ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Математика и механика № 78
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.984 MSC: 47A15, 47A75, 81Q10
doi: 10.17223/19988621/78/2

О числе собственных значений модельного оператора на одномерной решетке

Аъзам Абдурахимович Имомов[1], Ислом Намозович Бозоров[2], Абдимажид Моликович Хуррамов[3]

[1] *Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан*
[2, 3] *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан*
[1] *imomov_azam@mail.ru*
[2] *islomnb@mail.ru*
[3] *xurramov@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается модельный оператор $h_\mu(k)$, $k \in (-\pi, \pi]$, соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специальными дисперсионными соотношениями, описывающими перенос частицы с узла на узлы, взаимодействующих с помощью некоторого короткодействующего потенциала притяжения v_μ, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^4$. Приводятся детальные описания изменений числа собственных значений оператора энергии $h_\mu(k)$ относительно значений вектора $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^4$ и параметра $k \in \mathbb{T}$.
Ключевые слова: оператор Шредингера, гамильтониан системы двух частиц, дисперсионные соотношения, одномерная решttка, инвариантные подпространства, собственное значение, существенный спектр, унитарно эквивалентный оператор, асимптотика определителя Фредгольма

Благодарности: Работа поддержана грантом Республики Узбекистан, проект № ФЗ–20200929224.

Для цитирования: Имомов А.А., Бозоров И.Н., Хуррамов А.М. О числе собственных значений модельного оператора на одномерной решетке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 22–37. doi: 10.17223/19988621/78/2

Original article

On the number of eigenvalues of a model operator on a one-dimensional lattice

Azam A. Imomov[1], Islom N. Bozorov[2], Abdimazhid M. Khurramov[3]

[1] *Karshi state University, Karshi, Uzbekistan*
[2, 3] *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan*
[1] *imomov_azam@mail.ru*
[2] *islomnb@mail.ru*
[3] *xurramov@mail.ru*

Abstract. A model operator $h_\mu(k)$ $k \in (-\pi, \pi]$, corresponding to the Hamiltonian of a system of two arbitrary quantum particles on a one-dimensional lattice with a special dispersion function is considered. The function describes the transfer of a particle from site to sites interacting using a short-range attraction potential v_μ, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^4$. The detailed descriptions of changes in the number of eigenvalues of the energy operator $h_\mu(k)$ $k \in (-\pi, \pi]$, relative to values of the particle interaction vector $\mu \in \mathbb{R}_+^4$ and the total quasi-momentum $k \in \mathbb{T}$ of the system of two particles is presented.

Keywords: Schrödinger operator, Hamiltonian of a system of two particles, dispersion relations, one-dimensional lattice, invariant subspaces, eigenvalue, essential spectrum, unitarily equivalent operator, asymptotics for the Fredholm determinant

Acknowledgments: This work was supported by the Republic of Uzbekistan, project no. FZ-20200929224.

For citation: Imomov, A.A., Bozorov, I.N., Khurramov, A.M. (2022) On the number of eigenvalues of a model operator on a one-dimensional lattice. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 22–37. doi: 10.17223/19988621/78/2

Введение

В моделях физики твердого тела [1, 2], а также в решетчатой квантовой теории поля [3] рассматриваются дискретные операторы, являющиеся решетчатыми аналогами оператора Шредингера на евклидовом пространстве. Кинематика квантовых частиц на решетке довольно экзотическая [4].

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шредингера с помощью выделения энергии движения центра масс так, что двухчастичные *связанные состояния* суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом (при этом такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса) [5]. Дискретный лапласиан, в отличие от непрерывного случая, не является трансляционно-инвариантным, и поэтому гамильтониан системы не разделяется на две части. На решетке *выделению центра масс* системы отвечает реализация гамильтониана как *расслоенного оператора*, т.е. *прямого интеграла* семейства операторов (операторов Шредингера) $h(k)$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса системы двух частиц k на d-мерном торе $\mathbb{T}^d$ [6].

В общем случае оператор Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, определяется в $L_2(\mathbb{T}^d)$ с некоторым дисперсионным соотношением и короткодействующим потенциалом притяжения.

В работе [7] рассматривается двухчастичный оператор Шредингера $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, ассоциированный с гамильтонианом системы двух одинаковых частиц (бозонов), взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала притяжения с энергией взаимодействия $\mu > 0$. Показано, что оператор либо имеет единственное собственное значение, либо не имеет собственных значений в зависимости от значений энергии взаимодействия $\mu > 0$ и полного квазиимпульса системы двух частиц $k \in \mathbb{T}^3$.

В случаях двух бозонов или двух фермионов, движущихся на решетке и взаимодействующих только на ближайших соседних узлах, найдено точное число собственных значений соответствующего двухчастичного оператора Шредингера $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d = 1,2 \ldots$ [8, 9]. Кроме того, в работах [10, 11] были изучены спектральные свойства одночастичного гамильтониана, описывающего движение одной квантовой частицы на решетке во внешнем поле. Исследованы число собственных значений и их расположение в зависимости от значений энергии взаимодействия $\mu \geq 0$ и $\lambda \geq 0$ ($\mu^2 + \lambda^2 > 0$).

В работах [12, 13] рассматриваются системы двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, где свободный гамильтониан задается со специально выбранными дисперсионными соотношениями и частицы взаимодействуют с помощью некоторых (выбранных) парных потенциалов притяжения. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{R}_+^N$, от энергии взаимодействия частиц $\mu =\in \mathbb{R}_+^N$ и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$.

В работе [14] рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специально выбранными дисперсионными соотношениями, описывающими перенос частицы с узла $s = 0$ на узлы $s = \pm 2n$, $n \in \mathbb{N}$, взаимодействующих с помощью парного потенциала притяжения. При этом в соответствии с дисперсионными соотношениями потенциал взаимодействия v_μ, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ выбирается таким образом, что определитель Фредгольма, соответствующий оператору $h_\mu(k)$, сводится к произведению определителей Фредгольма операторов $h_{\mu_l}(k)$ и $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Изучено число собственных значений оператора $h_\mu(k)$ в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}$, а также найдены условия существования многократного собственного значения оператора $h_\mu(k)$, лежащего левее существенного спектра.

В настоящей работе рассмотрим модельный оператор $h_\mu(k),\ \ k \in \mathbb{T},$ соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специальными четными дисперсионными соотношениями, описывающими перенос частицы с узла $s=0$ на узлы $s=\pm 2$, взаимодействующих с помощью некоторого парного короткодействующего потенциала притяжения. При этом энергия парных взаимодействий частиц является четной функцией и принимает не более четырех значений: $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2$ и μ_3.

