

Научная статья

УДК 531.39, 52-17

doi: 10.17223/19988621/77/9

Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве

Никита Андреевич Попандопуло¹, Анна Геннадьевна Александрова²,
Т.В. Бордовицына³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ nikas.popandopulos.com

² aleksann@sibmail.com, aleksandrovaannag@mail.ru

³ tvbord@sibmail.com

Аннотация. Представлены результаты выявления вековых и полuveковых резонансов, действующих на искусственные спутники Луны. Приведены результаты анализа данных большого численного эксперимента по исследованию динамической эволюции модельных окололунных объектов с орбитами в диапазоне от 1 911.8 до 26 070 км по большой полуоси и с наклонениями от 0 до 180°, равномерно распределенных в космическом пространстве Луны. Даны карты распределения выявленных вековых резонансов. Представлена карта наложения всех рассмотренных в данной работе резонансов. Полученные результаты будут полезными при построении целостной динамической структуры окололунного орбитального пространства.

Ключевые слова: окололунное пространство, искусственные спутники Луны, динамическая структура, вековые и полuveковые резонансы, карты резонансов

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-72-10022).

Для цитирования: Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9

Original article

Analysis of a dynamic structure of secular resonances in circumlunar orbital space

Nikita A. Popandopulo¹, Anna G. Aleksandrova²,
Tat'yana V. Bordovitsyna³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ nikas.popandopulos.com

² aleksann@sibmail.com, aleksandrovaannag@mail.ru

³ tvbord@sibmail.com

Abstract. When developing new circumlunar satellite systems for various purposes, it is necessary to know the dynamic features of various regions of circumlunar space. It is noted that one of the main features of the dynamics of artificial Moon satellites (AMS) is the increase in the eccentricity of their orbits. It is known that such orbital evolution of objects can be caused by resonant perturbations. In this regard, the purpose of this paper is to study the influence of secular and half-secular resonances occurring on the AMS. The results are obtained by means of the processing of data from an extensive numerical experiment to study the orbital evolution of the uniformly distributed circumlunar objects moving in the range of large semi-axes from 1911.8 to 26070 km and with inclinations from 0 to 180°.

The study of the influence of secular and half-secular resonances on the orbital evolution of the AMS is carried out using numerical and analytical techniques. Both techniques have advantages and disadvantages and are used in the study.

Maps of secular and half-secular resonances are of great practical importance. They clearly demonstrate the areas of influence of secular resonances on the orbital evolution of circumlunar objects depending on the initial values of the semimajor axis and inclination of the orbits of objects. The analysis of each particular resonance consists in the revealing of a resonant characteristic type, which is determined by the nature of the change in a critical argument: libration – stable resonance, libration/circulation – unstable resonance, and circulation – no resonance.

To estimate the whole range of the influence of resonances on the AMS dynamics, maps of their overlaps are built. The maps allow one to determine areas with significant influence of the resonances on the orbital evolution of circumlunar objects. The obtained results show that the reason for a large increase in the eccentricity in a vast area of circumlunar orbital space is the presence of the stable apsidal resonance of the Kozai–Lidov type.

Keywords: circumlunar space, artificial satellites of the Moon, dynamic structure, secular and half-secular resonances, resonance maps

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-72-10022).

For citation: Popandopulo, N.A., Aleksandrova, A.G., Bordovitsyna, T.V. (2022) Analysis of a dynamic structure of secular resonances in circumlunar orbital space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9

Введение

В настоящее время в связи с планируемым международным научным сообществом, и Россией в том числе, освоением Луны стала весьма актуальной задача исследования динамических особенностей различных областей окололунного пространства. Знание этих особенностей необходимо при разработке, размещении и эксплуатации окололунных спутниковых систем различного назначения.

Для выявления особенностей динамики искусственных спутников Луны (ИСЛ) был проведен обширный численный эксперимент. Мы рассмотрели орбиты в диапазоне больших полуосей от 1.1 до 15 радиусов Луны с наклонениями от 0 до 180°. С помощью программного комплекса «Численная модель движения ИСЛ», раз-

работанного авторами статьи [1], проводилось прогнозирование динамической эволюции порядка 5 тыс. окололунных объектов на 10-летнем интервале времени. В ходе исследования в качестве возмущений, оказывающих влияние на движение ИСЛ, учитывались: несферичность селенопотенциала до гармоник 50-х порядка и степени, притяжение Солнца и Земли, рассматриваемых как материальные точки.

В одной из наших предыдущих работ было отмечено, что у значительной части окололунных спутников наблюдается рост эксцентриситетов орбит [1]. Как правило, такая особенность орбитальной эволюции может быть следствием влияния открытых в 1962 г Г. Куком [2] вековых резонансов на динамику околопланетных объектов [3–8]. В связи с этим мы детально рассмотрели данный вопрос. В настоящей работе приведены результаты исследования по выявлению областей действия вековых и полuveковых резонансов низких порядков в окололунном орбитальном пространстве.

Методика исследования вековых резонансов

Исследование структуры вековых резонансов осуществлялось при помощи объединенной методики [1, 9], включающей в себя аналитический и численный подходы, детально изложенные в наших более ранних работах (см. напр.: [10, 11]).

В работе [9] мы обосновали необходимость совместного применения аналитического и численного подходов определения вековых частот в процессе выявления вековых резонансов в динамике околопланетных объектов. Дадим описание методики.

