

Научная статья

УДК 531. 332. 3

doi: 10.17223/19988621/78/7

О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости

Сергей Октябринович Гладков¹, Софья Борисовна Богданова²

^{1,2} *Московский авиационный институт, Москва, Россия*

¹ *sglad51@mail.ru*

² *sonjaf@list.ru*

Аннотация. Исходя из общего представления о криволинейном движении, получена система динамических уравнений, позволяющая описать форму стационарно вращающейся в своей плоскости брахистохроны. Найдено параметрическое решение приведенных уравнений при отсутствии трения, с помощью методов численного интегрирования дана графическая иллюстрация полученной аналитически зависимости.

Ключевые слова: частота вращения, брахистохрона, динамические уравнения движения

Для цитирования: Гладков С.О., Богданова С.Б. О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 86–98. doi: 10.17223/19988621/78/7

Original article

On the shape of the brachistochrone rotating in a vertical plane

Sergey O. Gladkov¹, Sofiya B. Bogdanova²

^{1,2} *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation*

¹ *sglad51@mail.ru*

² *sonjaf@list.ru*

Abstract. The paper aims to study the influence of the brachistochrone rotating in its own plane on the gutter shape along which a body moves. The problem is solved with a moving basis, which allows one to account for all forces exerted on the body. Introduction of the moving basis yields a compact system of dynamical equations, whose validity was proven in previous author's papers. In limiting cases, such an approach is used to solve analytically the obtained equations of motion and to determine the shape of curves depending on the parameters in the equations by tabular integration. The latter is illustrated in the figures presented. According to the energy conservation law, which accounts for the rotation of the entire system as a whole, the resulting equations also include the angular frequency of rotation as an additional parameter. In this paper, the case of steady

rotation is studied. Such conditions have a significant impact on the brachistochrone. In the limiting case of low rotational speeds, the curve, as it should be, degenerates smoothly into a classical brachistochrone, which is justified by the numerical methods used.

Keywords: rotational speed, brachistochrone, dynamical equations of motion

For citation: Gladkov, S.O., Bogdanova, S.B. (2022) On the shape of the brachistochrone rotating in a vertical plane. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 86–98. doi: 10.17223/19988621/78/7

Введение

Как было уже неоднократно проверено в предыдущих авторских работах (см., напр.: [1–10]), решение задачи о брахистохроне чрезвычайно удобно проводить в мгновенном ортогональном базисе, выбранным в произвольной точке подвижной кривой, который характеризуется двумя проведенными к ней единичными векторами касательной $\mathbf{t}$ и нормали $\mathbf{n}$.

Удобство подобного подхода продиктовано последующей рациональностью получаемых уравнений и их аналитическим решением, которое оказывается при этом весьма компактным и негромоздким.

В настоящем сообщении мы приведем подробное изложение задачи о движении тела по брахистохроне с учетом ее вращения с постоянной угловой скоростью ω , направленной перпендикулярно плоскости x – y (рис. 1).

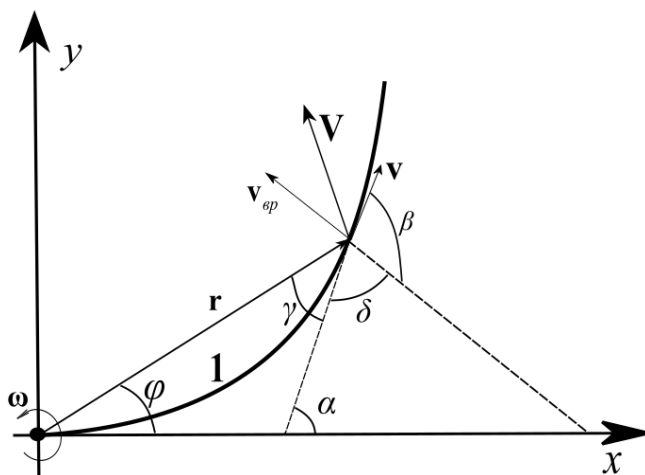


Рис. 1. Схематическое изображение задачи. $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{вр}}$, угловая скорость направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Линия 1 – траектория тела при отсутствии вращения
Fig. 1. Schematic representation of the problem. $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{rot}}$, angular velocity is perpendicular to the plane of the figure. Line 1 is the trajectory of the body without rotation

При этом в общих уравнениях движения будут учтены все основные механические силы, действующие на материальное тело массы m . Однако подобный анализ этих уравнений мы проведем с учетом одной только силы тяжести, опустив для простоты силы сухого и влажного сопротивления.