Целью настоящей работы является изучение числа собственных значений оператора энергии $h_\mu(k)$ в зависимости от вектора энергии парных взаимодействий частиц $\mu=(\mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{R}_+^4$ и полного квазиимпульса системы двух частиц $k\in\mathbb{T}$.

Отметим, что данная работа в определенном смысле уточняет и обобщает результаты работ [10, 11], а также показывает сложную зависимость числа собственных значений от параметров операторов.

1. Формулировка основных результатов

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\ell_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

В координатном представлении модельный оператор $\hat{h}_\mu$, соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке, определяется как ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$, по формуле

$$\hat{h}_\mu=\hat{h}_0-\hat{v}_\mu,$$

где

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1,n_2)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}[\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1+s,n_2)+\hat{\varepsilon}_2(s)\hat{\psi}(n_1,n_2+s)],$$

$$(\hat{v}_\mu\hat{\psi})(n_1,n_2)=\hat{v}_\mu(n_1-n_2)\hat{\psi}(n_1,n_2).$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_1(\cdot)$, $\hat{\varepsilon}_2(\cdot)$ – некоторые дисперсионные функции, описывающие перенос частиц с узла на соседние узлы, и $\hat{v}_\mu(\cdot)$ – парный потенциал взаимодействия частиц, определенные на $\mathbb{Z}$ по формулам

$$\hat{\varepsilon}_i(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{m_i}, & \text{при}\quad s=0,\\[2mm] -\dfrac{1}{2m_i}, & \text{при}\quad s=\pm 2,\\[2mm] 0, & \text{иначе,}\end{cases}\quad \text{и}\quad \hat{v}_\mu(s)=\begin{cases}2\pi\mu_0, & \text{при}\quad s=0,\\ \pi\mu_l, & \text{при}\quad s=\pm l,\ l=1,2,3,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

где $m_i>0$ – масса i-й частицы, $i=1,2$, и $\mu_n\ge 0$, $n=0,1,2,3$.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi; \pi]$ – одномерный тор, $L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$. Переход от координатного представления оператора $\hat{h}_\mu$ к импульсному осуществляется с помощью преобразования Фурье (см. [6]):

$$\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T}), \quad (\mathcal{F}\hat{\psi})(p) = \frac{1}{2\pi}\sum_{s\in\mathbb{Z}^2} \hat{\psi}(s) e^{i(p,s)}.$$

Поэтому в импульсном представлении модельный оператор h_μ, соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке имеет вид:

$$h_\mu := \mathcal{F}\hat{h}_\mu\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\hat{h}_0\mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}\hat{v}_\mu\mathcal{F}^{-1}.$$

Двухчастичная проблема на решетке с дисперсионными соотношениями $\varepsilon_1(k_1)$ и $\varepsilon_2(k_2)$ и квазиимпульсами k_1 и k_2 в импульсном представлении с помощью отделения полного квазиимпульса системы двух частиц $k = k_1 + k_2$ и разложения фон Неймана сводится к изучению эффективной одночастичной проблемы: гильбертово пространство $L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана, ассоциированный представлением абелевой (дискретной) группы $\mathbb{Z}$, образованной с помощью перестановочных операторов на решетке

$$L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T}) = \int_{k\in\mathbb{T}} \oplus L_2(\mathbb{T})dk.$$

Тогда для оператора h_μ, соответствующего гамильтониану системы двух частиц, имеет место разложение фон Неймана [15]:

$$h_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus \tilde{h}_\mu(k)dk,$$

где квазиимпульс системы двух частиц k пробегает первую зону Бриллюэна $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Соответствующий слойный оператор $\tilde{h}_\mu(k)$ непрерывно зависит от квазиимпульса $k \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. В результате, благодаря потере сферической симметричности проблемы, спектр оператора $\tilde{h}_\mu(k)$ оказывается довольно чувствительным к изменениям квазиимпульса $k \in \mathbb{T}$.

Связанное состояние $\psi_{e,k}$ оператора $\tilde{h}_\mu(k)$ является решением уравнения Шредингера

$$\tilde{h}_\mu(k)\psi_{e,k} = e(k)\psi_{e,k}, \quad \psi_{e,k} \in L_2(\mathbb{T}),$$

и оно непрерывно зависит от квазиимпульса k. Тогда спектр $\sigma(h_\mu)$ оператора h_μ выражается с помощью спектра слойных операторов Шредингера $\tilde{h}_\mu(k)$ с фиксированным квазиимпульсом, т.е.

$$\sigma(h_\mu) = \cup_{k\in\mathbb{T}}\sigma(\tilde{h}_\mu(k)) = \cup_{j=1}\cup_{k\in\mathbb{T}}\{e_j(k)\}\cup\sigma(\tilde{h}_0(k)),$$

где $e_j(k)$, $j = 1, 2, \ldots$ – собственные значения слойного оператора $\tilde{h}_\mu(k)$.

Воспользовавшись унитарным оператором $U: L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})$, определенным по формуле (см. [14])

$$(Uf)(p) = f\left(p - \frac{\theta(k)}{2}\right), \quad \theta(k) = \arccos \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\cos 2k}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2k + \frac{1}{m_2^2}}},$$

изучение спектральных свойств оператора $\tilde{h}_\mu(k)$ сведем к изучению спектральных свойств семейства операторов $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$ по формуле

$$h_\mu(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_\mu,$$

где $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию $\mathcal{E}_k(\cdot)$:

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a(k)\cos 2p, \quad a(k) = \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2k + \frac{1}{m_2^2}},$$

и $\mathbf{v}_\mu$ – интегральный оператор с ядром $v_\mu(p-s) = \sum_{n=0}^{3} \mu_n \cos n(p-s)$, т.е.

$$(\mathbf{v}_\mu f)(p) = \sum_{n=0}^{3} \int_{\mathbb{T}} \mu_n \cos n(p-s) f(s) ds, \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Заметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [17] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}_\mu$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. Следовательно,

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

где

$$m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a(k), \quad M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + a(k).$$

Поскольку $\mathbf{v}_\mu \geq 0$, то

$$\sup(h_\mu(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \qquad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Поэтому оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений, лежащих правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma(h_\mu(k)) \cap (M(k), \infty) = \varnothing.$$