Запишем аргумент возмущающей функции в виде:

$$\psi = (l - 2p' + q')\lambda' - (l - 2p + q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi + (\bar{m} - l + 2p')\Omega' - (\bar{m} - l + 2p)\Omega. \quad (1)$$

Здесь $\lambda = \varpi + M$, $\lambda' = \varpi' + M'$ – средние долготы спутника и третьего тела соответственно, $\varpi = \Omega + \omega$, $\varpi' = \Omega' + \omega'$ – долготы перицентра спутника и возмущающего тела (здесь и далее элементы без штриха относятся к орбите спутника, а со штрихом – к орбите третьего тела). Наклонения и долготы восходящего узла i , Ω , i' , Ω' отнесены к экватору Луны.

Аргумент разложения возмущающей функции в ряд в однократно осредненной задаче запишется в виде:

$$\underline{\psi} = (l - 2p' + q')M' - (l - 2p)\omega + (l - 2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \quad (2)$$

а в двукратно осредненной задаче запишется как

$$\underline{\underline{\psi}} = (l - 2p')\omega' - (l - 2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega'). \quad (3)$$

Условие возникновения резонанса может быть представлено следующими выражениями:

$$\underline{\dot{\psi}} \approx 0, \quad \underline{\underline{\dot{\psi}}} \approx 0. \quad (4)$$

Будем называть выражения (4) резонансными соотношениями (РС), а соотношения (2) и (3) – критическими, или резонансными, аргументами.

Взяв производные от (2), (3), получим левые части резонансных соотношений из (4), определяющие наличие вековых резонансов для однократно и двукратно осредненных задач трех тел, в данной работе это системы тел: Луна–спутник–

Земля; Луна–спутник–Солнце. Под типом резонансного соотношения будем понимать левую часть РС (4).

Далее путем моделирования движения ИСЛ с учетом влияния селенопотенциала, притяжения Земли (E) и Солнца (S) будем проверять наличие этих резонансов в динамике окололунных объектов.

В табл. 1 представлены типы апсидально-нодальных резонансов с 1-го по 4-й порядок, а типы вековых резонансов 2–5-го порядков со средним движением возмущающих тел даны в табл. 2.

Таблица 1

Типы апсидально-нодальных резонансов 1–4-го порядков

№	Тип РС	№	Тип РС
1	$\dot{\omega}$	6	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E$
2	$\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$	7	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega}$
3	$\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$	8	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega}$
4	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	9	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega}$
5	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E$	10	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega}$

Таблица 2

Типы вековых резонансов 2–5-го порядков со скоростью движения Земли и Солнца

№	Тип РС	№	Тип РС	№	Тип РС
1	$\vec{n}'_{E,S} - \dot{\omega}$	5	$\vec{n}'_{E,S} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	9	$\vec{n}'_{E,S} - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$
2	$\vec{n}'_{E,S} + \dot{\omega}$	6	$\vec{n}'_{E,S} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	10	$\vec{n}'_{E,S} + \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$
3	$\vec{n}'_{E,S} - 2\dot{\omega}$	7	$\vec{n}'_{E,S} + \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	11	$\vec{n}'_{E,S} - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$
4	$\vec{n}'_{E,S} + 2\dot{\omega}$	8	$\vec{n}'_{E,S} - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$	12	$\vec{n}'_{E,S} + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$

Как известно, параметры прецессии орбиты Солнца, являющиеся отражением прецессии орбиты Земли, пренебрежимо малы, особенно это касается частоты в долготе перицентра Солнца, поэтому резонансы, содержащие эту частоту, мы исключили из рассмотрения (см. табл. 1).

Элементы орбит в (2)–(3), а также вековые частоты, входящие в формулы (4) и табл. 1, 2, определяются в данной работе двумя способами: численным и аналитическим.

Численный способ

В численном методе используются уравнения Ньютона–Эйлера для вычисления частот спутника [12]:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} W; \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos u}{e} S + \frac{\sin u}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T - \frac{r \sin u}{p \operatorname{tg} i} W. \quad (5)$$

Здесь S , T , W – возмущающие ускорения, записанные в орбитальной системе координат и связанные с правыми частями уравнений движения известными соотношениями [12].

Для определения элементов орбит используется переход от прямоугольных координат к кеплеровским элементам по формулам задачи двух тел [12].

Прогнозирование движения рассматриваемых объектов осуществляется с помощью «Численной модели движения ИСЛ» [1], предназначенной для исследования динамической структуры окололунного космического пространства. Численная модель позволяет учитывать возмущения от селенопотенциала до 1 199-х порядка и степени (в данной работе мы ограничиваемся 50-ми порядком и степенью), влияние приливных деформаций поверхности Луны, гравитационные влияния Земли и Солнца, а также возмущения от светового давления. Дифференциальные уравнения движения интегрируются численно с помощью колокационного интегратора Lobbie [13]. Данный интегратор является усовершенствованной версией высокоточного интегратора Гаусса–Эверхарта [14]. Разработанный нами программный комплекс позволяет проводить высокоточные исследования в динамике ИСЛ, что подтверждается сравнениями, которые можно найти в [1], с работами зарубежных авторов [15, 16], где они представили свои численные модели.

