

Научная статья

УДК 519.21

doi: 10.17223/19988605/59/4

Аналитическое исследование однолинейной системы массового обслуживания с входящим синхронным потоком событий

Александр Михайлович Горцев¹, Мария Александровна Бочарова²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ a-gortsev@mail.ru

² 89131140060@mail.ru

Аннотация. Изучается однолинейная система массового обслуживания (СМО) с входящим коррелированным синхронным дважды стохастическим потоком событий (запросов, сообщений и т.п.) с двумя состояниями. Приводятся явные аналитические формулы для стационарного распределения вероятностей состояний системы, а также явные аналитические выражения для числовых характеристик системы: средней длины очереди, среднего числа запросов в системе, вероятности простоя системы. Приводятся численные результаты расчета характеристик системы, представленные в виде таблиц. Рассматривается частный случай входящего потока запросов – рекуррентный синхронный поток с двумя состояниями.

Ключевые слова: синхронный поток событий (запросов, сообщений); однолинейная система массового обслуживания (СМО); стационарное распределение вероятностей состояний системы; числовые характеристики

Для цитирования: Горцев А.М., Бочарова М.А. Аналитическое исследование однолинейной системы массового обслуживания с входящим синхронным потоком событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 34–46. doi: 10.17223/19988605/59/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/4

Analytical study of a single-line system queuing with incoming synchronous events flow

Alexander M. Gortsev¹, Maria A. Bocharova²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ a-gortsev@mail.ru

² 89131140060@mail.ru

Abstract. In this article, we study a single-server queuing system with an incoming correlated synchronous doubly stochastic two-state event stream, which is a special case of the MAP events stream.

The mathematical expectation of the duration of the intervals between the events of the stream has the form:

$$M(\tau) = \frac{\lambda_1 p + \lambda_2 q}{\lambda_1 \lambda_2 (p + q)}.$$

The formula for the intensity of the considered synchronous flow is obtained:

$$\lambda = \frac{1}{M(\tau)} = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2.$$

An analytical stationary probability distribution of process states (i, j) is derived, where i is the queue length in the system, $i = 0, 1, \dots, j$, j is the state of the synchronous events flow, $j = 1, 2$, for three different cases: 1) $p + q = 1$,

2) $0 < p + q < 1$, 3) $1 < p + q \leq 2$, where p is the probability of transition of the synchronous flow from the first state (flow intensity in the first state λ_1) to the second (flow intensity in the second state λ_2 , $\lambda_1 > \lambda_2$); q is the probability of a synchronous flow transition from the second state (flow intensity in the second state λ_2) to the first (flow intensity in the first state λ_1).

Numerical characteristics of the system are found explicitly: the probability of the system downtime $P(-1)$, the average queue length in the system $M(I)$ and the average number of requests in the system $M(I+1)$. Numerical calculations of characteristics with different initial data are given. The tables present the results of the dependence of the found numerical characteristics on the parameters of the investigated queuing system.

Keywords: synchronous flow of events (requests, messages); single line queuing system (QS); stationary probability distribution of system states; numerical characteristics

For citation: Gortsev, A.M., Bocharova, M.A. (2022) Analytical study of a single-line system queuing with incoming synchronous events flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 34–46. doi: 10.17223/19988605/59/4

Системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) широко применялись и применяются в качестве математических моделей различных технических, физических, экономических и других систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, в свою очередь, применяются в качестве математических моделей различных реальных процессов, протекающих в таких системах. В частности, случайные потоки событий служили и служат математическими моделями информационных потоков запросов в телекоммуникационных сетях.

Подавляющее число статей прошлого столетия посвящено изучению СМО и СеМО с входящими простейшими потоками событий. Однако в связи с интенсивным развитием (с конца XIX в.) телекоммуникационных сетей, беспроводных и мобильных сетей связи математическая модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам запросов.

Современными математическими моделями информационных потоков в телекоммуникационных сетях являются коррелированные дважды стохастические потоки запросов. Систематизированное описание СМО и СеМО с коррелированными потоками приведено в монографии [1], в своем роде единственной в мировой литературе. Здесь отметим, что одними из первых работ, положивших начало систематическому исследованию коррелированных потоков (дважды стохастических потоков, МС-потоков, MVP-потоков, МАР-потоков), были работы [2–8].

Аналитическое исследование СМО и СеМО с коррелированными потоками – достаточно труднительный процесс [1], тем более нахождение, скажем, характеристик СМО и СеМО в явном виде представляет собой сложную задачу, порой неразрешимую. В настоящей статье проводится аналитическое исследование однолинейной СМО с входящим синхронным дважды стохастическим потоком событий с двумя состояниями [9–12], с бесконечным числом мест для ожидания и экспоненциальным обслуживанием. Подчеркнем, что синхронный дважды стохастический поток является частным случаем МАР-потока событий [13–15]. Для стационарного режима функционирования СМО выводятся явные выражения для средней длины очереди, среднего числа запросов в системе и вероятности простоя системы.

1. Математическая модель системы. Постановка задачи

Рассматривается однолинейная СМО с ожиданием и длительностью обслуживания, распределенной по экспоненциальному закону. На вход обслуживающего прибора поступает синхронный поток событий (запросов, сообщений и т.п.), сопровождающий процесс (интенсивность) $\lambda(t)$ которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ (первое состояние) либо $\lambda(t) = \lambda_2$ (второе состояние) ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$). Будем говорить, что имеет место j -е состояние процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_j$, $j = 1, 2$. Если имеет место j -е состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_j$, имеет место пуассоновский поток событий с параметром (интенсивностью) λ_j , $j = 1, 2$.