Замечание 1. *Пусть* $L_{2,e}(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$ *– подпространство четных, а* $L_{2,o}(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$ *– подпространство нечетных функций. Известно, что имеет место равенство* $L_2(\mathbb{T}) = L_{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L_{2,o}(\mathbb{T})$. *Гильбертовы пространства* $L_{2,e}(\mathbb{T})$ *и* $L_{2,o}(\mathbb{T})$ *являются инвариантными относительно самосопряженного оператора* $h_\mu(k)$. *Обозначим через* $h_{\mu,e}(k)$ *и* $h_{\mu,o}(k)$ *сужения* $h_\mu(k)|_{L_{2,e}(\mathbb{T})}$ *и* $h_\mu(k)|_{L_{2,o}(\mathbb{T})}$

оператора $h_\mu(k)$ *на* $L_{2,e}(\mathbb{T})$ *и* $L_{2,o}(\mathbb{T})$ *соответственно. Операторы* $h_{\mu,e}(k)$ *и* $h_{\mu,o}(k)$ *действуют в* $L_{2,e}(\mathbb{T})$ *и* $L_{2,o}(\mathbb{T})$ *соответственно по формулам*

$$h_{\mu,e}(k)=h_0(k)-\mathbf{v}_{\mu,e} \text{ и } h_{\mu,o}(k)=h_0(k)-\mathbf{v}_{\mu,o},$$

где $\mathbf{v}_{\mu,e}$ и $\mathbf{v}_{\mu,o}$ – интегральные операторы, действующие по формулам

$$\mathbf{v}_{\mu,e}f(p)=\sum_{n=0}^{3}\int_{\mathbb{T}}\mu_n\cos np\cos ns f(s)ds,\quad f\in L_{2,e}(\mathbb{T}),$$

$$\mathbf{v}_{\mu,o}f(p)=\sum_{n=0}^{3}\int_{\mathbb{T}}\mu_n\sin np\sin ns f(s)ds,\quad f\in L_{2,o}(\mathbb{T}).$$

Заметим, что

$$\sigma(h_\mu(k))=\sigma(h_{\mu,e}(k))\cup\sigma(h_{\mu,o}(k)) \text{ и } \sigma_d(h_\mu(k))=\sigma_d(h_{\mu,e}(k))\cup\sigma_d(h_{\mu,o}(k)).$$

Положим

$$c_{nm}(k;z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{\cos nq\cos mq dq}{\mathcal{E}_k(q)-z},\quad c_n(k;z)=c_{nn}(k;z),\quad n,m=0,1,2,3 \tag{1}$$

и

$$s_{lr}(k;z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{\sin lq\sin rq dq}{\mathcal{E}_k(q)-z},\quad s_l(k;z)=s_{ll}(k;z),\quad l,r=1,2,3. \tag{2}$$

Из представления $\mathcal{E}_k(p)$ следует, что $\min\limits_{p\in\mathbb{T}}\mathcal{E}_k(p)$ достигается только в нуле. Поэтому интеграл

$$\int_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 lq dq}{\mathcal{E}_k(q)-m(k)},\quad l=1,2,3$$

сходится и принимает положительное значение.

Положим

$$\mu_l(k)=(s_l(k;m(k)))^{-1}=\frac{a(k)}{l\pi},\quad l=1,2,3.$$

Для того чтобы сформулировать точные результаты о числе собственных значений операторов $h_{\mu,e}(k)$ и $h_{\mu,o}(k)$, а также их расположении, введем следующие разбиения: $\mathbb{E}_\alpha^{(1)}$ и $\mathbb{E}_\alpha^{(2)}$, $\alpha=1,2$, или же $\mathbb{O}_\alpha^{(1)}$, $\alpha=0,1$ и $\mathbb{O}_\beta^{(2)}$, $\beta=0,1,2$ (рис. 1, 2), плоскостей $O\mu_0\mu_2$ и $O\mu_1\mu_3$ параметров $\mu_0,\mu_2\in\mathbb{R}_+$ и $\mu_1,\mu_3\in\mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{R}_+^2=\mathbb{E}_1^{(1)}\cup\mathbb{E}_2^{(1)}=\mathbb{O}_0^{(1)}\cup\mathbb{O}_1^{(1)} \text{ и } \mathbb{R}_+^2=\mathbb{E}_1^{(2)}\cup\mathbb{E}_2^{(2)}=\mathbb{O}_0^{(2)}\cup\mathbb{O}_1^{(2)}\cup\mathbb{O}_2^{(2)},$$

где

$$\mathbb{E}_1^{(\gamma)}=\left\{(\mu_{\gamma-1},\mu_{\gamma+1})\in\mathbb{R}_+^2:\mu_{\gamma+1}\le\mu_2(k)+\frac{\mu_2^2(k)}{\mu_{\gamma-1}-\mu_2(k)}\right\},$$

$$\mathbb{E}_2^{(\gamma)}=\left\{(\mu_{\gamma-1},\mu_{\gamma+1})\in\mathbb{R}_+^2:\mu_{\gamma+1}>\mu_2(k)+\frac{\mu_2^2(k)}{\mu_{\gamma-1}-\mu_2(k)}\right\},$$

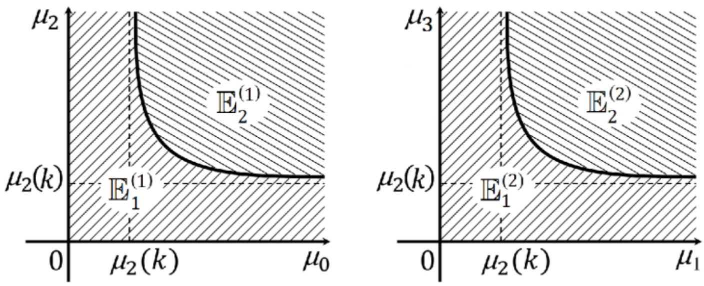
$$\mathbb{O}_0^{(1)} = \left\{(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_2 \le \mu_2(k)\right\}, \quad \mathbb{O}_1^{(1)} = \left\{(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_2 > \mu_2(k)\right\},$$

$$\mathbb{O}_0^{(2)} = \left\{(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_1 < 3\mu_2(k), \quad \mu_3 \le \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right\},$$

$$\mathbb{O}_1^{(2)} = \left\{(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_1 < 3\mu_2(k), \quad \mu_3 > \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right.$$

$$\left.\text{или } \mu_1 > 3\mu_2(k), \quad \mu_3 \le \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right\},$$