Вековые частоты и элементы орбит возмущающих тел определяются с помощью фонда DE438/LE438 [9, 17]. Для определения частот из фонда извлекаются координаты и скорости возмущающих тел на 12 моментов времени с шагом 1 мин, затем эта сетка координат и скоростей преобразуется в сетки из элементов орбиты $q = \{\Omega', \omega'\}$ по формулам задачи двух тел. После этого с помощью производной от интерполяционного полинома Лагранжа 12-го порядка [18]

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^n x_i \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(t_i - t_j)} \left(\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i, k \neq j}}^n (t - t_k) \right) \quad (7)$$

определяются величины $\dot{\Omega}'$, $\dot{\omega}'$.

Стоит отметить, что вычисления проводятся без введения ограничений на величины входящих в них параметров. Поскольку уравнения (5), как и формулы задачи двух тел, имеют особенности при значениях наклона и эксцентриситета орбиты, близких к нулю, рекомендуется в процессе анализа результатов эксперимента для вычисления вековых частот использовать также аналитический подход, который пригоден для исследования динамики объектов только на орбитах с малым значением эксцентриситета.

Аналитический способ

В этом случае вычисления строятся на предположении, что спутник движется в гравитационном поле Луны, ограниченном второй зональной гармоникой селенопотенциала (J_2), и испытывает возмущения, обусловленные притяжением Земли (E) и Солнца (S), рассматриваемых как материальные точки, движущиеся по эллипсам с вращающимися линиями аписид и узлов.

С учетом вышеназванных предположений для вычисления вековых частот в движении спутника можно использовать формулы

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2} + \dot{\Omega}_E + \dot{\Omega}_S, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_{J_2} + \dot{\omega}_E + \dot{\omega}_S, \quad (8)$$

компоненты $\dot{\Omega}_{J_2}$, определяемые влиянием второй зональной гармоник селенопотенциала J_2 , вычисляются по формулам [19]

$$\dot{\Omega}_{J_2} = -\frac{3}{2} J_2 \bar{n} \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \cos i (1-e^2)^{-2}, \quad \dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}, \quad (9)$$

а компоненты, связанные с влиянием внешних тел – Земли и Солнца, – с применением формул [20]

$$\dot{\Omega}_{E,S} = -\frac{3}{16} \bar{n} \frac{\mu_{E,S}}{\mu} \left(\frac{a}{a_{E,S}} \right)^3 \frac{2+3e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i_{E,S}) \cos i, \quad (10)$$

$$\dot{\omega}_{E,S} = \frac{3}{16} \bar{n} \frac{\mu_{E,S}}{\mu} \left(\frac{a}{a_{E,S}} \right)^3 \frac{4-5\sin^2 i + e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i_{E,S}). \quad (11)$$

Элементы орбит определяются следующим образом:

$$M' = M'_0 + \bar{n}'(t-t_0), \quad \omega' = \omega'_0 + \dot{\omega}'(t-t_0), \quad \Omega' = \Omega'_0 + \dot{\Omega}'(t-t_0), \quad (12)$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0).$$

Вековые частоты возмущающих тел в аналитическом способе считаются константами, численные значения которых можно найти, например, в [12].

Карты вековых и полuveковых резонансов

Анализ каждого конкретного резонанса состоит в определении типа его резонансной характеристики, которая определяется по характеру изменения критического аргумента (2), (3).

Правила выбора типа резонансных характеристик: либрация – устойчивый резонанс, либрация / циркуляция – неустойчивый резонанс, циркуляция – отсутствие резонанса, – а также их обозначения в градиенте серого на резонансных картах показаны на рис. 1.

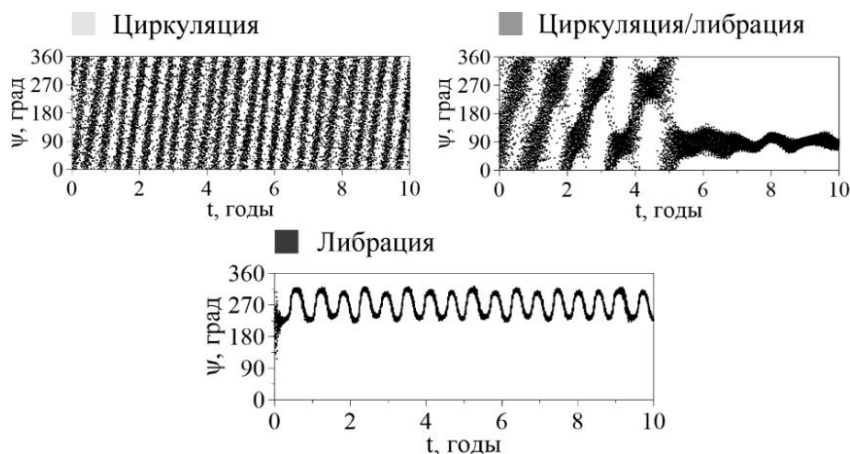


Рис. 1. Правила выбора типа резонансных характеристик и их обозначения в градиенте серого на резонансных картах

Fig. 1. Rules for choosing the type of resonant characteristics and their designations in a gray gradient on resonance maps

При анализе результатов численного моделирования для классификации устойчивых и неустойчивых резонансов различных типов использовались как обученная искусственная нейронная сеть [21], так и ручной метод.