Пусть процесс $\lambda(t)$ находится в первом состоянии. Тогда в момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_1 процесс $\lambda(t)$ либо переходит из первого состояния в первое (остается в первом состоянии) с вероятностью $1 - p$, либо переходит из первого состояния во второе с вероятностью p ($0 < p \leq 1$). Если процесс $\lambda(t)$ находится во втором состоянии, то в момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_2 процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии с вероятностью $1 - q$ или переходит в первое состояние с вероятностью q ($0 < q \leq 1$). Таким образом, переход из состояния в состояние процесса $\lambda(t)$ осуществляется только в момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_j , $j = 1, 2$ (свойство синхронности дважды стохастического потока событий). Рассматривается стационарный режим функционирования СМО. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – сопровождающий стационарный кусочно-постоянный скрытый (принципиально ненаблюдаемый) транзитивный марковский процесс с двумя состояниями – λ_1 и λ_2 .

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$ – значение длительности k -го интервала между двумя соседними событиями потока ($\tau_k \geq 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого $k \geq 1$. В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равными нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$. Тогда справедливо [9]

$$p(\tau) = \gamma \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} + (1 - \gamma) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad \gamma = \frac{q}{p + q}, \quad (1)$$

$$0 < p \leq 1, \quad 0 < q \leq 1, \quad \lambda_1 > \lambda_2.$$

Пусть (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала, значения длительностей которых есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ соответственно; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k = 1$, будем рассматривать два соседних интервала (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятности при этом есть [16]

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2) + (1 - p - q) \gamma (1 - \gamma) (\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_1} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_1}) \times$$

$$\times (\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_2}), \quad \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \quad (2)$$

где γ , $p(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Подчеркнем, что из (2) следует, что в общем случае синхронный поток является коррелированным потоком. Только в частных случаях он становится рекуррентным либо вырождается в простейший.

Частный случай 1: $p + q = 1$ – рекуррентный синхронный поток с двумя состояниями. Тогда $p(\tau)$ определяется формулой (1), где $\gamma = 1 - p$, $1 - \gamma = p$ (либо $\gamma = q$, $1 - \gamma = 1 - q$).

Из (2) получаем $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2)$. Тогда, так как моменты наступления событий в потоке $t_1, \dots, t_k$ порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, нетрудно показать, что $p(\tau_1, \dots, \tau_k) = p(\tau_1) \cdots p(\tau_k)$, $k \geq 2$. Таким образом, синхронный поток с двумя состояниями в первом частном случае всегда является рекуррентным.

Частный случай 2: $\gamma = 0$ – простейший поток с параметром λ_2 . Из (1) находим $p(\tau) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}$, $\tau \geq 0$.

Частный случай 3: $\gamma = 1$ – простейший поток с параметром λ_1 . Из (1) находим $p(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$, $\tau \geq 0$.

Задача анализа рассматриваемой СМО заключается в нахождении явного аналитического вида числовых характеристик системы: среднего числа сообщений в очереди; среднего числа сообщений в системе; вероятности простоя обслуживающего прибора. Обозначим $i(t)$ – число сообщений в очереди в произвольный момент времени t ($i(t)=0,1,\dots$). Случайный процесс $i(t)$ не является марковским, так как входящий синхронный поток обладает последствием. Для того чтобы построить марковский процесс, необходимо учесть состояние входящего потока. Введем дополнительную переменную $j(t)$ – состояние входящего синхронного потока (состояние сопровождающего процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t), $j(t)=1,2$. Если $j(t)=1$, то $\lambda(t)=\lambda_1$; если $j(t)=2$, то $\lambda(t)=\lambda_2$. Тогда двумерный процесс $(i(t), j(t))$ становится марковским. Так как рассматривается стационарный режим ($t \rightarrow \infty$), то состояние системы будем обозначать (i, j) , $i=0,1,\dots$, $j=1,2$. Отметим, что возможны ещё два состояния: $(-1,1)$, $(-1,2)$, при которых в системе находится ноль сообщений (длина очереди равна нулю и прибор не обслуживает – прибор простаивает).

Сделанные предпосылки позволяют представить математическую модель исследуемой СМО в виде связанного стохастического графа (рис. 1) [17].

