ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2022 Управление, вычислительная техника и информатика № 59

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 004.932.2
doi: 10.17223/19988605/59/8

# Сравнение алгоритма кратномасштабного анализа изображений в частотной области с алгоритмом Малла

**Владимир Ильич Семенов**

*Чувашский государственный университет, Чебоксары, Россия, syundyukovo@yandex.ru*

**Аннотация.** Выполнено сравнение алгоритма кратномасштабного анализа (КМА) изображений в частотной области с алгоритмом Малла. В алгоритме Малла используются масштабные коэффициенты, кратные двум, и вычисление производится итеративно с двукратным прореживанием вейвлет-коэффициентов при каждом последующем разложении. Этот алгоритм также называется быстрым дискретным вейвлет-преобразованием (ВП). В алгоритме КМА в частотной области для увеличения скорости вычисления применяется быстрое преобразование Фурье (БПФ). Вейвлет-коэффициенты вычисляются не итеративно: для каждого уровня они получаются из сигнала независимо от предыдущих уровней, и кратность анализа может быть меньше двух. Уменьшение кратности позволяет увеличить глубину декомпозиции. В отличие от алгоритма Малла применяются симметричные или антисимметричные ортогональные вейвлеты, что повышает точность реконструкции. Изображение обрабатывается не по строкам и столбцам, а прогрессивной разверткой в целом. Применение БПФ уменьшает время преобразования изображений на четыре порядка по сравнению прямым численным интегрированием, и за счет этого время декомпозиции и реконструкции не больше по сравнению с временем дискретного ВП и может быть меньше.

**Ключевые слова:** вейвлет-преобразование; декомпозиция; реконструкция; кратномасштабный анализ; алгоритм Малла; амплитудно-частотная характеристика; фильтр

***Для цитирования*:** Семенов В.И. Сравнение алгоритма кратномасштабного анализа изображений в частотной области с алгоритмом Малла // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 73–82. doi: 10.17223/19988605/59/8

Original article
doi: 10.17223/19988605/59/8

# Comparison of the algorithm of multiscale image analysis in the frequency domain with the Mall algorithm

**Vladimir I. Semenov**

*Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation, syundyukovo@yandex.ru*

**Abstract.** This paper compares the algorithm for multiplescale analysis of images in the frequency domain with the Mall algorithm. The Mall algorithm uses scaling factors multiple of 2 and computation is performed iteratively with twofold thinning of the wavelet coefficients at each subsequent decomposition. This algorithm is also called fast discrete wavelet transform. The frequency domain multiplexing algorithm uses the fast Fourier transform (FFT) to increase computational speed. The wavelet coefficients are not calculated iteratively, but for each level they are obtained from the signal independently of the previous levels and the multiplicity of analysis can be less than 2. Reducing the multiplicity allows increasing the decomposition depth. In contrast to Mall's algorithm, symmetric or antisymmetric orthogonal wavelets are used, which increases the accuracy of reconstruction. The image is processed not by rows and columns, but by progressive sweep as a whole. Application of FFT reduces the image transformation

© В.И. Семенов, 2022

time by four orders of magnitude compared to the direct numerical integration, and due to this the decomposition and reconstruction time is not longer compared to the discrete wavelet transform time and can be less.

**Keywords:** wavelet transform; decomposition; reconstruction; multiscale analysis; Mall's algorithm; amplitude-frequency response; filter

***For citation*:** Semenov, V.I. (2022) Comparison of the algorithm of multiscale image analysis in the frequency domain with the Mall algorithm. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 73–82. doi: 10.17223/19988605/59/8

Вейвлет-анализ является эффективным инструментом исследования локальных свойств нестационарных сигналов. Базисные функции, называемые вейвлетами, обладают свойством частотно-временной локализации, и сам анализ называется частотно-временным. Аналогом частоты для вейвлет-преобразования является обратная величина масштабного коэффициента. В настоящее время для кратномасштабного анализа (КМА) сигналов используется алгоритм Малла – быстрый способ вычисления дискретного вейвлет-преобразования (ВП) [1]. КМА – это *m*-шаговое дискретное ВП. Максимальное значение *m* называется глубиной декомпозиции (разложения). У алгоритма Малла есть недостатки:

1. Необходимо иметь масштабирующую функцию.
2. Амплитудно-частотная характеристика вейвлетов неравномерна.
3. Вейвлеты несимметричны или антисимметричны.
4. Коэффициент изменения масштаба меняется только с кратностью 2.
5. Точность вычисления уменьшается с увеличением уровня разложения, так как при каждом уровне декомпозиции длина выборки уменьшается в 2 раза.
6. Не используется прогрессивная развертка изображения при кратномпсштабном анализе.
7. Необходимо решать много уравнений для конструирования вейвлетов больших порядков.