В итоге были получены карты распределения вековых апсидально-нодальных резонансов, являющихся следствием соизмеримости параметров прецессии орбиты спутника, возникающей под действием возмущений, и параметров прецессии возмущающих тел: Солнца и Земли (рис. 2–5).

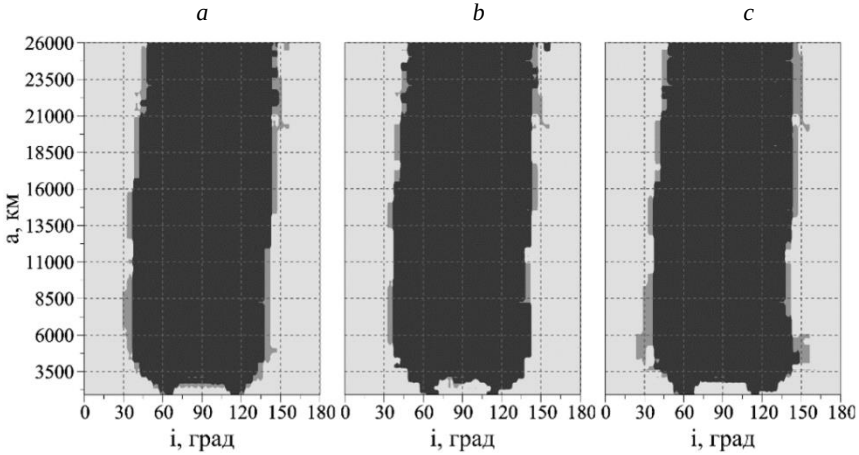


Рис. 2. Области влияния апсидального резонанса первого порядка и смежных с ним резонансов: $\dot{\omega}$ (a), $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$ (b), $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$ (c)

Fig. 2. Areas of influence of the first-order apsidal resonance and adjacent resonances: (a) $\dot{\omega}$, (b) $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$, and (c) $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$

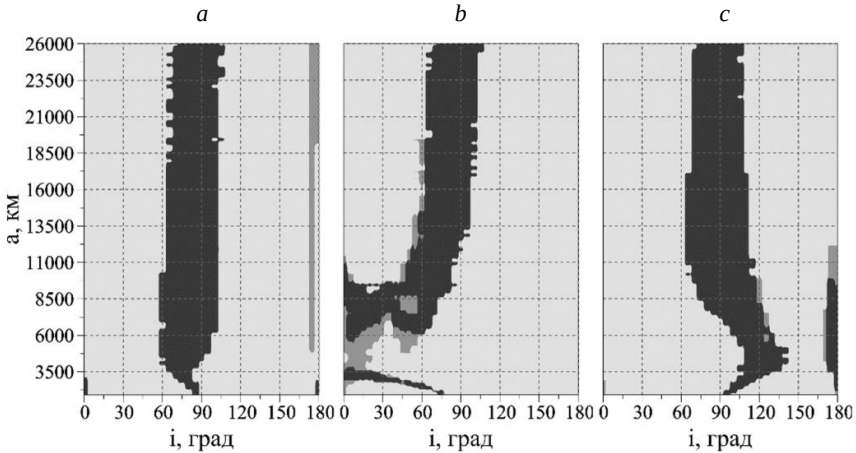


Рис. 3. Области влияния нодального резонанса и смежных с ним резонансов:

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) \text{ (a), } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E \text{ (b), } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E \text{ (c)}$$

Fig. 3. Areas of influence of the nodal resonance and adjacent resonances:

$$(a) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}), (b) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E, \text{ and (c) } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E$$

Поскольку действие большинства резонансов охватывает достаточно значительные области окололунного орбитального пространства, объединить все резонансы на одной карте не представляется возможным. В связи с этим большинство резонансов имеет отдельные карты.

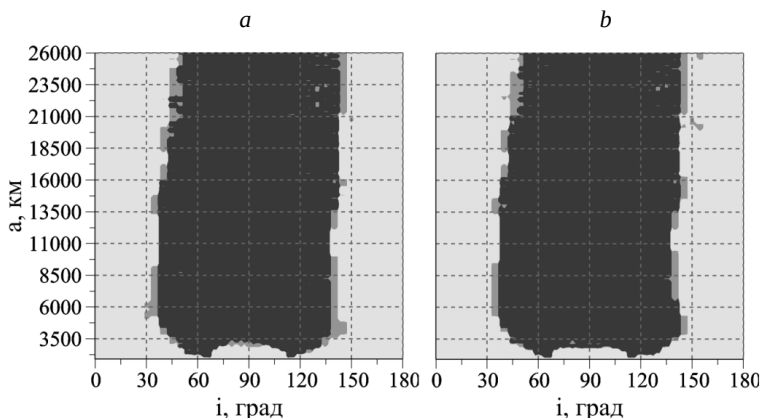


Рис. 4. Области влияния апсидально-нодальных резонансов третьего порядка:

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega} \text{ (a)}, (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega} \text{ (b)}$$

Fig. 4. Areas of influence of third-order apsidal-nodal resonances:

$$(a) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega} \text{ and } (b) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega}$$