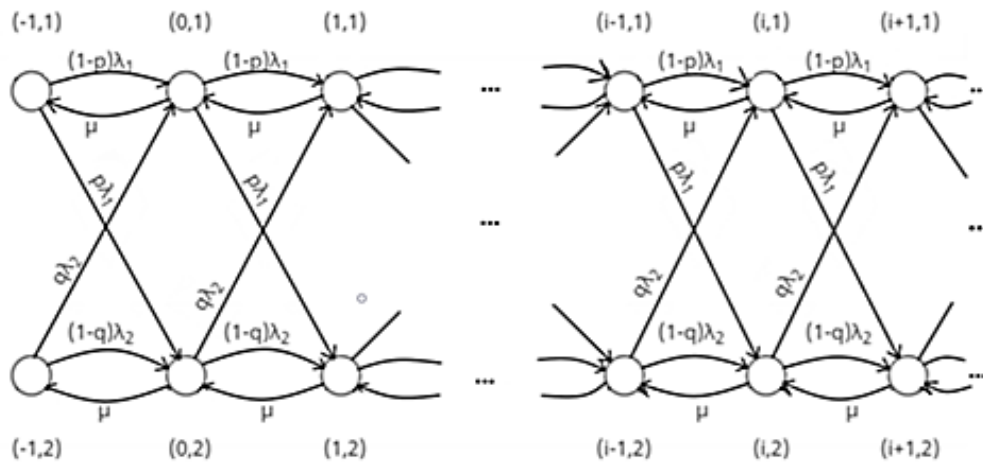


Рис. 1. Стохастический граф переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние
Fig. 1. Stochastic graph of process $\lambda(t)$ from state to state

Вершинам графа (см. рис. 1) соответствуют состояния СМО; каждой дуге графа поставлены в соответствие интенсивности переходов из состояния в состояние (инфинитезимальные характеристики), причем петли в каждом состоянии опущены; каждая вершина графа (каждое состояние) достижима и возвратна.

2. Вывод числовых характеристик системы при входящем коррелированном синхронном потоке сообщений

Обозначим $P(i, 1)$, $P(i, 2)$ – стационарные (финальные) вероятности состояний системы ($i = -1, 0, 1, \dots$). Тогда для сечений стохастического графа $F_{11} = \{(i-1, 1; i, 1), (i, 1; i-1, 1), (i, 1; i+1, 1), (i+1, 1; i, 1), (i, 1; i+1, 2), (i-1, 2; i, 1)\}$, $F_{12} = \{(i-1, 2; i, 2), (i, 2; i-1, 2), (i, 2; i+1, 2), (i+1, 2; i, 2), (i, 2; i+1, 1), (i-1, 1; i, 2)\}$, $i=0,1,\dots$, имеет место бесконечная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \lambda_1(1-p)P(i-1,1) - (\lambda_1 + \mu)P(i,1) + \mu P(i+1,1) + \lambda_2 q P(i-1,2) &= 0, \\ \lambda_2(1-q)P(i-1,2) - (\lambda_2 + \mu)P(i,2) + \mu P(i+1,2) + \lambda_1 p P(i-1,1) &= 0, \quad i=0,1,\dots \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) будем искать в виде [18]: $P(i,1)=\xi^i$, $P(i,2)=C\xi^i$ ($i=0,1,\dots$). Тогда характеристическое уравнение для системы (3) примет вид:

$$(\xi-1)\left\{\mu^2\xi^3-\mu(\lambda_1+\lambda_2+\mu)\xi^2+\left[\lambda_1\lambda_2+\lambda_1(1-p)\mu+\lambda_2(1-q)\mu\right]\xi-\lambda_1\lambda_2(1-p-q)\right\}=0. \quad (4)$$

Сначала рассмотрим условия существования вероятностей $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i=-1,0,1,\dots$. Математическое ожидание τ – длительности интервала между двумя соседними событиями в синхронном потоке – определится в виде $M(\tau)=\int_0^\infty \tau p(\tau)d\tau$, где плотность вероятности $p(\tau)$ задана в (1). Под-

ставляя в выражение для $M(\tau)$ плотность $p(\tau)$, находим $M(\tau)=\frac{\lambda_1 p + \lambda_2 q}{\lambda_1 \lambda_2 (p+q)}$. Тогда математическое

ожидание числа сообщений во входящем коррелированном синхронном потоке в единицу времени определится в виде: $\lambda = \frac{1}{M(\tau)} = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, где π_j – стационарная вероятность j -го состояния пото-

ка, $j=1,2$; при этом $\pi_1 = \frac{\lambda_2 q}{\lambda_1 p + \lambda_2 q}$, $\pi_2 = \frac{\lambda_1 p}{\lambda_1 p + \lambda_2 q}$ [9]. Рассмотрим ситуацию, когда $\lambda = \mu$. Подстав-

ляя $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ в (4), находим характеристическое уравнение для рассматриваемой ситуации:

$$(\xi-1)^2 \left[(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)^2 \xi^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) \xi + \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q) \right] = 0. \quad (5)$$

Характеристическое уравнение (5) имеет кратные корни. Тогда общее решение системы разностных уравнений (3), в котором $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, выражается в виде

$$\begin{aligned} P(i,1) &= D_1 \xi_1^i + D_2 i \xi_2^i + D_3 \xi_3^i + D_4 \xi_4^i, \\ P(i,2) &= B_1 D_1 \xi_1^i + B_2 D_2 i \xi_2^i + B_3 D_3 \xi_3^i + B_4 D_4 \xi_4^i, \quad i=0,1,\dots \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) $P_s(i,1)=D_s \xi_s^i$; $P_s(i,2)=B_s D_s \xi_s^i$, $s=1,3,4$, $P_2(i,1)=D_2 i \xi_2^i$, $P_2(i,2)=B_2 D_2 i \xi_2^i$ – частные решения системы (3); B_s , D_s – некоторые константы, определяемые из граничных условий, $s=\overline{1,4}$; $\xi_1 = \xi_2 = 1$,

$$\xi_{3,4} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 (p+q)}}{2(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)}. \quad \text{Здесь возможно три случая: 1) } p+q=1; \text{ 2) } 0 < p+q < 1;$$

3) $1 < p+q \leq 2$.