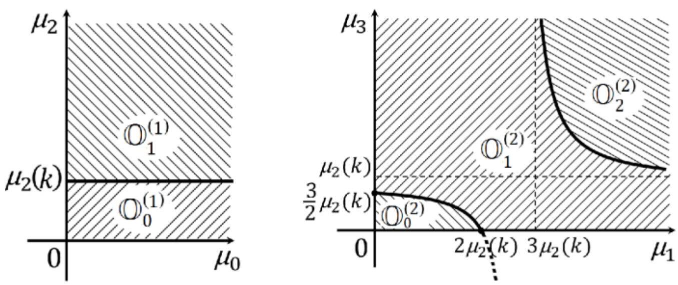
$$\mathbb{O}_2^{(2)} = \left\{(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_1 > 3\mu_2(k), \quad \mu_3 > \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right\}.$$



a *b*

Рис. 1. Схема расположения множеств $\mathbb{E}_i^{(1)}$ и $\mathbb{E}_i^{(2)}$, i = 1, 2

Fig. 1. The layout of the sets $\mathbb{E}_i^{(1)}$ and $\mathbb{E}_i^{(2)}$, i = 1, 2



a *b*

Рис. 2. Схема расположения множеств $\mathbb{O}_i^{(1)}$, i = 0, 1 и $\mathbb{O}_j^{(2)}$, j = 0, 1, 2

Fig. 2. The layout of the sets $\mathbb{O}_i^{(1)}$, i = 0, 1 and $\mathbb{O}_j^{(2)}$, j = 0, 1, 2

Следующие теоремы описывают число и расположение собственных значений операторов $h_{\mu,e}(k)$ и $h_{\mu,o}(k)$.

Теорема 1. *Пусть либо* $m_1 \ne m_2$ *и* $k \in \mathbb{T}$, *либо* $m = m_1 = m_2$ *и* $k \ne \pm\frac{\pi}{2}$. *Тогда для каждого* $k \in \mathbb{T}$ *справедливы следующие утверждения:*

1. Если $(\mu_0,\mu_2)\in\mathbb{E}_{\alpha}^{(1)}$, $(\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{E}_{\beta}^{(2)}$, $\alpha,\beta=1,2,$ *то оператор* $h_{\mu,e}(k)$ *имеет ровно* $\alpha+\beta$ *собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

2. Если $(\mu_0,\mu_2)\in\mathbb{O}_{\alpha}^{(1)}$, $(\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{O}_{\beta}^{(2)}$, $\alpha=0,1$, $\beta=0,1,2,$ *то оператор* $h_{\mu,o}(k)$ *имеет ровно* $\alpha+\beta$ *собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

Теорема 2. *Пусть* $m=m_1=m_2$ *и* $k=\pm\frac{\pi}{2}$. *Тогда оператор* $h_{\mu,e}(k)$ (*соответственно* $h_{\mu,o}(k)$) *имеет ровно четыре (соответственно три) собственных значения с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

Следующая теорема устанавливает нижнюю и верхнюю границы для числа собственных значений оператора $h_{\mu}(k)$.

Теорема 3. *1. Пусть либо* $m_1\neq m_2$ *и* $k\in\mathbb{T}$, *либо* $m=m_1=m_2$ *и* $k\neq\pm\frac{\pi}{2}$. *Тогда для каждого* $k\in\mathbb{T}$ *оператор* $h_{\mu}(k)$ *имеет не менее двух и не более семи собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

2. Пусть $m=m_1=m_2$ *и* $k=\pm\frac{\pi}{2}$. *Тогда оператор* $h_{\mu}(k)$ *имеет ровно семь собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

Замечание 2. *Пусть выполняется условие 1 теоремы 3. Если* $(\mu_0,\mu_2)\in\mathbb{P}_{\alpha}$, $\alpha=\overline{1,3}$, $(\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{Q}_{\beta}$, $\beta=\overline{1,4}$, *то для каждого* $k\in\mathbb{T}$ *оператор* $h_{\mu}(k)$ *имеет ровно* $\alpha+\beta$ *собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где*

$$\mathbb{P}_1=\mathbb{E}_1^{(1)}\cap\mathbb{O}_0^{(1)},\qquad \mathbb{P}_2=\mathbb{E}_1^{(1)}\cap\mathbb{O}_1^{(1)},\qquad \mathbb{P}_3=\mathbb{E}_2^{(1)}\cap\mathbb{O}_1^{(1)},$$

$$\mathbb{Q}_1=\mathbb{E}_1^{(2)}\cap\mathbb{O}_0^{(2)},\quad \mathbb{Q}_2=\mathbb{E}_1^{(2)}\cap\mathbb{O}_1^{(2)},\quad \mathbb{Q}_3=\mathbb{E}_2^{(2)}\cap\mathbb{O}_1^{(2)},\quad \mathbb{Q}_4=\mathbb{E}_2^{(2)}\cap\mathbb{O}_2^{(2)}.$$

2. Эскиз доказательства основных результатов

Введем функцию $\Delta_{\mu}(k;\cdot):=\Delta(k;\cdot)$ определенную в $\mathbb{C}\setminus[m(k),M(k)]$:

$$\Delta(k;z)=\Delta_e(k;z)\Delta_o(k;z), \tag{3}$$

где

$$\Delta_e(k;z)=\Delta_e^{(1)}(k;z)\Delta_e^{(2)}(k;z),\quad \Delta_o(k;z)=\Delta_o^{(1)}(k;z)\Delta_o^{(2)}(k;z), \tag{4}$$

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k;z)=(1-\mu_{\alpha}c_{\alpha}(k;z))(1-\mu_{\beta}c_{\beta}(k;z))-\mu_{\alpha}\mu_{\beta}c_{\alpha\beta}^2(k;z), \tag{5}$$

$$\Delta_o^{(\gamma)}(k;z)=(1-\alpha\mu_{\alpha}s_{\alpha}(k;z))(1-\mu_{\beta}s_{\beta}(k;z))-\alpha\mu_{\alpha}\mu_{\beta}s_{\alpha\beta}^2(k;z), \tag{6}$$

$\alpha=\gamma-1,\ \beta=\gamma+1,\ \gamma=1,2.$

Связь между нулями функции $\Delta(k;z)$ и собственными значениями оператора $h_{\mu}(k)$ устанавливается следующей леммой:

Лемма 1. *Для любого* $k \in \mathbb{T}$ *число* $z < m(k)$ *является m-кратным собственным значением оператора* $h_{\mu}(k)$ *тогда и только тогда, когда оно является m-кратным нулем функции* $\Delta(k;\cdot)$*, т.е.* $\Delta(k;z) = 0$.