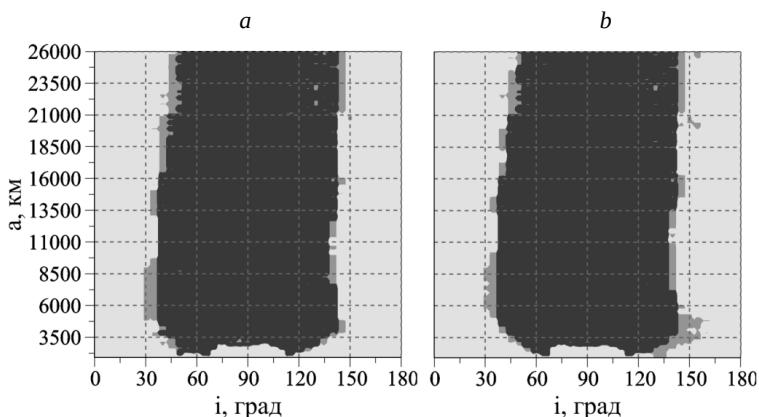


Рис. 5. Области влияния апсидально-нодальных резонансов четвертого порядка:

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega} \text{ (a)}, (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega} \text{ (b)}$$

Fig. 5. Areas of influence of fourth-order apsidal-nodal resonances:

$$(a) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega} \text{ and } (b) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega}$$

Оценка влияния апсидально-нодальных резонансов на динамику окололунных объектов показала, что наибольшим влиянием обладает вековой апсидально-нодальный резонанс первого порядка между частотами аргумента перигентра

и долготы восходящего узла (см. рис. 2), который приводит к обнулению частоты в долготе перицентра. Область влияния данного резонанса расширяется вдоль большой полуоси с 2 500 до 4 500 км и медленно смещается при прямом движении объектов вдоль наклона с 35 до 50° с повышением высоты. Правая граница области влияния резонанса остается равной примерно 140°.

Апсидально-нодальный резонанс первого порядка (№ 1 в табл. 1) был впервые обнаружен в рамках двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел М.Л. Лидовым в 1961 г. [22] для спутникового движения и Й. Козаи в 1962 г. [23] для астероидов. Резонанс и очень часто сопровождающий его эффект взаимосвязанных колебаний значений наклона и эксцентриситета (своеобразной перекачки энергии между эксцентриситетом и наклоном) получили название резонанса и эффекта Лидова–Козаи.

Характерной особенностью орбитальной эволюции объектов, подверженных действию резонанса типа Лидова–Козаи, является рост эксцентриситетов орбит, который на длительных интервалах времени может сопровождаться перекачкой энергии между эксцентриситетом и наклоном. Пример показан на рис. 6. При этом в соответствии с теорией [24] должен сохраняться интеграл Моисеева–Лидова–Козаи $c_1 = \sqrt{1-e^2} \cos i$, а значения интеграла Лидова $c_2 = \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i\right) e^2$ должны лежать в отрицательной области, что и имеет место в приведенном примере динамики окололунного объекта.

Сравнение между собой карт резонансов, содержащих в своем составе частоту долготы перицентра (см. рис. 2, 4 и 5), показывает, что области этих резонансов почти полностью совпадают с областью самого резонанса типа Лидова–Козаи.

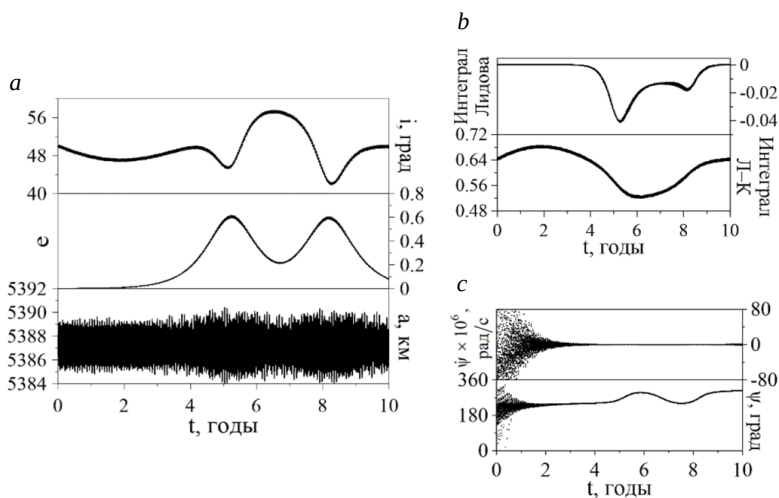


Рис. 6. Пример проявления эффекта типа Лидова–Козаи: *a* – орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов a , e , i ; *b* – динамика (сверху вниз) интегралов Лидова и Лидова–Козаи; *c* – эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения $\dot{\omega}$ и критического аргумента ω

Fig. 6. An example of the Kozai–Lidov type effect: (a) orbital evolution (from top to bottom) of elements a , e , i ; (b) dynamics (from top to bottom) of the Lidov and Kozai–Lidov integrals; and (c) evolution (from top to bottom) of the resonant relation $\dot{\omega}$ and critical argument ω

Как оказалось, эта область покрывает участки окололунного пространства, где наблюдается рост эксцентриситетов орбит. Поэтому главной причиной роста эксцентриситета и значительного сокращения времени жизни на орбите для объектов на средних и больших высотах следует считать влияние резонанса типа Лидова–Козаи на орбитальную динамику ИСЛ.

Нодальные резонансы низких порядков (см. рис. 3) сконцентрированы в окрестности наклонения, равного 90° , и налагаются на область апсидально-нодальных резонансов, усиливая рост эксцентриситета и вследствие этого уменьшая продолжительность жизни объектов.

