $\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta$ соответственно, например:

$$R = r^m z^k (1 - p \cos \theta); \quad m, k \in N; \quad p \in Z. \quad (10)$$

В противном случае скалярные произведения и коэффициенты Фурье (7) будут равны нулю.

Если формировать базис из правых частей выражений (6) с пределами суммирования $a = 0$ и $b = 1$:

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \sin(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [v_n \cos(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \sin(n\theta)], \quad (11)$$

то приближенное решение возможно получить, если объемные силы R, Q, Z содержат тригонометрические функции $\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta$ соответственно.

Если в выражениях (9) и (11) использовать пределы суммирования $a = 1$ и $b = 1$, то объемные силы вида (10) восстановить нельзя, в этом случае приближенное решение задачи ищется для функции вида $r^m z^k p \cos \theta$ или $r^m z^k p \sin \theta$.

Если объемные силы имеют вид $r^m z^k (\cos \theta + \sin \theta)$, то уже необходимо использовать выражения (6) в полной мере с пределами суммирования $a = 0$ и $b = 1$. При этом возможно получение не только приближенных, но и строгих решений.

Для последнего случая и приведем пример решения задачи, когда задана объемная сила

$$\mathbf{X} = \{r^3 z^2 (\sin \theta + \cos \theta), 0, 0\}. \quad (12)$$

После построения базиса по соотношениям (6), исключения базисных элементов, для которых $\mathbf{X} = 0$, а также линейно зависимых элементов, в процессе ортогонализации, базисные компоненты объемных сил примут вид, представленный в таблице (показано 7 элементов).

Ортонормированный базисный компонент объемной силы

Номер элемента	R	Q	Z
ξ_1	$-0.2(\cos \theta + \sin \theta)$	$-0.2(\cos \theta - \sin \theta)$	0
ξ_2	0	0	-0.282
ξ_3	$-0.172z(\cos \theta + \sin \theta)$	$-0.172z(\cos \theta - \sin \theta)$	0
ξ_4	0	0	-0.244z
ξ_5	-0.399r	0	0
ξ_6	0	-0.399r	0
ξ_7	0	0	-0.399r(\cos \theta + \sin \theta)

Используем базис внутренних состояний из 50 элементов. Ненулевые коэффициенты Фурье: $c_1 = -1.3368$; $c_8 = -1.1957$; $c_{13} = -1.8712$; $c_{14} = 0.4678$; $c_{32} = -1.6736$; $c_{33} = 0.4184$; $c_{38} = -0.2684$; $c_{39} = 0.0671$. Решение формируется соотношениями (8).

Оценка точности осуществляется сопоставлением заданных объемных сил (рис. 2, штриховая линия) с восстановленными в результате решения (сплошная линия).

Согласно первому графику рис. 2, максимальная погрешность находится в точках $\pi/4$ и $5\pi/4$, поэтому для оценки точности восстановленной силы R в зависимости от r и z целесообразно провести для сечения с угловой координатой $\pi/4$ (графики 3, 5 на рис. 2). На втором графике рис. 2 максимальная погрешность находится в точке $3\pi/4$, поэтому верификация силы Q в зависимости от r и z рассматривается в сечении с угловой координатой $3\pi/4$ (графики 4, 6 на рис. 2).

Максимальная погрешность задачи составила 25% и определена в точке $(1, \pi/4, 0)$ (график 5 на рис. 2). Погрешность преодолевается путем увеличения числа используемых элементов базиса. При использовании базиса из 70 элементов добавляется два ненулевых коэффициента Фурье: $c_{69} = -0.24$; $c_{70} = 0.06$, – и точность решения значительно повышается. На рис. 3 изображены графики 5 и 6 рис. 2 при 70 удержанных элементах базиса.