Для устранения этих недостатков актуально использование КМА в частотной области. Преимуществом алгоритма в частотной области является еще и способ вычисления. Если для определения вейвлет-коэффициентов последующего уровня в алгоритме Малла необходимо вычислить предыдущие вейвлет-коэффициенты, то в частотной области можно параллельно вычислять все вейвлет-коэффициенты. На аппаратном уровне это можно сделать, используя много устройств быстрого преобразования Фурье (БПФ), соединенных параллельно, тем самым уменьшив во много раз время КМА. Исходя из таких предположений, сравниваются алгоритм Малла и алгоритм КМА в частотной области.

Для исследования нестационарных сигналов кроме ВП применяются и другие преобразования. Самое известное их них – оконное преобразование Фурье (ОПФ), когда сигнал разлагается в спектр с использованием БПФ на участках (окнах), намного меньших длительности самого сигнала [2]. Таким образом добиваются улучшения временного разрешения, т.е. того момента, когда произошло изменение частоты сигнала. При использовании ОПФ узкое окно обладает лучшим временным разрешением, широкое окно – лучшим частотным разрешением. Проблема состоит в том, что приходится выбирать фиксированное окно для всего сигнала, тогда как разные участки сигнала могут требовать применения разных окон. ОПФ покрывает плоскость время–частота прямоугольниками с неизменным разрешением по времени и частоте на всех участках, а для исследования реальных сигналов необходимо разбить плоскость время–частота прямоугольниками с разным разрешением по времени и частоте на разных участках. Около резких изменений сигнала окна должны быть узкими, а в остальной области можно использовать более широкие окна. Как раз ВП имеет хорошее разрешение по времени и плохое разрешение по частоте на высоких частотах, а на низких частотах – хорошее разрешение по частоте и плохое разрешение по времени. Когда сигнал имеет высокочастотные компоненты короткой длительности и низкочастотные компоненты протяженной длительности, использование ВП наиболее эффективно. ВП анализирует сигнал на различных частотах и с различным разрешением одновременно.

Разновидностями ОПФ также являются преобразование (метод) Прони [3], когда применяется разложение сигнала на экспоненциально затухающие синусы или косинусы, и другие методы, использующие полиномы Чебышева, Кравчука, Шарлье и гибриды Кравчука–Чебышева [4, 5]. Затухающие экспоненциально синусы имеют перекрывающие широкие частотные характеристики, и разложение является неортогональным. Другие методы также основаны на вычислениях во временной области, используют рекуррентные соотношения и требуют много времени для полиномов большого порядка. Из-за того, что свойство локализации хуже, чем для ВП, равно как для ОПФ и других преобразований, эти преобразования в данной работе не сравниваются с алгоритмом КМА в частотной области.

Целью работы является сравнение алгоритма кратномасштабного анализа сигналов в частотной области с алгоритмом Малла с точки зрения применяемых вейвлетов, глубины декомпозиции, скорости и точности вычисления. В ходе исследования сконструированы симметричные и антисимметричные вейвлеты, которые позволили увеличить точность реконструкции изображений, уменьшить время преобразования.

## 1. Алгоритм Малла

С. Малла в своем алгоритме использовал идеи субполосного (пирамидального) кодирования речевого сигнала. При таком кодировании сигнал пропускается через древовидное соединение высокочастотных и низкочастотных фильтров (ВЧ- и НЧ-фильтры; квадратурно-зеркальные фильтры (КЗФ)). Самый простой способ ВП – это использование простейшей масштабирующей (скейлинг) функции и вейвлета Хаара, когда КЗФ получаются за счет суммирования и разности соседних отсчетов сигнала. Суммирование эквивалентно пропусканию через НЧ-фильтр, а разность – через ВЧ-фильтр. Используя более сложные вейвлеты, такие как вейвлеты Добеши *n*-го порядка, вычисляют взвешенные суммы и взвешенные разности, т.е. свертку сигнала с импульсной характеристикой (ИХ) ВЧ- и НЧ-фильтров, и получаются детализирующие коэффициенты и коэффициенты аппроксимации после децимации каждого 2-го отсчета. На рис. 1 представлена схема разложения сигнала. Данное разложение можно повторить несколько раз для дальнейшего увеличения частотного разрешения с дальнейшим прореживанием коэффициентов после НЧ- и ВЧ-фильтрации. Такое разложение можно представить в виде двоичного дерева, где листья и узлы соответствуют пространствам с различной частотно-временной локализацией. На рис. 2 представлено это дерево. После первого разложения все вычисления производятся с детализирующими коэффициентами и коэффициентами аппроксимации итеративно. Обратное ВП вычисляется в обратном порядке с интерполяцией коэффициентов.