Полувековые резонансы, представленные в табл. 2, не влияют на динамику ИСЛ, в критических аргументах наблюдается циркуляция на всем промежутке прогнозирования.

Карты наложения вековых и полувековых резонансов

В предыдущем разделе можно заметить, что большинство резонансных карт имеют зоны пересечения. В связи с этим было бы интересным рассмотреть общую картину влияния резонансов на динамику ИСЛ.

Карты наложения вековых резонансов представлены на рис. 7. В каждой точке плоскости $\{i, a\}$ показано количество одновременно действующих на объект устойчивых и неустойчивых резонансов. Под устойчивым резонансом на рис. 7, *b* мы понимаем либрацию резонансного аргумента на всем промежутке прогнозирования, а под неустойчивым резонансом на рис. 7, *a* – переход резонансного аргумента от либрации к циркуляции или наоборот. На рис. 7, *c* представлена карта наложения как устойчивых, так и неустойчивых резонансов.

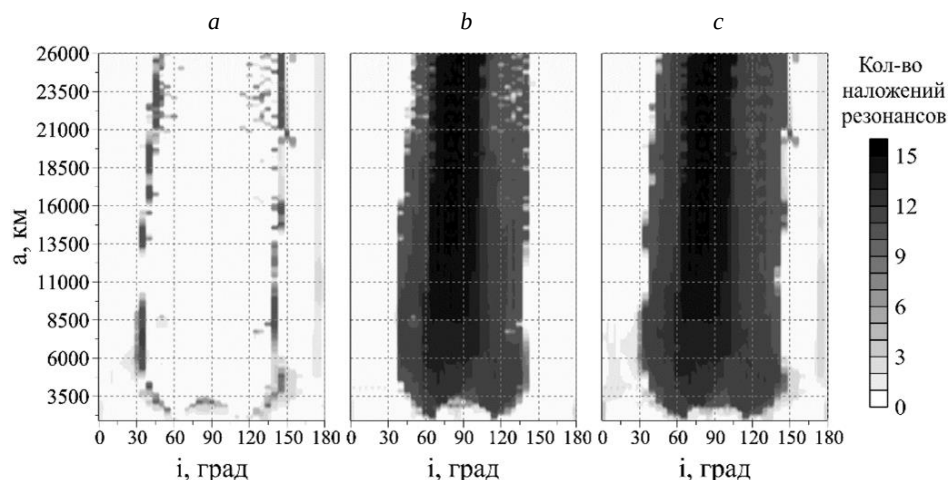


Рис. 7. Карты наложений вековых резонансов:

a – наложение только неустойчивых резонансов; *b* – наложение только устойчивых резонансов; *c* – наложение устойчивых и неустойчивых резонансов

Fig. 7. Maps of overlaps of the secular resonances:

(*a*) overlap of unstable resonances; (*b*) overlap of stable resonances; and (*c*) overlap of stable and unstable resonances

Из рис. 7 видно, что область действия вековых резонансов захватывает значительную часть окололунного орбитального пространства. Для орбит с большими полуосями выше 3 500 км основная часть резонансов расположена в диапазоне наклонений от 40 до 130° с некоторым смещением в сторону увеличения при возрастании большой полуоси. Для более низких орбит резонансы сосредоточены в окрестности наклонений, равных 60 и 120°. Для данных областей окололунного пространства характерен сильный рост эксцентриситета орбит, который обусловлен в первую очередь наличием устойчивого резонанса Лидова–Козаи. Это подтверждает рис. 8, на котором градиентом серого показаны наибольшие достигнутые в процессе динамической эволюции модельных окололунных объектов значения эксцентриситетов орбит. Пунктирная линия – границы влияния устойчивого резонанса Лидова–Козаи. Область наложения различных вековых резонансов, а также неустойчивого резонанса Лидова–Козаи чуть шире (см. рис. 2–7).

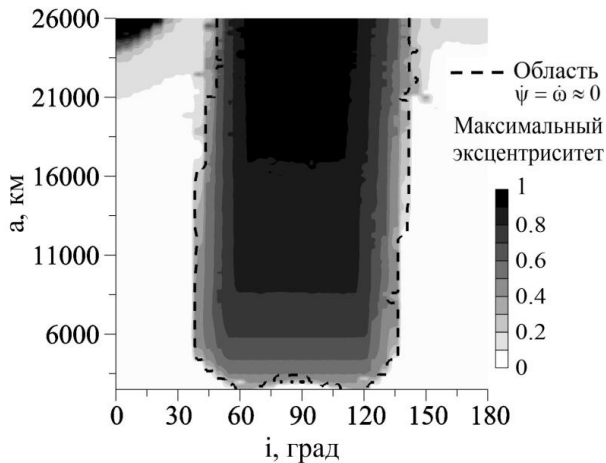


Рис. 8. Оценки роста эксцентриситетов и область устойчивого влияния резонанса Лидова–Козаи (выделена пунктирной линией) в зависимости от начальных значений большой полуоси и наклона объектов

Fig. 8. Assessments of the growth of eccentricities and the area of stable influence of the Kozai–Lidov resonance (indicated by a dashed line) depending on the initial values of the large semi-major axis and inclination of objects

Как видно из рис. 7, влияние неустойчивых резонансов сосредоточено на границе области наложения устойчивых резонансов. Что касается сильного роста эксцентриситета на высоких орбитах с малыми наклонениями, то он обусловлен прямым влиянием Земли.