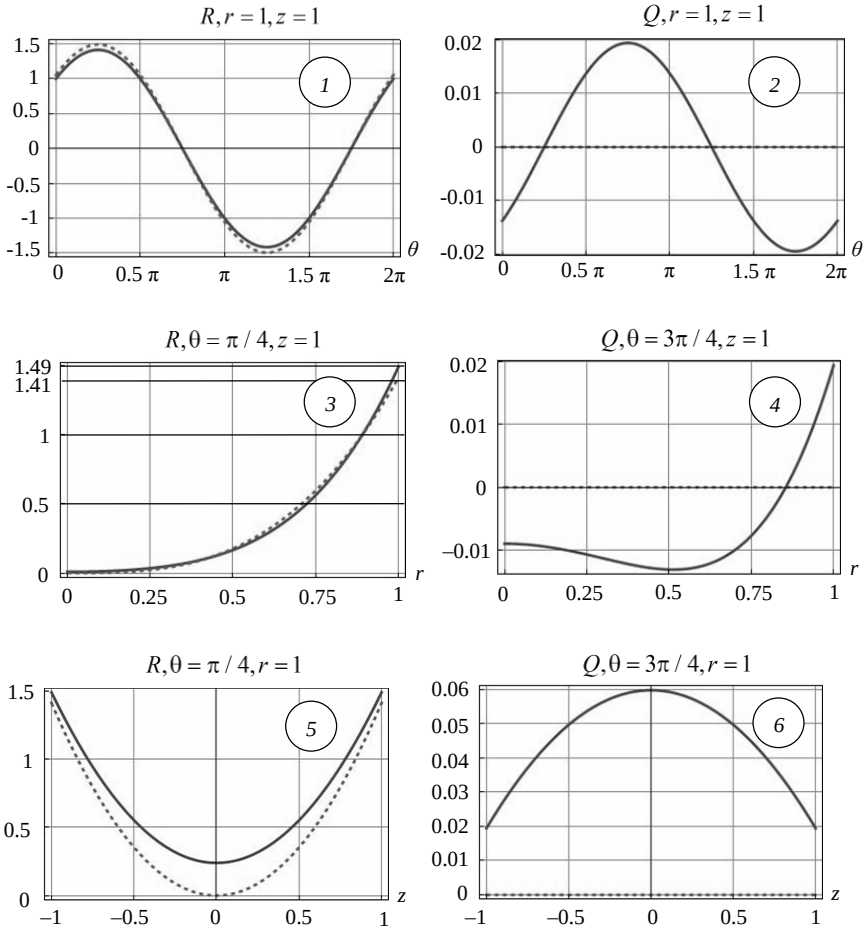


Рис. 2. Верификация объемных сил при 50 удержанных элементах базиса
Fig. 2. Verification of body forces with 50 elements of the basis kept

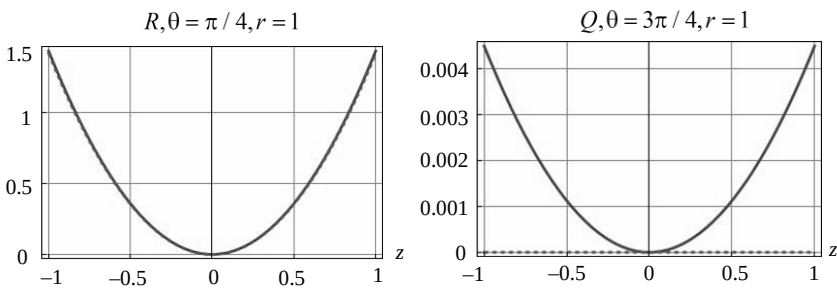


Рис. 3. Верификация объемных сил при 70 удержанных элементах базиса
Fig. 3. Verification of body forces with 70 elements of the basis kept

Окончательное внутреннее состояние ξ_0 построено на 70 базисных элементах и имеет вид:

$$\begin{aligned} u_0 &= (31.123z^4 - 1369.44r^2z^4 - 1971.16r^4z^4 + 165.557z^6 + \\ &\quad + 1390.77r^2z^6 - 74.417z^8)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ v_0 &= (31.123z^4 - 124.494r^2z^4 + 103.745r^4z^4 + 165.557z^6 + \\ &\quad + 264.805r^2z^6 - 74.417z^8)(\cos\theta - \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ w_0 &= (500.016rz^5 + 1250.04r^3z^5 - 436.69rz^7)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ R_0 &= (-952.381z^2 + 4190.8r^2z^2 + 60317.5r^4z^2)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ Q_0 &= (-952.381z^2 + 3809.5r^2z^2 - 3174.6r^4z^2)(\cos\theta - \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ Z_0 &= 0. \end{aligned}$$

Приближенное решение можно получить и для объемной силы вида $r^m(z+p)^k \cos\theta$ или $r^m(z+p)^k \sin\theta$, а при $m=k=2$ – строгое.

Если при $\sin$ и $\cos$ в выражении (12) разные коэффициенты, например $r^m z^k (p \sin\theta + l \cos\theta)$, то решение получить не удастся. Это связано с одинаковыми коэффициентами (единица) при соответствующих функциях в базисных выражениях (6).

В случае, когда объемные силы зависят от $\sin(n\theta)$ или $\cos(n\theta)$, $n=2, 3, \dots$, в выражениях (6), (9), (11) необходимо использовать пределы суммирования $a=b=n$.

Рассмотрим функцию, описывающую, например, объемную силу R следующего вида: $R = r^m z^k p \cos(n\theta)$. Особенность решения при $n > 1$ заключается в том, что восстановленные объемные силы отличаются по амплитуде от заданных на некоторую константу – корректирующий коэффициент κ , который вычисляется через заданную R и восстановленную R_0 компоненты объемных сил для фиксированных координат r и z :

$$\kappa = \frac{R}{R_0} \Big|_{r,z}.$$

Затем все остальные характеристики полученного упругого поля умножаются на коэффициент κ .