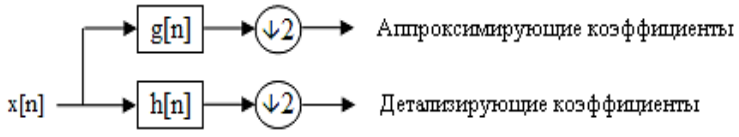


Рис. 1. Схема разложения сигнала при дискретном вейвлет-преобразовании
Fig. 1. Signal decomposition scheme for discrete wavelet transform

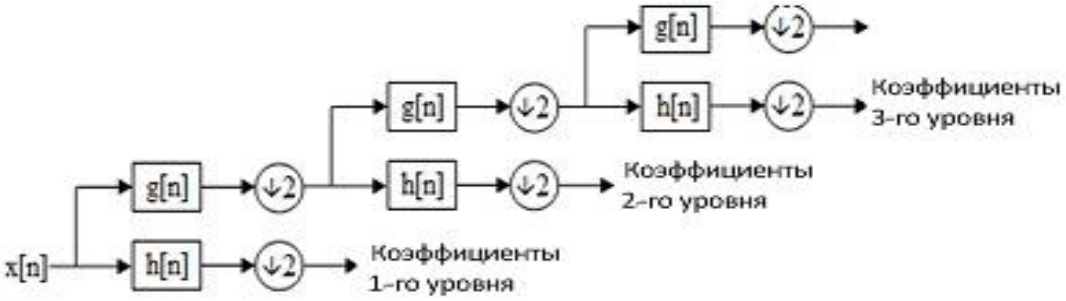


Рис. 2. Трехуровневый банк фильтров
Fig. 2. Three-level filter bank

Разложение функций на вейвлетные ряды на заданном уровне разрешения для дискретного ВП выполняется по формуле

$$x(t) = \sum_k C_{m,k}\varphi_{m,k}(t) + \sum_{m,k} D_{m,k}\psi_{m,k}(t),$$

где $\psi_{m,k}(t)$ – вейвлет, $\varphi_{m,k}(t)$ – скейлинг-функция, $D_{m,k}$, $C_{m,k}$ – детализирующие и аппроксимирующие коэффициенты.

В результате преобразования сигнал декомпозируется на разные частотные области, которые представлены на рис. 3. Каждая область в два раза шире предыдущей частотной области с увеличением масштабного коэффициента. Так как амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтров неидеальные, происходит наложение спектров.

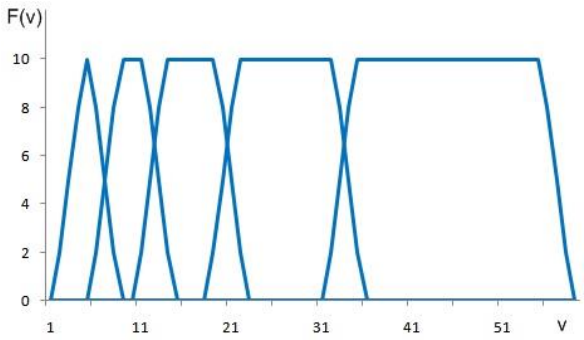


Рис. 3. Спектры разного масштабного коэффициента
Fig. 3. Spectra of different scale coefficients

Для того чтобы преобразовать изображение, каждая его строка по схеме, представленной на рис. 1, декомпозируется, потом полученные коэффициенты по такой же схеме вычисляются по столбцам (сепарабельное преобразование), и процесс повторяется до максимальной глубины разложения [1, 6–8].

## 2. Алгоритм прямого и обратного ВП в частотной области

Для вычисления вейвлет-спектра сигнала на основе производных функции Гаусса и вейвлетов, сконструированных в частотной области, используется формула непрерывного ВП:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\ \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\ dt, \qquad (1)$$

где $a$ – масштабный коэффициент вейвлета, $b$ – параметр сдвига. С разными масштабными коэффициентами скейлинг-функция не используется. Такое преобразование эквивалентно прохождению сигнала через полосовые фильтры в разном диапазоне частот. Для вычисления ВП прямым численным интегрированием необходимо много времени, поэтому вейвлет-спектр вычисляется в частотной области с применением БПФ. Чтобы вычислить ВП сигнала в частотной области, необходимо получить Фурье-спектры сигнала и вейвлета для разных масштабных коэффициентов $a$, найти комплексно сопряженный спектр и обратным преобразованием Фурье комплексно сопряженных спектров получить вейвлет-спектр сигнала. Алгоритм численного вычисления прямого непрерывного быстрого ВП сигнала $S(t)$ по формуле (1) в частотной области представлен в работе [9].