Заключение

Таким образом, данная работа посвящена результатам исследования динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве, которые представлены в виде карт областей влияния вековых резонансов. Показано, что апсидально-нодальные резонансы имеют значительные области влияния на орбитальную эволюцию окололунных объектов. Что касается резонансов

со средним движением возмущающих тел, то они показали циркуляцию критического аргумента для всей рассматриваемой области, поэтому в работе сделан вывод об отсутствии их влияния на орбитальную эволюцию ИСЛ. Для оценки общей картины влияния резонансов на окололунные орбиты были построены карты наложений рассматриваемых резонансов. Полученные результаты позволили сделать вывод, что причиной большого роста эксцентриситета в обширной области окололунного орбитального пространства является наличие устойчивого резонанса типа Лидова–Козаи.

Список источников

1. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Томилова И.В., Авдюшев В.А., Бордовицына Т.В. Численное моделирование динамики искусственных спутников Луны // *Астрономический вестник*. 2022. Т. 56, № 4. (В печати).
2. Cook G.E. Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite // *Geophys. J.* 1962. V. 6, No. 3. P. 271–291. doi: 10.1111/j.1365-246X.1962.tb00351.x
3. Breiter S. Lunisolar apsidal resonances at low-satellite orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 1999. V. 74. P. 253–274. doi: 10.1023/A:1008379908163
4. Breiter S. Lunisolar resonances revisited // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2001. V. 81. P. 81–91. doi: 10.1023/A:1013363221377
5. Chao C., Gick R. Long-term evolution of navigation satellite orbits // *Adv. Space Res.* 2004. V. 34. P. 1221–1226. doi: 10.1016/j.asr.2003.01.021
6. Rossi A. Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2008. V. 100. P. 267–286. doi: 10.1007/s10569-008-9121-1
7. Прохоренко В.И. Геометрическое исследование решений ограниченной круговой двукратно осредненной задачи трех тел // *Космические исследования*. 2001. Т. 39, № 6. С. 622–633.
8. Wang Y., Gurfil P. The Role of Solar Apsidal Resonance in the Evolution of Geostationary Transfer Orbits // *Advances in Space Research*. 2017. V. 1 (8). P. 2101–2116. doi: 10.1016/j.asr.2017.01.038
9. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. К обоснованию численно-аналитической методики выявления вековых резонансов // *Известия вузов. Физика*. 2022. Т. 62. (В печати).
10. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем в области МЕО // *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46, № 5. С. 356–368.
11. Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Новый подход к вычислению вековых частот в динамике околоземных объектов на орбитах с большими эксцентриситетами // *Известия вузов. Физика*. 2020. Т. 63, № 1 (745). С. 57–62. doi: 10.17223/00213411/63/1/57
12. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Физматгиз, 1963. 586 с.
13. Авдюшев В.А. Новый коллокационный интегратор для решения задач динамики. I. Теоретические основы // *Известия вузов. Физика*. 2020. Т. 63, № 11. С. 131–140. doi: 10.17223/00213411/63/11/131
14. Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса–Эверхарта // *Вычислительные технологии*. 2010. Т. 15, № 4. С. 31–46.
15. Song Y.J., Park S.Y., Kim H.D., Sim E.S. Development of precise lunar orbit propagator and lunar polar orbiter's lifetime analysis // *Journal of Astronomy and Space Sciences*. 2010. V. 27 (2). P. 97–106. doi: 10.5140/JASS.2010.27.2.097

16. Gupta S., Sharma R. Effect of Altitude, Right Ascension of Ascending Node and Inclination on Lifetime of Circular Lunar Orbits // *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 2011. V. 1 (3). P. 155–163. doi: 10.4236/ijaa.2011.13020
17. Folkner W.M., Park R.S. Planetary ephemeris DE438 for Juno : Technical Report IOM392R-18-004. Pasadena, CA : Jet Propulsion Laboratory, 2018.
18. Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовитсына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамике объектов, движущихся в областях LEO–MEO околоземного орбитального пространства // *Астрономический вестник*. 2021. Т. 55, № 3. С. 272–287. doi: 10.31857/S0320930X21030014
19. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М. : Наука, 1977. 360 с.
20. Тимашикова Е.И., Холшевников К.В. Лунно-солнечные возмущения в движении спутников планеты // *Ученые записки ЛГУ*. 1974. № 373. С. 141–156.
21. Красавин Д.С., Александрова А.Г., Томилова И.В. Применение искусственных нейронных сетей в исследовании динамической структуры околоземного орбитального пространства // *Известия вузов. Физика*. 2021. Т. 64, № 10 (767). С. 38–43. doi: 10.17223/00213411/64/10/38
22. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // *Искусственные спутники Земли*. 1961. № 8. С. 5–45.
23. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591–598. doi: 10.1086/108790
24. Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Михаил Львович Лидов – яркое имя в космической науке // М.Л. Лидов – яркое имя в космической науке : сб. докл. / под ред. М.А. Вашковьяка. М. : ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. С. 9–38.