Аналогичная лемма доказана в работе [14].

Следствие 1. *Для любых* $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2$, $\gamma = 1,2$, *и* $k \in \mathbb{T}$ *число* $z < m(k)$ *является собственным значением оператора* $h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k)$ (*соответственно* $h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k)$) *тогда и только тогда, когда оно является нулем функции* $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ (*соответственно* $\Delta_o^{(\gamma)}(k;\cdot)$), $\gamma = 1,2$. *Причем каждое собственное значение оператора* $h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k)$ (*соответственно* $h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k)$) *является простым (см. ниже предложение 3), где операторы* $h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k)$ *и* $h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k)$ *зависят только от пар значений* $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2$, $\gamma = 1,2$*, т.е.*

$$h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_{\mu,e}^{(\gamma)}, \quad h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_{\mu,o}^{(\gamma)}, \quad \gamma = 1,2,$$

$\mathbf{v}_{\mu,e}^{(\gamma)}$ *и* $\mathbf{v}_{\mu,o}^{(\gamma)}$ *есть интегральные операторы*

$$(\mathbf{v}_{\mu,e}^{(\gamma)} f)(p) = \int_{\mathbb{T}} (\mu_{\gamma-1} \cos(\gamma-1)p\cos(\gamma-1)s + \mu_{\gamma+1} \cos(\gamma+1)p\cos(\gamma+1)s) f(s)ds,$$

$$(\mathbf{v}_{\mu,o}^{(\gamma)} f)(p) = \int_{\mathbb{T}} (\mu_{\gamma-1} \sin(\gamma-1)p\sin(\gamma-1)s + \mu_{\gamma+1} \sin(\gamma+1)p\sin(\gamma+1)s) f(s)ds.$$

Следующие предложения 1 и 2 доказываются аналогично предложениям 1 и 2 в работах [10, 11].

Предложение 1. *I. Для любого* $k \in \mathbb{T}$ *функции* $c_{nm}(k;\cdot)$, $n+m = 0,2,4,6$, $n,m = 0,1,2,3$ *и* $s_{lr}(k;\cdot)$, $l+r = 2,4,6$, $l,r = 1,2,3$, *аналитичны в* $\mathbb{C} \setminus [m(k), M(k)]$, *положительны и монотонно возрастают на* $(-\infty, m(k))$.

II. Пусть либо $m_1 \neq m_2$ *и* $k \in \mathbb{T}$, *либо* $m = m_1 = m_2$ *и* $k \neq \pm\frac{\pi}{2}$. *Тогда для любых* $\mu_{\gamma-1} \geq 0$, $\mu_{\gamma+1} \geq 0$, $\gamma = 1,2$, *и* $k \in \mathbb{T}$ *имеют место равенства (асимптотические разложения)*

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k;z) = \mathbf{E}_{-\frac{1}{2}}^{(\gamma)}(k)(m(k)-z)^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{E}_0^{(\gamma)}(k) + O((m(k)-z)^{\frac{1}{2}}), z \to m(k)-0, \qquad (7)$$

$$\Delta_o^{(\gamma)}(k;z) = \mathbf{O}_0^{(\gamma)}(k) + O((m(k)-z)^{\frac{1}{2}}), z \to m(k)-0, \qquad (8)$$

где

$$\mathbf{E}_{-\frac{1}{2}}^{(\gamma)}(k) = \frac{\sqrt{\pi}[\mu_{\gamma-1}\mu_{\gamma+1} - (\mu_{\gamma-1} + \mu_{\gamma+1})\mu_2(k)]}{\sqrt{\mu_2^3(k)}},$$

$$\mathbf{E}_0^{(\gamma)}(k) = \frac{2\mu_2^2(k) + [(\gamma-1)\mu_{\gamma-1} + (\gamma+1)\mu_{\gamma+1}]\mu_2(k) - (\gamma+1)\mu_{\gamma-1}\mu_{\gamma+1}}{2\mu_2^2(k)},$$

$$\mathbf{O}_0^{(\gamma)}(k) = \frac{2\mu_2^2(k) - [(\gamma-1)\mu_{\gamma-1} + (\gamma+1)\mu_{\gamma+1}]\mu_2(k) + (\gamma-1)\mu_{\gamma-1}\mu_{\gamma+1}}{2\mu_2^2(k)}.$$

Предложение 2. *I. Для любых* $\mu_n \geq 0,\ \ n = 0,1,2,3$ *и* $k \in \mathbb{T}$ *функция* $1 - \mu_n c_n(k;\cdot)$ *имеет единственный нуль* $\zeta_n(k) \in (-\infty, m(k))$, *т.е.*

$$1 - \mu_n c_n(k;\zeta_n(k)) = 0, \quad n = 0,1,2,3. \tag{9}$$

II. Пусть либо $m_1 \neq m_2$ *и* $k \in \mathbb{T}$, *либо* $m = m_1 = m_2$ *и* $k \neq \pm\frac{\pi}{2}$. *Тогда для любых* $\mu_l \geq 0,\ \ l = 1,2,3$, *и* $k \in \mathbb{T}$ *справедливы следующие утверждения:*

II.1. Если $\mu_l \leq \mu_l(k)$, *то функция* $1 - \mu_l s_l(k;\cdot),\ \ l = 1,2,3$, *не имеет нулей на интервале* $(-\infty, m(k))$.

II.2. Если $\mu_l > \mu_l(k)$, *то функция* $1 - \mu_l s_l(k;\cdot),\ \ l = 1,2,3$, *имеет единственный нуль* $\xi_l(k) < m(k)$.

Заметим, что в силу следствия 1 и представления (3) исследование нулей функции $\Delta(k;\cdot)$ сводится к изучению нулей функций $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ и $\Delta_o^{(\gamma)}(k;\cdot)$, $\gamma = 1,2$, определяемых через (5) и (6), соответственно.

Отметим, что $rank(\mathbf{v}_{\mu,e}^{(\gamma)}) = 2$ (соответственно $rank(\mathbf{v}_{\mu,o}^{(\gamma)}) \leq 2$), $\gamma = 1,2$. Поэтому имеет место следующая

Лемма 2. *Оператор* $h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k)$ (*соответственно* $h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k)$), $\gamma = 1,2$, *имеет не более двух собственных значений (с учетом кратности), которые лежат левее точки* $z = m(k)$.