Подобно обратному ПФ существует обратное непрерывное ВП:

$$S(t) = C_\psi^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\ W(a,b)\frac{dadb}{a^{3+k}}, \qquad (2)$$

где $C_\psi$ – нормализующий коэффициент:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |F_\psi(\omega)|^2 \cdot \omega^{-1} d\omega < \infty,$$

$F_\psi(\omega)$ – Фурье-спектр базисной функции, параметр $k$ – показатель степени масштабного множителя (параметр $k$ может быть отрицательным).

Алгоритм численного вычисления обратного непрерывного быстрого ВП сигнала $S(t)$ по формуле (2) в частотной области представлен в работе [10]. Для декомпозиции изображения прогрессивной разверткой в целом по горизонтали вертикали считываются пиксели и вычисляются вейвлет-коэффициенты в частотной области. Также вычисляются вейвлет-коэффициенты в частотной области для вертикальной прогрессивной развертки. Реконструкция происходит в обратном направлении. КМА изображения получается суммированием разных уровней. В зависимости от количества учитываемых уровней одномерный или двумерный сигнал можно представить в виде последовательных приближений от грубого до наилучшего приближения. Можно сигнал исследовать и в обратном порядке: суммировать от самых мелких деталей до самых больших, а также можно суммировать разные уровни в разной комбинации.

### 3. Конструирование вейвлетов в частотной области

В работе [11] отмечено: «Для практики желательно было бы иметь ортогональные симметричные и асимметричные вейвлеты, но таких идеальных вейвлетов не существует». Действительно, для дискретного ВП нет ортогональных симметричных и антисимметричных вейвлетов. Про непрерывное ВП пишут: «Грубые вейвлеты обладают минимумом свойств, которыми должны обладать вейвлеты, обеспечивающие полноценные возможности в технике преобразования сигналов: анализ не является ортогональным, возможность реконструкции не гарантирована, быстрые алгоритмы преобразований и точная реконструкция невозможны».

С использованием алгоритмов непрерывного ВП в частотной области ортогональные симметричные и антисимметричные вейвлеты сконструировать можно, быстрые алгоритмы возможны, можно точно реконструировать сигнал.

Вейвлеты и ИХ фильтров тесно взаимосвязаны. Вейвлеты с самым большим масштабным коэффициентом являются фильтрами нижних частот, со средним значением масштабного коэффициента – полосовыми фильтрами, а с самым меньшим значением масштабного коэффициента – фильтрами верхних частот. Можно заметить, что конструирование ортогональных симметричных и антисимметричных вейвлетов – это синтез цифровых фильтров с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой и линейной фазочастотной характеристикой (ФЧХ). В научной литературе по цифровым фильтрам на основе критерия Пэли–Винера (Пели–Виннера) доказывается, что фильтры с прямоугольной АЧХ физически нереализуемы. Также отмечается, что прямоугольные АЧХ приводят к пульсациям слева и справа от частоты среза и появлению переходной полосы (явление Гиббса). Объясняется это усечением ряда Фурье. Объясняют явление Гиббса, используя свойство свертки.

В теории обобщенного преобразования Фурье (ПФ) доказывается, что вейвлеты ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Исследования показывают: чем меньше наложение спектров вейвлетов для разных масштабных коэффициентов, тем меньше их скалярное произведение. В частотной области это утверждение соответствует тому, что произведение спектров этих вейвлетов равно нулю, т.е. спектры не должны накладываться друг на друга, как показано на рис. 3. Спектры должны быть расположены так, как на рис. 4. При декомпозиции и последующей реконструкции сигнал можно точно восстановить лишь тогда, когда АЧХ вейвлетов будут прямоугольными, имеющими одинаковый коэффициент усиления, но разный диапазон частот в полосе пропускания, чтобы была постоянная добротность. Все другие АЧХ, другой формы, образуют в наборе неравномерную АЧХ блока фильтров. Вейвлеты на основе производных функции Гаусса (грубые вейвлеты) имеют меньшее значение скалярного произведения, если порядок производной больше. Спектры этих вейвлетов у́же, наложения меньше, и реконструкция сигнала точнее. Хотя про дискретные вейвлеты пишут, что они ортогональны, на самом деле это не совсем так, потому что спектры всех таких вейвлетов перекрываются, как представлено на рис. 3. Это и нелинейные ФЧХ приводят к искажению реконструированного сигнала. Алгоритм позволяют производить КМА изображений в частотной области не

только с коэффициентом изменения масштаба, равным 2, но и с кратностью меньше 2. Переход в частотную область позволяет конструировать вейвлеты с заданными свойствами, которые невозможно получить во временной области.