References

1. Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Tomilova I.V., Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A. (2022) Numerical modeling of the dynamics of artificial Moon satellites. *Solar System Research*. (in print)
2. Cook G.E. (1962) Luni-solar perturbations of the orbit of an Earth satellite. *Geophysical Journal*. 6(3). pp. 271–291. doi: 10.1111/j.1365-246X.1962.tb00351.x.
3. Breiter S. (1999) Lunisolar apsidal resonances at lowsatellite orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 74. pp. 253–274. doi: 10.1023/A:1008379908163.
4. Breiter S. (2001) Lunisolar resonances revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 81. pp. 81–91. doi: 10.1023/A:1013363221377.
5. Chao C., Gick R. (2004) Long-term evolution of navigation satellite orbits. *Advances in Space Research*. 34. pp. 1221–1226. doi: 10.1016/j.asr.2003.01.021.
6. Rossi A. (2008) Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 100. pp. 267–286. doi: 10.1007/s10569-008-9121-1.
7. Prokhorenko V.I. (2001) A geometric study of solutions to restricted circular double-averaged three-body problem. *Cosmic Research*. 39(6). pp. 583–593. doi: 10.1023/A:1013057428421.
8. Wang Y., Gurfil P. (2017) The role of solar apsidal resonance in the evolution of geostationary transfer orbits. *Advances in Space Research*. 1(8). pp. 2101–2116. doi: 10.1016/j.asr.2017.01.038.
9. Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V. (2022) To the substantiation of a numerical-analytical method for revealing secular resonances. *Russian Physics Journal*. 62. (in print)
10. Bordovitsyna T.V., Tomilova I.V., Chuvashov I.N. (2012) The effect of secular resonances on the long-term orbital evolution of uncontrollable objects on satellite radio navigation systems in the MEO region. *Solar System Research*. 46(5). pp. 329–340. doi: 10.1134/S0038094612040016.

11. Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. (2020) A new approach to calculation of secular frequencies in the dynamics of near-Earth objects in orbits with large eccentricities. *Russian Physics Journal*. 63(1). pp. 64–70. doi: 10.1007/s11182-020-02003-9.
12. Duboshin G.N. (1963) *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Main issues and methods]. Moscow: Fizmatgiz.
13. Avdyushev V.A. (2021) New collocation integrator for solving dynamic problems. I. Theoretical background. *Russian Physics Journal*. 63(11). pp. 1977–1988. doi: 10.1007/s11182-021-02260-2.
14. Avdyushev V.A. (2010) Gauss–Everhart Integrator. *Computational Technologies*. 15(4). pp. 31–46.
15. Song Y.J., Park S.Y., Kim H.D., Sim E.S. (2010) Development of precise lunar orbit propagator and lunar polar orbiter's lifetime analysis. *Journal of Astronomy and Space Sciences*. 27(2). pp. 97–106. doi: 10.5140/JASS.2010.27.2.097.
16. Gupta S., Sharma R. (2011) Effect of altitude, right ascension of ascending node and inclination on lifetime of circular lunar orbits. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 1(3). pp. 155–163. doi: 10.4236/ijaa.2011.13020.
17. Folkner W.M., Park R.S. (2018) *Planetary Ephemeris DE438 for Juno*. Technical Report IOM392R-18-004. Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory.
18. Aleksandrova A.G., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. Secular resonances in the dynamics of objects moving in Leo–Meo regions of near-Earth orbital space. *Solar System Research*. 55(3). pp. 266–281. doi: 10.1134/S0038094621030011.
19. Aksenov E.P. (1977) *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli* [Theory of the motion of artificial Earth satellites]. Moscow: Nauka.
20. Timoshkova E.I., Kholoshevnikov K.V. (1974) Lunno-solnechnye vozmushcheniya v dvizhenii sputnikov planety [Lunar–Sun perturbations in planet satellites motion]. *Uchebnye Zapiski Leningradskogo Gosudarstvennogo Universiteta*. 373. pp. 141–156.
21. Krasavin D.S., Aleksandrova A.G., Tomilova I. V. (2022) Application of artificial neural networks in studying the dynamic structure of the near-Earth orbital space. *Russian Physics Journal*. 64(10). pp. 1824–1830. doi: 10.1007/s11182-022-02528-1.
22. Lidov M.L. (1962) The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planetary and Space Science*. 9(10). pp. 719–759. doi: 10.2514/3.1983.
23. Kozai Y. (1962) Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*. 67. pp. 591–598. doi: 10.1086/108790.
24. Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M. (2016) Mikhail L'vovich Lidov – yarkoe imya v kosmicheskoy nauke [Mikhail L'vovich Lidov – bright name in space science]. *M.L. LIDOV – BRIGHT NAME IN SPACE SCIENCE: The Collection of Papers / Ed. by M.A. Vashkov'yak*. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics. pp. 9–38.

Сведения об авторах:

Попандопуло Никита Андреевич – младший научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nikas.popandopulos.com

Александрова Анна Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник 50-го отдела НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: aleksann@sibmail.com, aleksandrovaannag@mail.ru

Бордовицына Татьяна Валентиновна – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tvbord@sibmail.com

Information about the authors:

Popandopulo Nikita A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikas.popandopulos.com

Aleksandrova Anna G. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksann@sibmail.com, aleksandrovaannag@mail.ru

Bordovitsyna Tat'yana V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tvbord@sibmail.com

Статья поступила в редакцию 28.04.2022; принята к публикации 19.05.2022

The article was submitted 28.04.2022; accepted for publication 19.05.2022