Пусть задана объемная сила $\mathbf{X} = \{0, r^2 z \cos(3\theta), 0\}$. Базис формируется с помощью выражений (11), и для решения данной задачи используется 76 элементов базиса (коэффициенты Фурье приводить не будем). Результат представлен графически на рис. 4 (показаны значения объемных сил R , Q на поверхности $r=1, z=1$).

Восстановленные выражения для объемных сил:

$$\begin{aligned} R_0 &= (0.25r^2z - 2r^4z + 5.4r^6z - 6r^8z + 2.357r^{10}z)\sin(3\theta); \\ Q_0 &= (0.25r^2z + 2r^4z - 5.4r^6z + 6r^8z - 2.357r^{10}z)\cos(3\theta); Z_0 = 0. \end{aligned}$$

Корректирующий коэффициент

$$\kappa = r^2 / (0.25r^2 + 2r^4 - 5.4r^6 + 6r^8 - 2.357r^{10}).$$

В данной задаче κ зависит только от r .

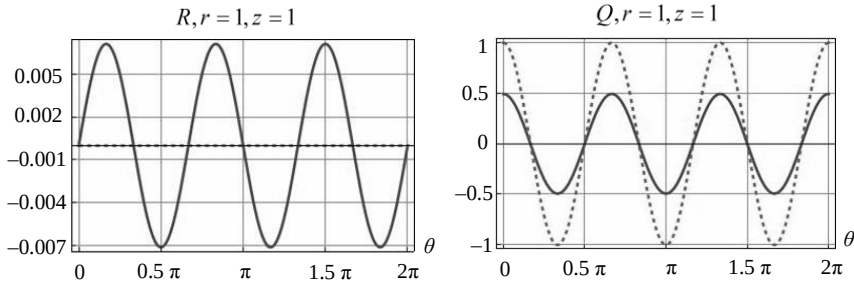


Рис. 4. Верификация объемных сил в задаче с коэффициентом
Fig. 4. Verification of body forces in the problem with a coefficient

Окончательно решение имеет вид: $\xi = \kappa \xi_0$. При $r=1$, $z=1$ коэффициент $\kappa = 2.029$ и погрешность для R увеличилась, однако результат по-прежнему удовлетворителен (максимальная погрешность составила 1.5%).

Заключение

В работе решение задачи теории упругости от действия объемных сил строится следующим образом. Задается зависимость вектора перемещения плоского вспомогательного состояния от координат $y^\alpha z^\beta$, и на его основе определяется вектор перемещения пространственного состояния, зависящего от координат r, θ, z . Для такого вектора по соотношению Коши определяется тензор деформаций, из закона Гука – тензор напряжений, а из уравнения равновесия – объемные силы. Этим строится строгое частное решение задачи, соответствующее заданной в каждой точке тела функции перемещения. Перебирая $\alpha + \beta \leq n$ ($n = 1, 2, 3 \dots$), строится множество строгих частных решений задачи линейной теории упругости: векторы перемещения $\mathbf{u}_k$, тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, тензоры напряжений $\boldsymbol{\sigma}_k$, векторы объемных сил $\mathbf{X}_k$. Оставляя среди этих решений только линейно независимые и осуществляя их ортогонализацию, получаем базис, по которому соответствующие векторы или тензоры разлагаются в ряды с одинаковыми коэффициентами (7). Поэтому изложенный подход позволяет сразу строить решение задачи с заданными объемными силами.

Выбор способа конструирования базиса зависит от вида заданной функции компоненты объемных сил. Для решения задач требуется довольно большой базис внутренних состояний, однако при формировании рядов число ненулевых коэффициентов Фурье невелико.

Таким образом, в работе сформулирован подход решения задачи от действия объемных сил, заданных по циклическому закону. Компоненты упругого поля зависят от всех трех координат и носят неосесимметричный циклический характер.

Список источников

1. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 6. С. 59–69.

2. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015. Казань, 2015. С. 3951–3953.
3. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики // Математическое моделирование в естественных науках. 2015. Т. 1. С. 141–144.
4. Агаханов Э.К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2013. № 2 (29). С. 39–45.
5. Шарафутдинов Г.З. Функции комплексного переменного в задачах теории упругости при наличии массовых сил // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 69–87.
6. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
7. Кузьменко В.И., Кузьменко Н.В., Левина Л.В., Пеньков В.Б. Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, вып. 1. С. 84–94. doi: 10.17223/19988621/61/5
8. Пеньков В.Б., Левина Л.В., Новикова О.С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 56–73. doi: 10.14498/vsgtu1711.
9. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 66. С. 96–111. doi: 10.17223/19988621/66/8
10. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 45–60. doi: 10.17223/19988621/61/5
11. Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.05
12. Ivanychev D.A., Levina E.Yu. Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1348. Art. 012058. 15 p. doi: 10.1088/17426596/1348/1/012058
13. Ivanychev D.A. The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces // Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency. SUMMA 2019. 2019. P. 83–87. doi: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505
14. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
15. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М. : Госиздат техн.-теорет. лит., 1955. 491 с.
16. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
17. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции

- студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2007. С. 130–131.
18. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М. : Наука, 1977. 416 с.
 19. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.