Ниже речь будет идти о нерелятивистском случае, когда частота вращения не слишком велика и время может считаться абсолютным. Главной нашей задачей при этом будет выяснение формы брахистохроны в условиях ее плоского вращения.

1. Общие уравнения движения

Решение намеченной задачи мы начнем с самого основного принципа динамики и, в отличие от всех предыдущих работ (см.: [1–10]), воспользуемся хорошо всем знакомым законом сохранения энергии по тому же принципу, который был применен нами в работах [11, 12].

Действительно, в условиях вращения мы имеем право записать следующий закон сохранения энергии (см.: [13]):

$$E = T + U = \text{const}, \quad (1)$$

где кинетическая энергия складывается из двух частей: поступательной и вращательной, а именно

$$T = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2)$$

где m – масса точечного тела, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пост}} + \mathbf{v}_{\text{вр}}$ – результирующая скорость движения, $\mathbf{v}_{\text{пост}}$ – скорость поступательного движения при отсутствии вращения, а $\mathbf{v}_{\text{вр}}$ – чисто вращательная составляющая, определяемая, как обычно, формулой $\mathbf{v}_{\text{вр}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ (рис. 2), момент инерции тела

$$J = m\mathbf{r}^2, \quad (3)$$

ω – частота вращения, которая в нашей задаче считается постоянной.

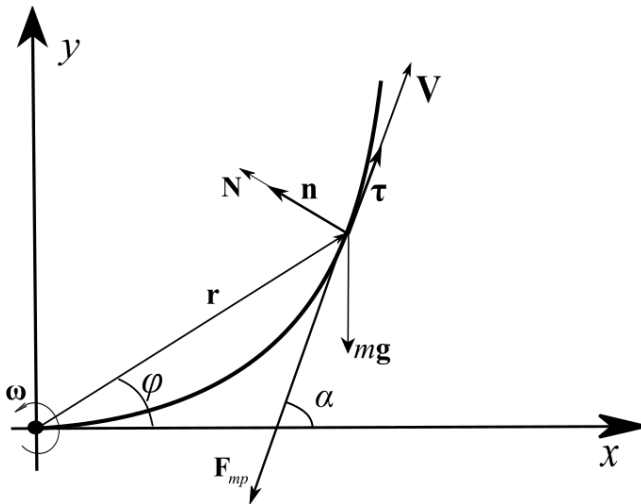


Рис. 2. Подвижный базис $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$ к результирующей траектории движения $\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t)dt$ и все силы, действующие на тело массы m

Fig. 2. A moving basis $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$ to a resultant trajectory of the motion $\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t)dt$ and all the forces exerted on the body of mass m

Что касается потенциальной энергии U , то для нее мы имеем право записать следующее выражение

$$-U = A = m \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} = m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r}, \quad (4)$$

где $\mathbf{r}_0$ – некоторое начальное положение, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, а $\mathbf{F}_{fr} = \hat{\mu} \mathbf{N} - F_c(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{v}$, где $\hat{\mu}$ – тензорный коэффициент сухого трения, $F_c(\mathbf{v})$ – сила вязкого сопротивления (например, Стокса [14]).

Поэтому, подставляя формулы (2)–(4) в общее выражение (1), имеем

$$E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{m\mathbf{r}^2\omega^2}{2} - m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} = const. \quad (5)$$

Поскольку $\mathbf{r}(t)$ представляет собой искомую результирующую траекторию, то так же как и, например, в работах [1, 5], мы воспользуемся методом мгновенного подвижного базиса $\boldsymbol{\tau}$ – $\mathbf{n}$ (см. рис. 1).

Разложение сил тяжести и сопротивления по этому базису можно представить в виде:

$$\mathbf{g} = g(\boldsymbol{\tau} \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha), \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_{fr} = N\hat{\mu}\mathbf{n} - F_c(\mathbf{v})\boldsymbol{\tau} = (\mu N - F_c(\mathbf{v}))\boldsymbol{\tau}, \quad (7)$$

где μ – общепринятый коэффициент трения, который определяется как $\mu\boldsymbol{\tau}' = \hat{\mu}\mathbf{n}'$, поскольку $\mathbf{N} = N\mathbf{n}'$, а угол α введен на рис. 1 (напомним, что $y' = \tan \alpha$).