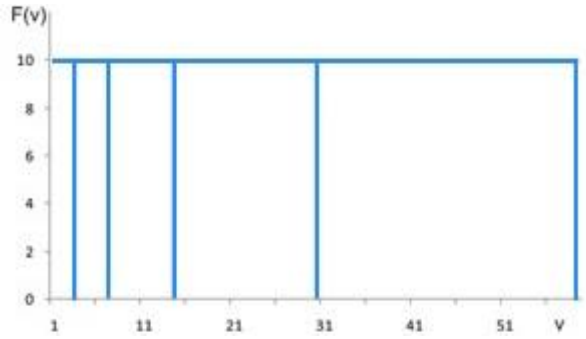


Рис. 4. Спектрыразногомасштабногокоэффициента
Fig. 4. Spectra of different scale coefficients

В ходе исследований были сконструированы ортогональные симметричные и антисимметричные вейвлеты. На рис. 5 представлен один из подобных вейвлетов. Скалярное произведение таких вейвлетов равно нулю. Только для вейвлетов с одинаковыми масштабными коэффициентами скалярное произведение не равно нулю. На рис. 6 представлена АЧХ вейвлета в децибелах. Видно, что в полосе задерживания ослабление около 300 дБ, что сравнимо с погрешностью вычисления. На АЧХ нет никаких пульсаций в полосе пропускания.

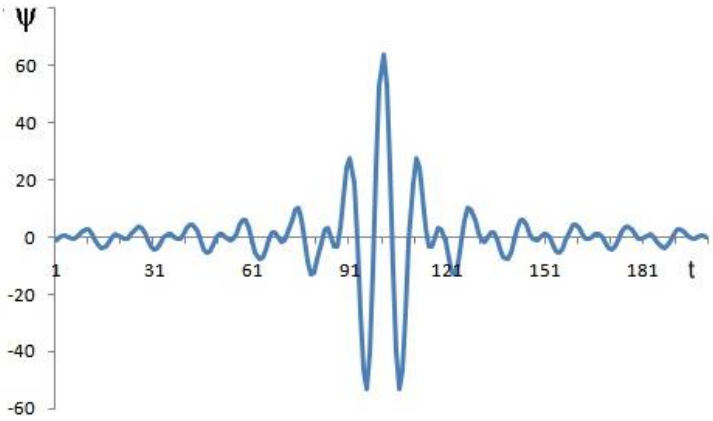


Рис. 5. Ортогональный симметричный вейвлет
Fig. 5. Orthogonalsymmetricwavelet

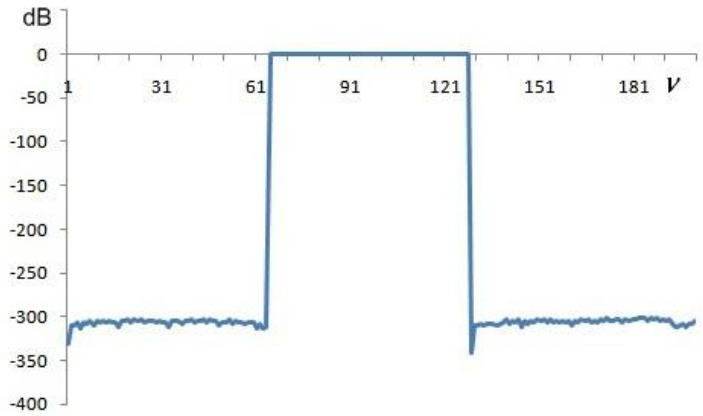


Рис. 6. АЧХ симметричного ортогонального вейвлета в децибелах
Fig. 6. Frequency response of symmetric orthogonal wavelet in decibels

На рис. 7 представлена АЧХ вейвлета. Видно, что нет переходной полосы. Ковариационная матрица для такого вейвлет-преобразования диагональная. Ковариационная матрица для вейвлетов на основе производных функции Гаусса недиагональная, так как АЧХ непрямоугольная. Если ковариационная матрица имеет диагональный вид, то вейвлеты разных уровней декомпозиции ортогональны. Это подобно ортогональному преобразованию Карунена–Лоэва, приводящему ковариационную матрицу к диагональному виду. Использование преобразования Карунена–Лоэва для больших последовательностей нецелесообразно, так как нет быстрых алгоритмов его вычисления.