Положим

$$\eta_{\min}^{(\gamma)}(k) = \min\{\eta_{\gamma-1}(k), \eta_{\gamma+1}(k)\}, \quad \eta_{\max}^{(\gamma)}(k) = \max\{\eta_{\gamma-1}(k), \eta_{\gamma+1}(k)\}, \quad \gamma = 1,2,$$

и

$$\xi_{\min}(k) = \min\{\xi_1(k), \xi_3(k)\}, \qquad \xi_{\max}(k) = \max\{\xi_1(k), \xi_3(k)\}.$$

Предложение 3. *Пусть либо* $m_1 \neq m_2$ *и* $k \in \mathbb{T}$, *либо* $m = m_1 = m_2$ *и* $k \neq \pm\frac{\pi}{2}$. *Тогда для любых* $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2$, $\gamma = 1,2$, *и* $k \in \mathbb{T}$ *справедливы следующие утверждения:*

I. Если $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{E}_1^{(\gamma)}$, *то функция* $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ *имеет единственный нуль* $z_e^{(\gamma 1)}(k) < m(k)$. *При этом* $z_e^{(\gamma 1)}(k) < \eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$.

II. Если $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{E}_2^{(\gamma)}$, *то функция* $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ *имеет только два нуля* $z_e^{(\gamma 1)}(k) < m(k)$ *и* $z_e^{(\gamma 2)}(k) < m(k)$. *При этом выполняются соотношения*

$$z_e^{(\gamma 1)}(k) < \eta_{\min}^{(\gamma)}(k) \leq \eta_{\max}^{(\gamma)}(k) < z_e^{(\gamma 2)}(k).$$

III. Если $(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{O}_0^{(1)}$ (*соответственно* $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_0^{(2)}$), *то функция* $\Delta_o^{(1)}(k;\cdot)$ (*соответственно* $\Delta_o^{(2)}(k;\cdot)$) *не имеет нулей на интервале* $(-\infty, m(k))$.

IV. Если $(\mu_0,\mu_2)\in\mathbb{O}_1^{(1)}$ *(соответственно* $(\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{O}_1^{(2)}$*), то функция* $\Delta_o^{(1)}(k;\cdot)$ *(соответственно* $\Delta_o^{(2)}(k;\cdot)$*) имеет единственный нуль* $z_o^{(1)}(k)<m(k)$ *(соответственно* $z_o^{(21)}(k)<m(k)$*. При этом* $z_o^{(21)}(k)<\xi_{\min}(k)$*).*

V. Если $(\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{O}_2^{(2)}$, *то функция* $\Delta_o^{(2)}(k;\cdot)$ *имеет только два нуля –* $z_o^{(21)}(k)<m(k)$ *и* $z_o^{(22)}(k)<m(k)$*. При этом выполняются соотношения*

$$z_o^{(21)}(k)<\xi_{\min}(k)\le\xi_{\max}(k)<z_o^{(22)}(k).$$

Доказательство. I. В силу утверждения I предложения 2 функции $1-\mu_{\gamma-1}c_{\gamma-1}(k;\cdot)$ и $1-\mu_{\gamma+1}c_{\gamma+1}(k;\cdot)$, $\gamma=1,2$, монотонно убывают и имеют единственные нули $\eta_{\gamma-1}(k)$ и $\eta_{\gamma+1}(k)$ на интервале $(-\infty,m(k))$, поэтому для любого $z<\eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$, имеем

$$1-\mu_{\gamma-1}c_{\gamma-1}(k;z)>1-\mu_{\gamma-1}c_{\gamma-1}(k;\eta_{\gamma-1}(k))=0,$$
$$1-\mu_{\gamma+1}c_{\gamma+1}(k;z)>1-\mu_{\gamma+1}c_{\gamma+1}(k;\eta_{\gamma+1}(k))=0.$$

Отсюда и из утверждения I предложения 1 следует, что неравенство

$$\frac{\partial\Delta_e^{(\gamma)}(k;z)}{\partial z}=-\mu_\alpha\frac{\partial c_\alpha(k;z)}{\partial z}(1-\mu_\beta c_\beta(k;z))-\mu_\beta\frac{\partial c_\beta(k;z)}{\partial z}(1-\mu_\alpha c_\alpha(k;z))-$$
$$-2\mu_\alpha\mu_\beta c_{\alpha\beta}(k;z)\frac{\partial c_{\alpha\beta}(k;z)}{\partial z}<0,\quad \alpha=\gamma-1,\quad \beta=\gamma+1,\quad \gamma=1,2,$$

выполняется при всех $z<\eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$, т.е. функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty,\eta_{\min}^{(\gamma)}(k))$. Из равенств (1), (5) и (9) следуют соотношения

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta_e^{(\gamma)}(k;z)=1,$$
$$\Delta_e^{(\gamma)}(k;\eta_{min}^{(\gamma)}(k))=-\mu_\alpha\mu_\beta c_{\alpha\beta}^2(k;\eta_{min}^{(\gamma)}(k))<0, \tag{10}$$

при $\alpha=\gamma-1,\ \beta=\gamma+1,\ \gamma=1,2.$

Поэтому существует единственное число $z_e^{(\gamma1)}(k)<\eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$ такое, что

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k;z_e^{(\gamma1)}(k))=0.$$

Покажем, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ не имеет нулей на интервале $(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k),m(k))$, а именно

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k;z)<0 \text{ при } z\in(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k),m(k)). \tag{11}$$

Если предположить противное, т.е. $(\mu_{\gamma-1},\mu_{\gamma+1})\in\mathbb{E}_1^{(\gamma)}$, $\gamma=1,2$, и выполняется неравенство $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\eta)\ge 0$ для некоторого $\eta\in(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k),m(k))$, то в силу неравенств (10) и $\lim\limits_{z\to m(k)-0}\Delta_e^{(\gamma)}(k;z)<0$, а также непрерывности функции $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ она имела бы не менее двух нулей (с учетом кратности) на интервале $(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k),m(k))$, а в силу (5) функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ имела бы не менее трех нулей на интервале $(-\infty,m(k))$, что противоречит утверждению леммы 2.

В силу леммы 2 из неравенства (11) вытекает, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ не имеет нулей на интервале $(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k), m(k))$, что доказывает утверждение I предложения.