Продифференцируем уравнение (5) по времени. Имеем в результате

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{m\mathbf{r}^2\omega^2}{2} - m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} \right] = \\ = m(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + m\omega^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{F}_{fr} \cdot \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Откуда сразу же следует, что

$$\mathbf{v}(m\dot{\mathbf{v}} + m\omega^2\mathbf{r} - m\mathbf{g} - \mathbf{F}_{fr}) = 0,$$

или в силу произвольного направления векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ получаем искомое уравнение

$$\dot{\mathbf{v}} + \omega^2 r \mathbf{e}_r = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_{fr}}{m}, \quad (8)$$

где $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Поскольку связь единичного базиса $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ полярной системы координат с подвижным базисом $\boldsymbol{\tau}$ – $\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{n} \sin(\alpha - \varphi) + \boldsymbol{\tau} \cos(\alpha - \varphi), \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{n} \cos(\alpha - \varphi) + \boldsymbol{\tau} \sin(\alpha - \varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

то уравнение (8) с учетом (6), (7) и (9) запишется как

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\boldsymbol{\tau}) + r\omega^2[\mathbf{n} \sin(\alpha - \varphi) + \boldsymbol{\tau} \cos(\alpha - \varphi)] = g(\boldsymbol{\tau} \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha) + \frac{(\mu N - F_c(\mathbf{v}))}{m}\boldsymbol{\tau}.$$

Или после дифференцирования

$$\begin{aligned} \dot{v} \tau + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} + r \omega^2 [\mathbf{n} \sin(\alpha - \varphi) + \tau \cos(\alpha - \varphi)] = \\ = g (\tau \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha) + \frac{(\mu N - F_c(v))}{m} \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнивая соответствующие проекции в уравнении (10) слева и справа, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -r \omega^2 \cos(\alpha - \varphi) + g \sin \alpha + \frac{(\mu N - F_c(v))}{m}, \\ v \dot{\alpha} = -r \omega^2 \sin(\alpha - \varphi) - g \cos \alpha, \end{cases} \quad (11)$$

где было учтено, что $v = R \dot{\alpha}$.

2. Анализ уравнений (11)

Рассмотрим подробно случай, когда силы сопротивления несущественны и ими можно пренебречь. В результате уравнения (11) сильно упрощаются, и, подчеркнем, в случае, когда $v = R \dot{\alpha}$, мы приходим к следующей весьма компактной системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -r \omega^2 \cos(\alpha - \varphi) + g \sin \alpha, \\ v \dot{\alpha} = -r \omega^2 \sin(\alpha - \varphi) - g \cos \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Если в равенствах (12) положить $\omega = 0$, мы приходим, как и должно быть, к уравнению брахистохроны (см.: [1, 2]).

Если же в рамках неподвижного случая ($\omega = 0$) положить $v = -R \dot{\alpha}$ (при $\dot{\alpha} < 0$), то уравнения (12) примут вид:

$$\begin{cases} v \dot{\alpha} = g \cos \alpha, \\ \dot{v} = g \sin \alpha, \end{cases} \quad (13)$$

и мы приходим к уравнению параболы.

Эти два чрезвычайно важных вывода свидетельствуют об очень важном и во все неочевидном факте, что в условиях свободного движения в поле силы тяжести траектория может быть только либо параболой, либо брахистохроной. Других траекторий в природе не существует. И вот здесь стоит подчеркнуть, что система уравнений (12) не опирается на обязательное для брахистохроны требование, что время скатывания наименьшее. Это требование уже автоматически заложено в самих уравнениях (12).

Раскрывая их и вводя декартовы координаты согласно преобразованиям

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

получаем

$$\begin{cases} \dot{v} = -\omega^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + g \sin \alpha, \\ v \dot{\alpha} = -\omega^2 (x \sin \alpha - y \cos \alpha) - g \cos \alpha. \end{cases}$$

Решая эти линейные уравнения относительно x, y , найдем

$$\begin{cases} \omega^2 x = -\dot{v} \cos \alpha - v \dot{\alpha} \sin \alpha, \\ \omega^2 y = -\dot{v} \sin \alpha + v \dot{\alpha} \cos \alpha + g. \end{cases} \quad (14)$$

Дифференцируя оба уравнения по времени и учитывая, что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x = v \cos \alpha, \\ \dot{y} &= v_y = -v \sin \alpha, \end{aligned}$$