Рассмотрим первый случай. Тогда имеем $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2}$, $\xi_4 > 1$. Поскольку $P(i,1)$, $P(i,2)$ – вероятности, то для них должно выполняться условие нормировки $\sum_{i=-1}^\infty P(i,1) + \sum_{i=-1}^\infty P(i,2) = 1$. Тогда необходимым условием его выполнения является выполнение пре-

дельных соотношений $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i,1) = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i,2) = 0$ при $i \rightarrow \infty$. В противном случае ряды $\sum_{i=-1}^\infty P(i,1)$,

$\sum_{i=-1}^\infty P(i,2)$ будут расходиться. С учетом сказанного в общем решении (6) константы D_1 , D_2 , D_4 необ-

ходимо положить равными нулю. Тогда $P(i,1)=0$, $P(i,2)=0$, $i=0,1,\dots$. Так как для сечений стохастического графа $F_{-1,1} = \{(-1, 1; 0, 1), (0, 1; -1, 1), (-1, 1; 0, 2)\}$, $F_{-1,2} = \{(-1, 2; 0, 2), (0, 2; -1, 2), (-1, 2; 0, 1)\}$ имеют место граничные уравнения

$$\lambda_1 P(-1,1) = \mu P(0,1); \quad \lambda_2 P(-1,2) = \mu P(0,2), \quad (7)$$

то и $P(-1, 1) = 0$, $P(-1, 2) = 0$. Таким образом, стационарные вероятности $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i = 0, 1, \dots$, для случая $\lambda = \mu$ и $p + q = 1$ все равны нулю, а это означает, что стационарного распределения не существует (и тем более не существует при $\lambda > \mu$), и очередь в однолинейной СМО стремится к бесконечности.

Рассмотрим второй случай. Тогда имеем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $0 < \xi_3 < 1$, $\xi_4 > 1$. Аналогично первому случаю константы D_1 , D_2 , D_4 в общем решении (6) нужно положить равными нулю. Тогда общее решение (6) запишется в виде:

$$P(i, 1) = D_3 \xi_3^i, \quad P(i, 2) = B_3 D_3 \xi_3^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Определим константу B_3 . Подставляя (8) в первое уравнение системы (3), в котором $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, получаем

$$B_3 = -\frac{1}{2\lambda_1 \lambda_2 (p + q)} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 (p + q) + (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 (p + q)} \right] < 0. \quad (9)$$

Таким образом, $B_3 < 0$. Тогда из (8) следует, что $D_3 < 0$. Последнее, в свою очередь, приводит к противоречию: $P(i, 1) < 0$, $i = 0, 1, \dots$; $P(i, 2) > 0$, $i = 0, 1, \dots$. Противоречие устраняется, если положить $D_3 = 0$: $P(i, 1) = P(i, 2) = 0$, $i = 0, 1, \dots$. Отсюда с присоединением граничных уравнений (7) следует, что при $\lambda = \mu$ и $0 < p + q < 1$ стационарное распределение $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i = -1, 0, 1, \dots$, не существует, и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Рассмотрим третий случай. Тогда имеем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $-1 < \xi_3 < 0$, $\xi_4 > 1$. Тогда по аналогии с первым случаем общее решение (6) запишется в виде (8). Константа B_3 определится в виде (9). Тогда имеем: 1) $D_3 > 0$, $B_3 < 0$, отсюда следует, что $P(i, 1) > 0$ для четных i и $P(i, 1) < 0$ для нечетных i ; аналогично для $P(i, 2)$; 2) $D_3 < 0$, $B_3 < 0$, отсюда следует, что $P(i, 1) > 0$ для нечетных i и $P(i, 1) < 0$ для четных i ; аналогично для $P(i, 2)$. Полученные противоречия снимаются, если положить $D_3 = 0$: $P(i, 1) = P(i, 2) = 0$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда при $\lambda = \mu$ и $1 < p + q \leq 2$ (с присоединением граничных уравнений (7)) стационарное распределение $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i = -1, 0, 1, \dots$, не существует, и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Перейдём к случаю $\lambda < \mu$ ($\lambda = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$). Общее решение системы (3) с учетом (4) выпишется в виде

$$\begin{aligned} P(i, 1) &= A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i + A_3 \xi_3^i + A_4 \xi_4^i, \\ P(i, 2) &= C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i + C_3 A_3 \xi_3^i + C_4 A_4 \xi_4^i, \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где $P_s(i, 1) = A_s \xi_s^i$, $P_s(i, 2) = C_s A_s \xi_s^i$ – частные решения системы (3); C_s , A_s – некоторые константы, определяемые из граничных условий, $s = \overline{1, 4}$; $\xi_4 = 1$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 – корни кубического уравнения