References

1. Vestyak V.A., Tarlakovskiy D.V. (2015) Nestatsionarnoe osesimmetrichnoe deformirovanie uprugoy tolstostennoy sfery pod deystviyem ob'yomnykh sil [Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(6). pp. 59–69.
2. Fukalov A.A. (2015) Zadachi ob uprugom ravновесии sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviem massovykh sil i vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems on elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications]. *XI All-Russian Congress on Fundamental Problems in Theoretical and Applied Mechanics, Kazan, 2015*. pp. 3951–3953.
3. Zaytsev A.V., Fukalov A.A. (2015) Tochnye analiticheskie resheniya zadach o ravновесии uprugikh anizotropnykh tel s tsentral'noy i osevoy simmetriey, nakhodyashchikhsya v pole gravitatsionnykh sil, i ikh prilozheniya k zadacham geomekhaniki [Exact analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic bodies with central and axial symmetry in the field of gravitational forces, and their applications to problems of geomechanics]. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh*. 1. pp. 141–144.
4. Agakhanov E.K. (2013) O razvitiі kompleksnykh metodov resheniya zadach mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela [About development of complex decision methods of the problems of deformable solid body mechanics]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2(29). pp. 39–45. DOI: 10.21822/2073-6185-2013-29-2-39-45.
5. Sharafutdinov G.Z. (2009) Funktsii kompleksnogo peremennogo v zadachakh teorii uprugosti pri nalichii massovykh sil [Functions of a complex variable in problems of elasticity theory in the presence of mass forces]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 73(1). pp. 69–87.
6. Struzhanov V.V. (2004) O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsiy [On the solution of boundary value problems in the theory of elasticity by the method of orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 12. pp. 89–100.
7. Kuz'menko V.I., Kuz'menko N.V., Levina L.V., Pen'kov V.B. (2019) Sposob resheniya zadach izotropnoy teorii uprugosti s ob'yomnymi silami v polinomial'nom predstavlenii [A method for solving problems of the isotropic theory of elasticity with body forces in a polynomial representation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 83(1). pp. 84–94. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
8. Pen'kov V.B., Levina L.V., Novikova O.S. (2020) Analiticheskoe reshenie zadach elastostatiki odnosvyaznogo tela, nagruzhennogo nekonservativnymi ob'yomnymi silami. Teoreticheskoe i algoriticheskoe obespechenie [Analytical solution of problems of elastostatics of a simply connected body loaded with non-conservative volumetric forces. Theoretical and algorithmic support]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya «Fiziko-*

- matematicheskie nauki» – Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences.* 24(1). pp. 56–73. DOI: 10.14498/vsgtu1711.
9. Ivanychev D.A. (2020) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii pervoy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [A method of boundary states in a solution to the first fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i. mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 66. pp. 96–111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.
 10. Ivanychev D.A. (2019) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [A method of boundary states in a solution to the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i. mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 61. pp. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
 11. Ivanychev D.A. (2019) Resheniye kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin.* 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/per.mech/2019.2.05.
 12. Ivanychev D.A., Levina E.Yu. (2019) Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force. *Journal of Physics: Conference Series.* 1348. Article 012058. pp. 1–15. DOI: 10.1088/17426596/1348/1/012058.
 13. Ivanychev D.A. (2019) The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces. *Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency. SUMMA 2019.* pp. 83–87. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505.
 14. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Three-dimensional problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
 15. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Three-dimensional problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gostekhizdat.
 16. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [A method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal.* 2(2). pp. 115–137.
 17. Satalkina L.V. (2007) Narashchivaniye bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoyomkosti vychisleniy [Expansion of the state space basis with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Book of Abstracts of Scientific Conference for Students and Postgraduate Students of Lipetsk State Technical University.* pp. 130–131.
 18. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
 19. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnparametricheskoe resheniye zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ograniченного tela [Full-parameter solution to the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of LGTU.* 2(28). pp. 16–24.

Сведения об авторе:

Иванычев Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета, Липецк, Россия. E-mail: Lsivdml@mail.ru

Information about the author:

Ivanychev Dmitriy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdmal@mail.ru

Статья поступила в редакцию 20.03.2021; принята к публикации 19.05.2022

The article was submitted 20.03.2021; accepted for publication 19.05.2022