приходим к следующему промежуточному результату:

$$\begin{cases} (\ddot{v} + v \omega^2 + v \dot{\alpha}^2) \cos \alpha + v \ddot{\alpha} \sin \alpha = 0, \\ (\ddot{v} - v \omega^2 + v \dot{\alpha}^2) \sin \alpha - v \ddot{\alpha} \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Если теперь верхнее уравнение в системе (15) умножить на $\cos \alpha$, а нижнее – на $\sin \alpha$, а затем их сложить, то получим

$$\ddot{v} + v(\dot{\alpha}^2 + \omega^2 \cos 2\alpha) = 0. \quad (16)$$

Если же теперь верхнее уравнение в (15) умножить на $\sin \alpha$, а нижнее – на $\cos \alpha$ и вычесть их друг из друга, то найдем

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin 2\alpha = 0. \quad (17)$$

В предельном случае неподвижного желоба, положив в уравнениях (16) и (17) $\omega = 0$, мы приходим к простой системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = 0, \\ \ddot{v} + v \dot{\alpha}^2 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Откуда следует, что

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = C_1, \\ \ddot{v} + C_1^2 v = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Таким образом, у нас получается обычное параметрическое уравнение брахистохроны. Действительно, из нижнего уравнения (19) следует, что $v = A \cos C_1 t + B \sin C_1 t$, где A, B – константы интегрирования. Положив $B = 0$, имеем $\alpha = C_1 t + C_2$, $v = A \cos C_1 t$, где C_2 – еще одна константа интегрирования. А такое решение, как известно (см.: [1–9]), характерно только для брахистохроны.

Введя в уравнениях (16) и (17) безразмерный аргумент $\tau = \omega t$, мы приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} v'' + v(\alpha'^2 + \cos 2\alpha) = 0, \\ \alpha'' + \sin 2\alpha = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где «штрих» указывает на дифференцирование по τ .

Для полноты картины система уравнений (20) должна быть дополнена еще двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x = \int v \cos \alpha d\tau, \\ y = -\int v \sin \alpha d\tau. \end{cases} \quad (21)$$

Из нижнего уравнения системы (20) после нахождения его первого интеграла получаем

$$\alpha'^2 - \cos 2\alpha = \frac{C_1^2}{\omega^2}, \quad (22)$$

где константа интегрирования C_1 имеет размерность частоты. Квадрат частоты в знаменателе правой части введен с целью возможности предельного перехода к случаю $\omega = 0$.

Отсюда сразу же следует решение в квадратурах:

$$\tau + C_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{C_1^2}{\omega^2} + \cos 2\alpha}}. \quad (23)$$

Если, к примеру, считать, что в начальный момент времени $t = 0$ движение начинается от значения угла $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то следует положить $C_2 = 0$. В результате решение (23) можно тогда представить в более компактном виде:

$$\tau(\alpha) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{C_1^2}{\omega^2} + \cos 2\alpha}}. \quad (24)$$

Выражая из решения (22) α'^2 и подставляя в верхнее уравнение системы (20), находим

$$v'' + v \left(2 \cos 2\alpha + \frac{C_1^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (25)$$

Окончательно нашу полную систему уравнений, которую мы будем решать численно, согласно (21), (24), (25) следует представить, как

$$\begin{cases} \alpha' = \sqrt{\gamma + \cos 2\alpha}, \\ v'' + v(2 \cos 2\alpha + \gamma) = 0, \\ x = \frac{1}{\omega} \int_0^{\tau} v \cos \alpha d\tau, \\ y = h - \frac{1}{\omega} \int_0^{\tau} v \sin \alpha d\tau. \end{cases} \quad (26)$$

где $\gamma = \frac{C_1^2}{\omega^2}$. При этом подчеркнем, что $C_1 \neq \omega$, поскольку C_1 – это не зависящая ни от чего константа.

С целью численного исследования решения уравнений (26) их удобно записать в безразмерном виде, введя параметр $u = \frac{v}{\sqrt{2gh}}$. Тогда вместо (26) получим следующую систему:

$$\begin{cases} \alpha' = \sqrt{\gamma + \cos 2\alpha}, \\ u'' + u(2 \cos 2\alpha + \gamma) = 0, \\ \xi = \frac{x}{h} = \lambda \int_0^\tau u \cos \alpha d\tau, \\ \eta = \frac{y}{h} = 1 - \lambda \int_0^\tau u \sin \alpha d\tau. \end{cases} \quad (27)$$

где параметр $\lambda = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2g}{h}}$.