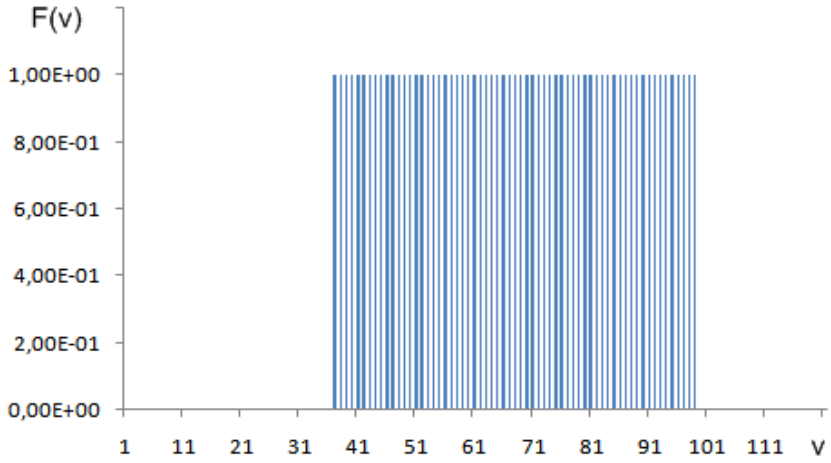


Рис. 7. АЧХ симметричного ортогонального вейвлета
Fig. 7. Frequency response of a symmetric orthogonal wavelet

На рис. 8 представлена АЧХ фильтров верхних частот (см. пример 4.17 из [12. С. 142].), синтезированных во временной и частотной областях в децибелах (логарифмический масштаб). Коэффициенты ИХ фильтра, синтезированного во временной области, вычислены по формуле

$$b_{N+k} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=\frac{N+1}{2}}^{N} \cos\left(\frac{\pi k(j+0{,}5)}{N+1}\right).$$

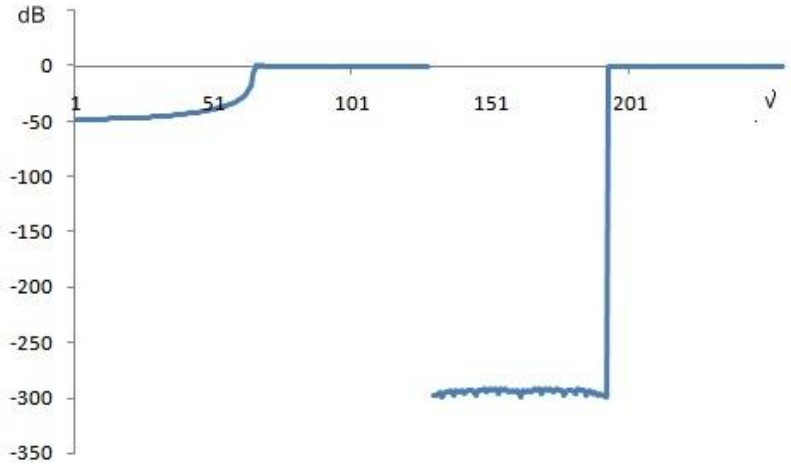


Рис. 8. АЧХ фильтра верхних частот, синтезированного во временной и частотной областях в децибелах
Fig. 8. Frequency response of the high-pass filter synthesized in the time and frequency domains in decibels

До частоты 128 единиц представлена частотная характеристика фильтра, синтезированного во временной области, а от 129 до 256 единиц – фильтра, синтезированного в частотной области методом конструирования ортогональных вейвлетов. На рис. 8 отчетливо видно, как сильно отличаются частотные характеристики этих фильтров при сопоставлении их в одинаковом масштабе. Для фильтра, синтезированного во временной области, также наблюдается явление Гиббса. Можно сказать,

что вейвлеты, или цифровые фильтры, полученные в частотной области, имеют идеальную АЧХ в пределах погрешности вычисления. Если в критерии Пэли–Винера модуль частотной передаточной функции не равен нулю, но меньше погрешности вычисления, то интеграл не расходится. В связи с выполнением условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|Ln\left|K(i\omega)\right|\right|}{1+\omega^2} d\omega < \infty$$

можно сказать, что сконструированные вейвлеты не противоречат критерию Пэли–Винера, а явление Гиббса не наблюдается.

## 4. Результаты сравнения кратномасштабного анализа изображений с использованием алгоритма Малла и алгоритма в частотной области

Сконструированные вейвлеты применялись для декомпозиции и реконструкции изображений. Реконструированные изображения ничем не отличаются от оригинальных изображений и лучше, чем для алгоритма Малла. Вейвлеты с прямоугольной АЧХ позволили уменьшить время вычисления прямого ВП в частотной области в 2 раза по сравнению с использованием вейвлетов на основе производных функции Гаусса. Такие вейвлеты дали возможность уменьшить время вычисления обратного ВП сигнала с размером выборки 32 768 и 262 144 отсчетов в 260 и 5 000 раз соответственно по сравнению с алгоритмом с использованием БПФ. Конструирование симметричных и антисимметричных вейвлетов с прямоугольной АЧХ позволило обратное ВП вычислять не менее чем в 10 млн раз быстрее по сравнению с прямым численным интегрированием. Профилировка проводилась для процессора Celeron® с частотой 2,54 ГГц, ОЗУ 1 Гб.