$$\mu^2 \xi^3 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \xi^2 + [\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(1 - p)\mu + \lambda_2(1 - q)\mu] \xi - \lambda_1 \lambda_2 (1 - p - q) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим случай: $0 < p + q < 1$ ($0 < p < 1$, $0 \leq q < 1$ либо $0 \leq p < 1$, $0 < q < 1$). Подчеркнем, во-первых, что вероятности p , q не могут быть равными нулю одновременно, так как последнее приводит к вырождению коррелированного синхронного потока в некий простейший поток событий, во-вторых, ситуация, когда $p = 0$, $q \neq 0$, приводит (формула (1)) к вырождению коррелированного синхронного потока в простейший поток с параметром λ_1 , в-третьих, ситуация, когда $p \neq 0$, $q = 0$, приводит (формула (1)) к вырождению коррелированного синхронного потока в простейший поток с параметром λ_2 . Для рассматриваемого случая имеем три корня кубического уравнения (11): $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 < \xi_3$, при этом

$$\xi_1 \in \left(0, \frac{\lambda_2}{\mu}\right), \quad \xi_2 \in \left(\frac{\lambda_2}{\mu}, \frac{\lambda_1}{\mu}\right), \quad \frac{\lambda_1}{\mu} < 1. \quad \text{Тогда общее решение (10) (так как } \xi_3 > 1, \xi_4 = 1, \text{ то } A_3 = A_4 = 0)$$

выпишется в виде:

$$P(i,1) = A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i, \quad P(i,2) = C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Подставляя частные решения $P_s(i,1) = A_s \xi_s^i$, $P_s(i,2) = C_s A_s \xi_s^i$, $i = 0, 1, \dots$, $s = 1, 2$, в исходную систему (3) (сначала для $s = 1$, затем для $s = 2$), находим

$$C_s = \frac{-\lambda_1(1-p) + (\lambda_1 + \mu)\xi_s - \mu\xi_s^2}{\lambda_2 q}, \quad s = 1, 2. \quad (13)$$

Для определения констант A_i , $i = 1, 2$, и вероятностей $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ нужно привлечь граничные условия (7) и граничное уравнение $\sum_{i=-1}^{\infty} \lambda_1 p P(i, 1) = \sum_{i=-1}^{\infty} \lambda_2 q P(i, 2)$, определяемое сечением графа $F = \{(i, 1; i + 1, 2), (i, 2; i + 1, 1), i = -1, 0, 1, \dots\}$; присоединяя сюда условие нормировки: $P(-1, 1) + P(-1, 2) + \sum_{i=0}^{\infty} [P(i, 1) + P(i, 2)] = 1$, с учетом (12), получаем

$$P(-1, 1) = \frac{\mu}{\lambda_1} (A_1 + A_2); \quad P(-1, 2) = \frac{\mu}{\lambda_2} (C_1 A_1 + C_2 A_2); \quad (14)$$

$$A_1 = \frac{b_1 \pi_2 - C_2 a_2 \pi_1}{C_1 b_1 b_2 - C_2 a_1 a_2}; \quad A_2 = \frac{C_1 b_2 \pi_1 - a_1 \pi_2}{C_1 b_1 b_2 - C_2 a_1 a_2}; \quad a_1 = \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{1}{1 - \xi_1}; \quad a_2 = \frac{\mu}{\lambda_2} + \frac{1}{1 - \xi_2}; \quad b_1 = \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{1}{1 - \xi_2};$$

$b_2 = \frac{\mu}{\lambda_2} + \frac{1}{1 - \xi_1}$, π_1 , π_2 определены при выводе уравнения (5); C_1 , C_2 определены в (13); ξ_1 , ξ_2 – корни кубического уравнения (11), $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.

Формулы (12), (14) позволяют определить числовые характеристики системы: $P(-1)$ – вероятность простоя обслуживающего прибора; $M(I)$ – среднюю длину очереди в системе; $M(I + 1)$ – среднее число сообщений в системе:

$$P(-1) = \mu \left[A_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{C_1}{\lambda_2} \right) + A_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} \right) \right], \quad (15)$$

$$M(I) = \frac{\xi_1 A_1 (1 + C_1)}{(1 - \xi_1)^2} + \frac{\xi_2 A_2 (1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2}, \quad M(I + 1) = \frac{A_1 (1 + C_1)}{(1 - \xi_1)^2} + \frac{A_2 (1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2},$$

где C_1 , C_2 определены в (13); A_1 , A_2 – в (14); ξ_1 , ξ_2 – корни кубического уравнения (11), $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.

В табл. 1–3 в качестве иллюстрации приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3$ ($p = 0,05$, $q = 0,25$); $0,4$ ($p = 0,05$, $q = 0,35$); $0,5$ ($p = 0,05$, $q = 0,45$); $0,6$ ($p = 0,05$, $q = 0,55$); $0,7$ ($p = 0,5$, $q = 0,65$) при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (15). Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим коррелированным синхронным потоком сообщений.

Таблица 1

Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,8571	0,8125	0,7778	0,7500	0,7273	0,7083	0,6923	0,6786	0,6667	0,6563
0,4	0,8519	0,8000	0,7576	0,7222	0,6923	0,6667	0,6444	0,6250	0,6078	0,5926
0,5	0,8485	0,7917	0,7436	0,7024	0,6667	0,6354	0,6078	0,5833	0,5614	0,5417
0,6	0,8462	0,7857	0,7333	0,6875	0,6471	0,6111	0,5789	0,5500	0,5238	0,5000
0,7	0,8444	0,7812	0,7255	0,6759	0,6316	0,5917	0,5556	0,5227	0,4928	0,4653