II. Выше мы уже доказали, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ (см. доказательство пункта I) имеет единственный нуль на интервале $(-\infty, \eta_{\min}^{(\gamma)}(k))$. Из условия пункта II имеем

$$\lim_{z\to m(k)-0} \Delta_e^{(\gamma)}(k;z) = +\infty.$$

Отсюда и из (9), рассуждая как выше, приходим к заключению, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ на $(\eta_{\max}^{(\gamma)}(k), m(k))$ имеет единственный нуль $z_e^{(\gamma 2)}(k)$ (если бы она имела больше одного нуля, это противоречило бы лемме 2).

Таким образом, $z_e^{(\gamma 1)}(k)$ и $z_e^{(\gamma 2)}(k)$ являются нулями функции $\Delta_e^{(\gamma)}(k;\cdot)$ на $(-\infty, m(k))$, что доказывает утверждение II.

III. Пусть $z < m(k)$. В силу утверждения I предложения 1 функции $s_n(k;\cdot)$, $n=1,2,3$, и $s_{13}(k;\cdot)$ монотонно возрастают на интервале $(-\infty, m(k))$ и в силу утверждения II.1 предложения 2 при всех $z < m(k)$ имеют место неравенства

$$s_{13}(k;z) < s_{13}(k;m(k))$$

и

$$1-\mu_n s_n(k;z) > 1-\mu_n s_n(k;m(k)) \geq 0 .$$

Отсюда, из (6) и в силу условия III предложения 3 имеем

$$\Delta_o^{(1)}(k;z) > \Delta_o^{(1)}(k;m(k)) \geq 0,$$

$$\Delta_o^{(2)}(k;z) > (1-\mu_1 s_1(k;m(k)))(1-\mu_3 s_3(k;m(k))) - \mu_1\mu_3 s_{13}^2(k;m(k)) \geq 0.$$

Следовательно, функция $\Delta_o^{(1)}(k;\cdot)$ (соответственно $\Delta_o^{(2)}(k;\cdot)$) не имеет нулей на интервале $(-\infty, m(k))$.

Утверждения IV и V предложения 3 доказываются аналогично доказательству утверждений I и II.

Доказательство теоремы 1. 1. Пусть $z < m(k)$. Согласно утверждениям I, II предложения 3 имеем

$$\Delta_e^{(1)}(k;\cdot) = \begin{cases} \text{имеет единственный нуль} & \text{при} \quad (\mu_0,\mu_2) \in \mathbb{E}_1^{(1)}, \\ \text{имеет только два нуля} & \text{при} \quad (\mu_0,\mu_2) \in \mathbb{E}_2^{(1)}, \end{cases}$$

$$\Delta_e^{(2)}(k;\cdot) = \begin{cases} \text{имеет единственный нуль} & \text{при} \quad (\mu_1,\mu_3) \in \mathbb{E}_1^{(2)}, \\ \text{имеет только два нуля} & \text{при} \quad (\mu_1,\mu_3) \in \mathbb{E}_2^{(2)}. \end{cases}$$

В силу леммы 1, учитывая представления (3)–(6) и условие 1 теоремы 1, получим, что оператор $h_{\mu,e}(k)$ имеет $\alpha+\beta$, $\alpha,\beta = 1,2$, собственных значений при $(\mu_0,\mu_2) \in \mathbb{E}_\alpha^{(1)}$, $(\mu_1,\mu_3) \in \mathbb{E}_\beta^{(2)}$.

2. Пусть $z < m(k)$. В силу утверждений III–V предложения 3 имеем

$$\Delta_o^{(1)}(k;\cdot) = \begin{cases} \text{не имеет нулей} & \text{при} \quad (\mu_0,\mu_2) \in \mathbb{O}_0^{(1)}, \\ \text{имеет единственный нуль} & \text{при} \quad (\mu_0,\mu_2) \in \mathbb{O}_1^{(1)}, \end{cases}$$

$$\Delta_o^{(2)}(k;\cdot)=\begin{cases}\text{не имеет нулей} & \text{при} \quad (\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{O}_0^{(2)},\\ \text{имеет единственный нуль} & \text{при} \quad (\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{O}_1^{(2)},\\ \text{имеет только два нуля} & \text{при} \quad (\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{O}_2^{(2)}.\end{cases}$$

С учетом леммы 1 получаем утверждение 2 теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть $m=m_1=m_2$ и $k=\pm\dfrac{\pi}{2}$. В этом случае функция $\mathcal{E}_k(\cdot)$ не зависит от $p\in\mathbb{T}$, т.е. $\mathcal{E}_k(p)=m(k)=\dfrac{2}{m}$. Отсюда следует $c_{02}(k;z)=c_{13}(k;z)=s_{13}(k;z)=0$, и после элементарных вычислений находим, что функции $\Delta_e(k;\cdot)$ и $\Delta_o(k;\cdot)$, определяемые по формуле (4), имеют вид:

$$\Delta_e(k;z)=\prod_{n=0}^{3}\phi_n(k;z),\quad \Delta_o(k;z)=\prod_{l=1}^{3}\psi_l(k;z),$$

где

$$\phi_0(k;z)=1-\mu_0\frac{2\pi m}{2-zm},\quad \phi_n(k;z)=\psi_n(k;z)=1-\mu_n\frac{\pi m}{2-zm},\quad n=1,2,3.$$

В силу непрерывности и монотонности функции $\phi_n(k;\cdot)$ (соответственно $\psi_l(k;\cdot)$), учитывая равенства

$$\lim_{z\to\frac{2}{m}-0}\phi_n(k;z)=-\infty,\quad \lim_{z\to-\infty}\phi_n(k;z)=1$$

$$\left(\text{соответственно}\quad \lim_{z\to\frac{2}{m}-0}\psi_l(k;z)=-\infty,\quad \lim_{z\to-\infty}\psi_l(k;z)=1\right),$$

приходим к выводу, что функция $\phi_n(k;\cdot)$ $(\psi_l(k;\cdot))$ имеет единственный нуль на интервале $(-\infty,m(k))$. Следовательно, функция $\Delta_e(k;\cdot)$ (соответственно $\Delta_o(k;\cdot)$) имеет четыре $z_e^{(0)}(\mu_0)=\dfrac{2}{m}-2\pi\mu_0$, $z_e^{(n)}(\mu_n)=\dfrac{2}{m}-\pi\mu_n$, $n=1,2,3$ (три $z_o^{(l)}(\mu_l)=\dfrac{2}{m}-\pi\mu_l$, $l=1,2,3$) нуля на интервале $(-\infty,m(k))$.

Согласно лемме 1, получаем доказательство утверждения теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 следует из леммы 1, предложения 3 и теорем 1, 2.