Для сравнения с традиционным преобразованием Малла для обработки изображений масштабный коэффициент *a* также был выбран равным 2. На рис. 9, *a* представлено цветное изображение размером 512 × 512 пикселей (оригинал). На рис. 9, *b* представлено изображение, реконструированное с применением алгоритма КМА в частотной области. На рис. 9, *c* представлено это же изображение, реконструированное с применением алгоритма Малла. Для данного изображения вычисление проведено при помощи пакета прикладных программ MatLab. Уровней декомпозиции для алгоритма Малла – 9. Видно, что при реконструкции изображения с использованием алгоритма в частотной области все цвета сохраняются, и реконструированное изображение не отличается на глаз. При использовании алгоритма, вычисляющего ВП в частотной области, мозаичность при аппроксимации изображения не проявляется.

*a* *b* *c*

Рис. 9. Реконструкция изображения
Fig. 9. Image reconstruction (Synthesized Image)

На рис. 10, *a* представлено то же изображение, реконструированное с аппроксимирующими коэффициентами четвертого уровня для алгоритма в частотной области. Использован вейвлет на основе производной функции Гаусса 2-го порядка (MHAT-вейвлет). Глубина разложения равна 18.

*a* *b*

Рис. 10. Реконструкция изображения с аппроксимирующими коэффициентами четвертого уровня
Fig. 10. Reconstructionoftheimagewithapproximating coefficients of the fourth level

На рис. 10, *b* представлено реконструированное изображение с аппроксимирующими коэффициентами четвертого уровня для алгоритма Малла. Использован вейвлет Добеши db2. При этом хорошо видна мозаичность. Реконструкция изображения с детализирующими коэффициентами при использовании алгоритма в частотной области также дает более четкое изображение, чем в системе компьютерной математики MatLab.

## Заключение

Качество реконструированного изображения в случае реализации алгоритма Малла намного хуже. При увеличении порядка вейвлета (dbN) мозаичность уменьшается, однако качество изображения при этом остается существенно худшим по сравнению с результатами при применении вейвлетов на основе производных функции Гаусса и вейвлетов, сконструированных в частотной области. При реконструкции изображения с использованием всех уровней в MatLab многие цвета теряются, при применении же алгоритма в частотной области цветовая гамма сохраняется, реконструированное изображение не отличается от оригинала.

Конструирование вейвлетов в частотной области позволяет получать максимально возможное число начальных нулевых моментов для данной выборки. Для их получения во временной области необходимо решение системы с таким же числом уравнений, более нескольких сотен. Вейвлеты с большим числом начальных нулевых моментов являются основой концентрации информации о сигнале в немногих значимых вейвлет-коэффициентах и служат, таким образом, основой повышения коэффициента сжатия сигналов.

КМА в частотной области является более предпочтительным по сравнению с дискретным ВП, так как вейвлеты на основе производных функции Гаусса и вейвлеты, сконструированные в частотной области, имеют линейную ФЧХ. Кроме того, вейвлеты, сконструированные в частотной области, имеют прямоугольную АЧХ. В связи с этим точность реконструкции сигналов повышается, т.е. преобразование при этом является строго ортогональным. Метод конструирования вейвлетов в частотной области можно использовать для синтеза цифровых фильтров, в том числе и многополосных. Оптимальные (по Чебышеву) фильтры с конечной импульсной характеристикой в настоящее время синтезируются методами, требующими больших вычислительных затрат.

Разработанные алгоритмы прямого и обратного ВП в частотной области с использованием БПФ позволили уменьшить время преобразования изображений на 4 порядка по сравнению прямым численным интегрированием с применением вейвлетов на основе производных функции Гаусса. А использование вейвлетов, сконструированных в частотной области, позволило уменьшить время обратного ВП на 6 порядков по сравнению прямым численным интегрированием. Разработанные алгоритмы прямого и обратного ВП позволяют производить КМА изображений с кратностью, меньшей 2, тем самым разрешающая способность вейвлетов увеличивается, так как увеличивается добротность.