Таблица 2

Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,0258	0,0539	0,0925	0,1432	0,2089	0,2936	0,4027	0,5427	0,7200	0,9390
0,4	0,0275	0,0595	0,1049	0,1660	0,2466	0,3521	0,4899	0,6693	0,9000	1,1905
0,5	0,0285	0,0633	0,1136	0,1825	0,2746	0,3967	0,5580	0,7706	1,0482	1,4037
0,6	0,0292	0,0659	0,1199	0,1949	0,2962	0,4318	0,6129	0,8541	1,1733	1,5890
0,7	0,0297	0,0679	0,1248	0,2046	0,3135	0,4604	0,6583	0,9246	1,2814	1,7532

Таблица 3

Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,1687	0,2414	0,3147	0,3932	0,4816	0,5852	0,7104	0,8641	1,0533	1,2828
0,4	0,1756	0,2595	0,3473	0,4438	0,5543	0,6855	0,8455	1,0443	1,2922	1,5979
0,5	0,1800	0,2716	0,3700	0,4801	0,6079	0,7613	0,9502	1,1872	1,4868	1,8620
0,6	0,1831	0,2802	0,3866	0,5074	0,6491	0,8207	1,0340	1,3041	1,6495	2,0890
0,7	0,1853	0,2867	0,3994	0,5287	0,6819	0,8687	1,1028	1,4019	1,7886	2,2880

Рассмотрим случай: $1 < p + q \leq 2$ ($0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$). Для этого случая имеем три корня кубического уравнения (11): $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 1 < \xi_3$; при этом $\xi_1 \in (-1, 0)$, $\xi_2 \in \left(\frac{\lambda_2}{\mu}, \frac{\lambda_1}{\mu}\right)$, $\frac{\lambda_1}{\mu} < 1$. Тогда общее решение (10) (так как $\xi_1 < 0$, $\xi_3 > 1$, $\xi_4 = 1$, то $A_1 = A_3 = A_4 = 0$) выпишется в виде:

$$P(i, 1) = A_2 \xi_1^i, \quad P(i, 2) = C_2 A_2 \xi_2^i, \quad i \geq 0. \quad (16)$$

Константа C_2 в (16) определится в виде (13) для $s = 2$. Для определения константы A_2 и вероятностей $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ привлекаются граничные уравнения (7) и условие нормировки. Тогда, с учетом (16), находим

$$P(-1, 1) = \frac{\mu}{\lambda_1} A_2, \quad P(-1, 2) = \frac{\mu}{\lambda_2} C_2 A_2, \quad A_2 = 1 / \left(\mu \frac{\lambda_2 + \lambda_1 C_2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1 + C_2}{1 - \xi_2} \right), \quad (17)$$

в (17) величина C_2 определена выражением (13) для $s = 2$; ξ_2 – корень уравнения (11), $\frac{\lambda_2}{\mu} < \xi_2 < \frac{\lambda_1}{\mu}$.

Формулы (16), (17) позволяют определить числовые характеристики системы:

$$P(-1) = \mu \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} \right) A_2, \quad M(I) = \frac{\xi_2 (1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2} A_2, \quad M(I + 1) = \frac{1 + C_2}{(1 - \xi_2)^2} A_2, \quad (18)$$

где C_2 определена в (13) для $s = 2$; A_2 – в (17); ξ_2 – корень уравнения (11), $\frac{\lambda_2}{\mu} < \xi_2 < \frac{\lambda_1}{\mu}$.

Таблица 4

Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3; 1,4; \dots; 1,7$ ($p = q$)

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,3	0,8914	0,8812	0,8760	0,8729	0,8709	0,8695	0,8685	0,8677	0,8671	0,8666
1,4	0,8920	0,8826	0,8781	0,8756	0,8740	0,8730	0,8722	0,8717	0,8713	0,8709
1,5	0,8925	0,8838	0,8799	0,8779	0,8767	0,8759	0,8754	0,8750	0,8747	0,8745
1,6	0,8929	0,8849	0,8815	0,8798	0,8789	0,8783	0,8780	0,8778	0,8776	0,8775
1,7	0,8933	0,8858	0,8828	0,8814	0,8807	0,8804	0,8802	0,8801	0,8801	0,8801

Таблица 5

Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3; 1,4; \dots; 1,7$ ($p = q$)

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,3	0,0149	0,0212	0,0268	0,0320	0,0368	0,0412	0,0454	0,0492	0,0527	0,0560
1,4	0,0147	0,0206	0,0257	0,0303	0,0345	0,0383	0,0418	0,0450	0,0480	0,0507
1,5	0,0145	0,0201	0,0248	0,0289	0,0326	0,0359	0,0389	0,0417	0,0442	0,0465
1,6	0,0144	0,0197	0,0240	0,0277	0,0310	0,0339	0,0365	0,0389	0,0411	0,0431
1,7	0,0143	0,0193	0,0233	0,0267	0,0297	0,0322	0,0346	0,0366	0,0385	0,0402

Таблица 6

Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3; 1,4; \dots; 1,7$ ($p = q$)

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,3	0,1235	0,1400	0,1508	0,1591	0,1659	0,1717	0,1768	0,1815	0,1856	0,1894
1,4	0,1227	0,1380	0,1476	0,1547	0,1604	0,1653	0,1696	0,1733	0,1767	0,1798
1,5	0,1220	0,1363	0,1449	0,1510	0,1559	0,1600	0,1635	0,1667	0,1695	0,1720
1,6	0,1215	0,1348	0,1425	0,1479	0,1521	0,1556	0,1585	0,1611	0,1634	0,1655
1,7	0,1210	0,1335	0,1405	0,1453	0,1489	0,1519	0,1543	0,1565	0,1584	0,1601

В табл. 4–6 в качестве иллюстрации приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3$ ($p = q = 0,65$); $1,4$ ($p = q = 0,7$); $1,5$ ($p = q = 0,75$); $1,6$ ($p = q = 0,8$); $1,7$ ($p = q = 0,85$) при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (18). Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим коррелированным синхронным потоком сообщений.