Список источников

1. *Mattis D.C.* The few-body problem on a lattice // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58, No. 2. P. 361–379.
2. *Mogilner A.I.* Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results // Advances in Sov. Math. 1991. V. 5. P. 139–194.
3. *Malishev V.A., Minlos R.A.* Linear infinite-particle operators / trl. by A. Mason. Providence, RI : American Mathematical Society, 1995. VIII, 298 p. (Translations of Mathematical Monographs; v. 143).

4. *Minlos R.A., Mogilner A.I.* Some problems concerning spectra of lattice models // Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard : Proc. Conf. in Dubna, USSR, 6–10 September 1989 / P. Exner, P. Seba (eds.). Singapore : World Scientific, 1989. P. 243–257.
5. *Фаддеев Л.Д.* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. М. ; Л. : Изд-во Акад. наук СССР, Ленингр. отд-ние, 1963. 122 с. (Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР; 69).
6. *Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.* The threshold effects for the two-particle Hamiltonians // Commun. Math. Phys. 2006. V. 262. P. 91–115.
7. *Лакаев С.Н.* Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц // Функциональный анализ и его приложения. 1993. Т. 27, № 3. С. 15–28.
8. *Халхужаев А.М.* О числе собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке с взаимодействием на соседних узлах // Узбекский математический журнал. 2000. № 3. С. 32–39.
9. *Лакаев С.Н., Халхужаев А.М.* О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 2. С. 263–276.
10. *Лакаев С.Н., Бозоров И.Н.* О числе и местонахождении собственных значений одночастичного гамильтониана на одномерной решетке // Узбекский математический журнал. 2007. № 2. С. 70–80.
11. *Лакаев С.Н., Бозоров И.Н.* Число связанных состояний одночастичного гамильтониана на трехмерной решетке // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 3. С. 425–443.
12. *Муминов М.Э., Хуррамов А.М.* Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 177, № 3. С. 480–493.
13. *Муминов М.Э., Хуррамов А.М.* О кратности виртуального уровня нижнего края непрерывного спектра одного двухчастичного гамильтониана на решетке // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 180, № 3. С. 329–341.
14. *Муминов М.Э., Хуррамов А.М.* Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 177, № 4. С. 102–110.
15. *Lakaev S.N., Lakaev Sh.S.* The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice // J.Phys. A: Math.Theor. 2017. V. 50. Art. 335202. 17 p.
16. *Муминов М.Э.* О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 153, № 3. С. 381–387.
17. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М. : Мир, 1982. Т. 4. Анализ операторов. 428 с.

References

1. Mattis D.C. (1986) The few-body problem on a lattice. *Reviews of Modern Physics*. 58(2). pp. 361–379.
2. Mogilner A.I. (1991) Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results. *Advances in Soviet Mathematics*. 5. pp. 139–194.
3. Malishev V.A., Minlos R.A. (1995) *Linear Infinite-Particle Operators*. Translations of Mathematical Monographs 143. American Mathematical Society, Providence, RI.
4. Minlos R.A., Mogilner A.I. (1989) Some problems concerning spectra of lattice models. Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard. *Proceedings of the Conference in Dubna, USSR, 6–10 September. Ed. by P. Exner and P. Seba. World Scientific, Singapore*. pp. 243–257.
5. Faddeev L.D. (1963) Matematicheskiye voprosy kvantovoy teorii rasseyaniya dlya sistemy trekh chastits [Mathematical problems in the quantum theory of scattering for a system of three particles]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*. 69. pp. 3–122.
6. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. (2006) The threshold effects for the two-particle Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*. 262. pp. 91–115.

7. Lakaev S.N. (1993) On Efimov's effect in a system of three identical quantum particles. *Functional Analysis and Its Applications*. 27(3). pp. 166–175.
8. Khalkhuzhaev A.M. (2000) O chisle sobstvennykh znacheniy dvukhchastichnogo operatora Shredingera na reshetke s vzaimodeystviyem na sosednikh uzlakh [On the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice with interaction at neighboring sites]. *Uzbek Mathematical Journal.* 3. pp. 32–39.
9. Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. (2009) The number of eigenvalues of the two-particle discrete Schrödinger operator. *Theoretical and Mathematical Physics*. 158(2). pp. 221–232.
10. Lakaev S.N., Bozorov I.N. (2007) O chisle i mestonakhozhdenii sobstvennykh znacheniy odnochastichnogo gamil'toniana na odnomernoy reshetke [On the number and location of eigenvalues of the one-particle Hamiltonian on a one-dimensional lattice]. *Uzbek Mathematical Journal*. 2. pp.70–80.
11. Lakaev S.N., Bozorov I.N. (2009) The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 158(3). pp. 360–376.
12. Muminov M.I., Khurramov A.M. (2013) Spectral properties of a two-particle Hamiltonian on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 177(3). pp. 1693–1705.
13. Muminov M.I., Khurramov A.M. (2014) Multiplicity of virtual levels at the lower edge of the continuous spectrum of a two-particle Hamiltonian on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics.* 180(3). pp. 1040–1050.
14. Muminov M.I., Khurramov A.M. (2014) Spektral'nyye svoystva dvukhchastichnogo gamil'toniana na odnomernyy reshetke [Spectral properties of two particle Hamiltonian on one-dimensional lattice]. *Ufa Mathematical Journal*. 6(4), pp. 99–107.
15. Lakaev S.N., Lakaev Sh.S. (2017) The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 50. 335202.
16. Muminov M.I. (2007) Positivity of the two-particle Hamiltonian on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 153(3). pp. 1671–1676.
17. Reed M., Simon B. (1978) *Methods of Modern Mathematical Physics*. *Vol. 4: Analysis of Operators*. New York: Academic Press.

***Сведения об авторах*:**

Имомов Аъзам Абдурахимович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии физико-математического факультета Каршинского государственного университета, Карши, Узбекистан. E-mail: imomov_azam@mail.ru

Бозоров Ислом Намозович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и функционального анализа Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан. E-mail: islomnb@mail.ru

Хуррамов Абдимажид Моликович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и функционального анализа Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан. E-mail: xurramov@mail.ru

***Information about the authors*:**

Imomov Azam A. (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Karshi State University, Karshi, Uzbekistan). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Bozorov Islom N. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent of Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: islomnb@mail.ru

Khurramov Abdimazhid M. (Doctor of Philosophy on Mathematics, Docent of Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: xurramov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.06.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 24.06.2021; accepted for publication 12.07.2022