**Список источников**

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов : пер. с англ. М. : Мир, 2005. 671 с.
2. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. М. : ИАнП РАН, 1999. 152 с.
3. Митрофанов Г., Прийменко В. Основы и приложения метода Прони-фильтрации // Технологии сейсморазведки. 2011. № 3. С. 93–108.
4. Mahmmod B.M., Abdul-Hadi A.M., Abdulhussain S.H., Hussien A. On computational aspects of Krawtchouk polynomials for high orders // J. Imag. 2020. V. 6, № 8. P. 81.
5. Abdulhussain S.H., Ramli A.R., Mahmmod B.M., Saripan M.I., Al-Haddad S.A.R., Jassim W.A. A new hybrid form of Krawtchouk and Tchebichef polynomials: Design and application // J. Math. Imag. Vis. 2019. V. 61, № 4. P. 555–570.
6. Дремин И.Л., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // УФН. 2001. Т. 171, № 5. С. 465–501.
7. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 464 с.
8. Столниц Э., Де Роуз Е., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. М.–Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 271 с.
9. Семенов В.И., Михеев К.Г., Шурбин А.К., Михеев Г.М. Фильтрация изображений, полученных с помощью оптического микроскопа, с применением кратномасштабного анализа // Химическая физика и мезоскопия. 2014. Т. 16, № 3. С. 399–404.
10. Семенов В.И., Шурбин А.К., Михеев К.Г., Михеев Г.М. Конструирование ортогональных вейвлетов в частотной области для кратномасштабного анализа сигналов // Химическая физика и мезоскопия. 2018. Т. 20, № 2. С. 230–238.
11. Шумарова О.С., Игнатьев С.А. Оптимальный выбор вида вейвлета при обработке сигнала с вихретокового датчика // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2013. № 4 (73). С. 128–132.
12. Умняшкин С.В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов. М. : ФОРУМ–ИНФРА-М, 2009. 302 с.

**References**

1. Malla, S. (2005) *Veyvlety v obrabotke signalov* [Wavelets in signal processing]. Translated from English. Moscow: Mir.
2. Novikov, L.V. (1999) *Osnovy veyvlet-analiza signalov* [Fundamentals of Wavelet Analysis of Signals]. Moscow: RAS.
3. Mitrofanov, G. & Priymenko, V. (2011) Basics and applications of the prony filtration method. *Tekhnologii seysmorazvedki – Technologies of Seismic Exploration*. 3. pp. 93–108.
4. Mahmmod, B.M., Abdul-Hadi, A.M., Abdulhussain, S.H. & Hussien, A. (2020) On computational aspects of Krawtchouk polynomials for high orders. *Journal of Imaging*. 6(8). p. 81.
5. Abdulhussain, S.H., Ramli, A.R., Mahmmod**,** B.M., Saripan, M.I., Al-Haddad, S.A.R. & Jassim, W.A. (2019) A new hybrid form of Krawtchouk and Tchebichef polynomials: Design and application. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 61(4). pp. 555–570.
6. Dremin, I.L., Ivanov, O.V. & Nechitaylo, V.A. (2001) Veyvlety i ikh ispol'zovanie [Wavelets and their use]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Advances in Physical Sciences*. 171(5). pp. 465–501.
7. Dobeshi, I. (2001) *Desyat' lektsiy po veyvletam* [Ten Lectures on Wavelets]. Moscow; Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika.
8. Stolnits, E., De Rose, E. & Salezin, D. (2002) *Veyvlety v komp'yuternoy grafike* [Wavelets in Computer Graphics]. Moscow; Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika.
9. Semenov, V.I., Mikheev, K.G., Shurbin, A.K. & Mikheev, G.M. (2014) Filtration of images obtained using an optical microscope using multiple-scale analysis. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopy*. 16(3). pp. 399–404.
10. Semenov, V.I., Shurbin, A.K., Mikheev, K.G. & Mikheev, G.M. (2018) Designing orthogonal wavelets in the frequency domain for multiscale signal analysis. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopy*. 20(2). pp. 230–238.
11. Shumarova, O.S. & Ignatiev, S.A. (2013) Optimum choice of a wavelet when processing signals of eddy current sensors. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of SSTU*. 4(73). pp. 128–132.
12. Umnyashkin, S.V. (2009) *Teoreticheskie osnovy tsifrovoy obrabotki i predstavleniya signalov* [Theoretical Foundations of Digital Signal Processing and Representation]. Moscow: FORUM–INFRA-M.

***Информация об авторе*:**
**Семенов Владимир Ильич** – кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики факультета прикладной математики, физики и информационных технологий Чувашского государственного университета (Чебоксары, Россия). E-mail: syundyukovo@yandex.ru

***Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.***

***Information about the author*:**
**Semenov Vladimir I.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Physics, Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation). E-mail: syundyukovo@yandex.ru

***The author declares no conflicts of interests.***

*Поступила в редакцию 06.11.2021; принята к публикации 30.05.2022*

*Received 06.11.2021; accepted for publication 30.05.2022*