3. Частный случай. Входящий рекуррентный синхронный поток сообщений

Для рассматриваемого случая имеем $p + q = 1$ ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$). Тогда система (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1(1-p)P(i-1,1) - (\lambda_1 + \mu)P(i,1) + \mu P(i+1,1) + \lambda_2(1-p)P(i-1,2) &= 0, \\ \lambda_2 p P(i-1,2) - (\lambda_2 + \mu)P(i,2) + \mu P(i+1,2) + \lambda_1 p P(i-1,1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ситуации $p = 0$, $q = 1$ и $p = 1$, $q = 0$ приводят к вырождению рекуррентного синхронного потока событий в простейший поток (формула (1)) с параметром λ_1 либо с параметром λ_2 соответственно.

Решение системы (19) будем по-прежнему искать в виде $P(i,1) = \xi^i$, $P(i,2) = G\xi^i$ ($i = 0, 1, \dots$). Тогда характеристическое уравнение для системы (19) примет вид:

$$(\xi - 1) \left[\mu^2 \xi^2 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\xi + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(1-p)\mu + \lambda_2 p \mu) \right] = 0. \quad (20)$$

Рассматривается случай $\lambda < \mu$, где $\lambda = \frac{1}{M(\tau)} = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, $M(\tau) = \frac{\lambda_1 p + \lambda_2 q}{\lambda_1 \lambda_2}$; π_1 , π_2 определены при выводе формулы (5). Случай $\lambda = \mu$ приводит (аналогично рассмотренному в разделе 2 случаю $\lambda < \mu$ и $p + q = 1$) к ситуации, когда стационарного распределения $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i = 0, 1, \dots$, не существует.

Обозначим по-прежнему ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 – корни характеристического уравнения (20), где $\xi_3 = 1$,

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \mp \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)^2 - 4[\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(1-p)\mu + \lambda_2 p \mu]} \right\}, \quad (21)$$

при этом $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$. Тогда общее решение системы (19), с учетом (20), выпишется в виде:

$$P(i,1)=R_1\xi_1^i+R_2\xi_2^i+R_3\xi_3^i, P(i,2)=G_1R_1\xi_1^i+G_2R_2\xi_2^i+G_3R_3\xi_3^i, i=0,1,\dots \quad (22)$$

В общем решении (22), так как $\xi_2 > 1$, $\xi_3 = 1$, необходимо константы R_2, R_3 положить равными нулю. Тогда (22) примет вид:

$$P(i,1)=R_1\xi_1^i, P(i,2)=G_1R_1\xi_1^i, i=0,1,\dots \quad (23)$$

Подставляя решение (23) в первое уравнение системы (19), находим константу G_1 :

$$G_1=\frac{-\lambda_1(1-p)+(\lambda_1+\mu)\xi_1-\mu\xi_1^2}{\lambda_2(1-p)}. \quad (24)$$

Для нахождения константы R_1 и вероятностей $P(-1, 1), P(-1, 2)$ привлечем граничные уравнения (7) и условие нормировки. Тогда получаем

$$P(-1,1)=\frac{\mu}{\lambda_1}R_1, P(-1,2)=\frac{\mu}{\lambda_2}G_1R_1, R_1=\left\{\mu\frac{\lambda_2+\lambda_1G_1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1+G_1}{1-\xi_1}\right\}^{-1}, \quad (25)$$

где ξ_1 определена в (21), G_1 – в (24).

Формулы (23), (25) позволяют определить числовые характеристики системы, введенные выше:

$$P(-1)=\mu\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{G_1}{\lambda_2}\right)R_1; M(I)=\frac{\xi_1(1+G_1)}{(1-\xi_1)^2}R_1; M(I+1)=\frac{1+G_1}{(1-\xi_1)^2}R_1, \quad (26)$$

где R_1 определена в (25), G_1 – в (24), ξ_1 – в (21).

Таблица 7

Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p = 0,3; 0,4; \dots; 0,7; q = 1 - p$

$p \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,8718	0,8438	0,8246	0,8106	0,8000	0,7917	0,7849	0,7794	0,7748	0,7708
0,4	0,8810	0,8611	0,8485	0,8397	0,8333	0,8284	0,8246	0,8214	0,8188	0,8167
0,5	0,8889	0,8750	0,8667	0,8611	0,8571	0,8542	0,8519	0,8500	0,8485	0,8472
0,6	0,8958	0,8864	0,8810	0,8775	0,8750	0,8732	0,8718	0,8707	0,8698	0,8690
0,7	0,9020	0,8958	0,8925	0,8904	0,8889	0,8878	0,8870	0,8864	0,8858	0,8854

Таблица 8

Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p = 0,3; 0,4; \dots; 0,7; q = 1 - p$

$p \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,0209	0,0376	0,0566	0,0776	0,1000	0,1236	0,1480	0,1729	0,1980	0,2229
0,4	0,0180	0,0298	0,0422	0,0550	0,0681	0,0811	0,0940	0,1067	0,1190	0,1310
0,5	0,0156	0,0238	0,0319	0,0399	0,0476	0,0551	0,0623	0,0692	0,0758	0,0820
0,6	0,0135	0,0191	0,0243	0,0292	0,0338	0,0381	0,0422	0,0461	0,0496	0,0530
0,7	0,0117	0,0153	0,0185	0,0214	0,0240	0,0265	0,0288	0,0308	0,0328	0,0346

Таблица 9

Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I+1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p = 0,3; 0,4; \dots; 0,7; q = 1 - p$

$p \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,1491	0,1938	0,2321	0,2670	0,3000	0,3319	0,3631	0,3935	0,4232	0,4521
0,4	0,1371	0,1687	0,1937	0,2153	0,2347	0,2527	0,2695	0,2853	0,3002	0,3143
0,5	0,1267	0,1488	0,1652	0,1787	0,1905	0,2010	0,2105	0,2192	0,2273	0,2347
0,6	0,1177	0,1327	0,1433	0,1517	0,1588	0,1650	0,1704	0,1754	0,1798	0,1839
0,7	0,1098	0,1194	0,1260	0,1310	0,1352	0,1387	0,1418	0,1445	0,1469	0,1491

В табл. 7–9 в качестве иллюстрации приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$; $q = 1 - p$ при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (26). Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим рекуррентным синхронным потоком сообщений.

Заключение

В настоящей статье изучена однолинейная СМО с входящим коррелированным синхронным дважды стохастическим потоком событий с двумя состояниями, являющимся частным случаем МАР-потока событий. Немарковский процесс $i(t)$ – число запросов в очереди в момент времени t – путем введения дополнительной переменной $j(t)$ – состояние входящего синхронного потока в момент времени t – сводится к двумерному процессу $(i(t), j(t))$, являющемуся марковским процессом. С использованием метода диаграмм интенсивностей переходов находится явное аналитическое стационарное распределение вероятностей состояний процесса $(i(t), j(t))$ ($t \rightarrow \infty$). Приводятся явные аналитические формулы для числовых характеристик системы и построенные на основании этих формул зависимости числовых характеристик от параметров СМО, представленные в таблицах. Рассмотрен также частный случай входящего потока запросов – рекуррентный синхронный поток с двумя состояниями.

Список источников

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.Н. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
2. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1995. V. 51, № 3. P. 433–441.
3. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, № 4. P. 923–930.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16, № 4. P. 764–779.
7. Lucatoni D.M. New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7, № 1. P. 1–46.
8. Lucatoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10, № 3. P. 575–598.
9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1–1. С. 24–29.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № S6. С. 232–239.
11. Горцев А.М., Голофастова М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 42–53.
12. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № S9–2. С. 129–138.
13. Nezhel'skaya L. Probability Density Function for Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564, P. 141–151.
14. Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 57–67.
15. Нежелская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. 210 с.
16. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О рекуррентности дважды стохастических потоков событий // Вестник Томского государственного университета. 2005. № S14. С. 258–266.

17. Медведев Г.А. Анализ стохастических графов, описывающих поведение шаговых систем автоматического поиска // Автоматика и вычислительная техника. 1968. № 4. С. 27–30.
18. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М. : Физматлит, 1959. 400 с.

References

1. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokamy. Teoria i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
2. Cox, D.R. (1995) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
3. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 2]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16(4). pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
7. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7(1). pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
8. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 10(3). pp. 575–598. DOI: 10.1080/15326349408807311
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Dead time and parameters estimating of a synchronous alternating flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S6. pp. 232–239.
11. Gortsev, A.M. & Golofastova, M.N. (2013) The optimal state estimation of modulated synchronous twice stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computing Science*. 2(23). pp. 42–53.
12. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Dead time and parameters estimation of a synchronous alternating flow with the manifestation or non-manifestation of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S9-2. pp. 129–138.
13. Nezhelskaya, L. (2015) Probability Density Function for Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
14. Nezhelskaya, L.A. (2015) Joint probability density of the intervals duration in modulated MAP event flows and its recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computing Science*. 1(30). pp. 57–67.
15. Nezhelskaya, L.A. (2020) *Otsenka sostoyaniy dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobyitiy* [States Estimation of Doubly Stochastic Event Flows]. Tomsk: Tomsk State University.
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2005) On the recurrence of doubly stochastic flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S14. pp. 258–266.
17. Medvedev, G.A. (1968) Analiz stokhasticheskikh grafov, opisuyayushchikh povedeniye shagovykh system avtomaticheskogo poiska [Analysis of stochastic graphs describing the behavior of stepwise automatic search systems]. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automation and Computer Science*. 4. pp. 27–30.
18. Gelfond, A.O. (1959) *Ischislenie konechnykh raznostey* [Calculus of finite differences]. Moscow: Fizmatlit.

Информация об авторах:

Горцев Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Бочарова Мария Александровна – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 89131140060@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Gortsev Alexander M. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Head. Department of PM IPMKN, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Bocharova Maria A. (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89131140060@mail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 25.12.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 25.12.2021; accepted for publication 30.05.2022