Уравнения (27) позволяют нам найти интересующую нас зависимость траектории в виде функции $\eta = \eta(\xi, \lambda, \gamma)$ от параметров λ и γ . Начальные условия можно задать следующими:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = A \neq 0. \quad (28)$$

Численное интегрирование уравнения (27) с начальными условиями (28) для разных значений параметров λ и γ иллюстрируют рис. 3–6. Как видно из рис. 5, 6, в предельном случае, когда частота $\omega \rightarrow 0$, кривая вырождается в обычную брахистохрону.

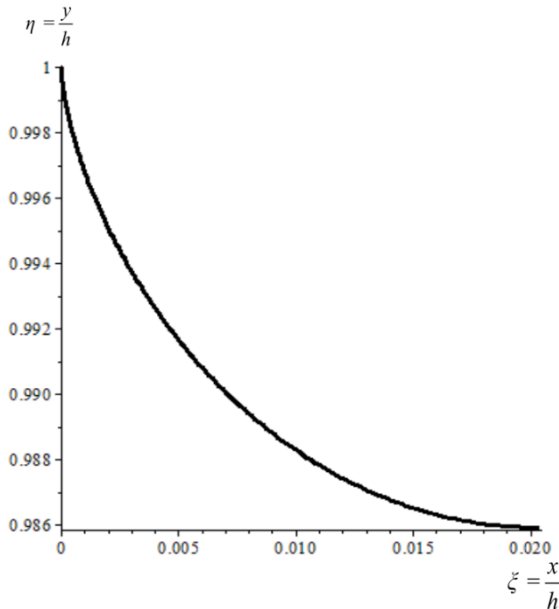


Рис. 3. Зависимость $\eta(\xi)$ для параметров $\lambda = 0.1$ и $\gamma = 4$

при начальных условиях $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

Fig. 3. Dependence $\eta(\xi)$ for parameters $\lambda = 0.1$ and $\gamma = 4$

under initial conditions $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

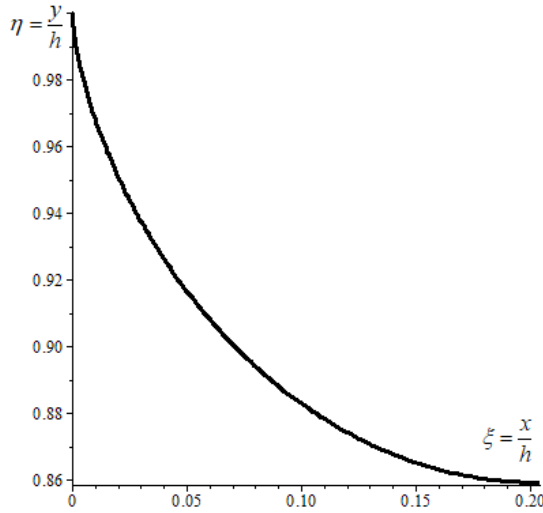


Рис. 4. Зависимость $\eta(\xi)$ для параметров $\lambda = 1$ и $\gamma = 4$ при начальных условиях $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

Fig. 4. Dependence $\eta(\xi)$ for parameters $\lambda = 1$ and $\gamma = 4$ under initial conditions $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

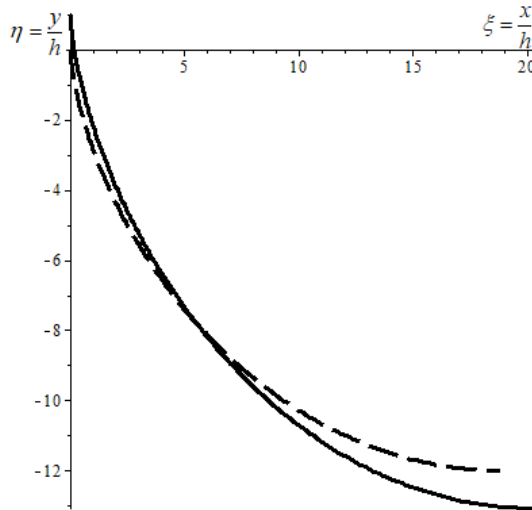


Рис. 5. Для малых частот вращения, $\lambda = 100$, кривая (сплошная линия), переходит в брахистохрону (пунктирная линия). Начальные условия $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

Fig. 5. At low rotational speeds, $\lambda = 100$, the curve (the solid line) turns into a brachistochrone (the dashed line). Initial conditions are as follows: $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

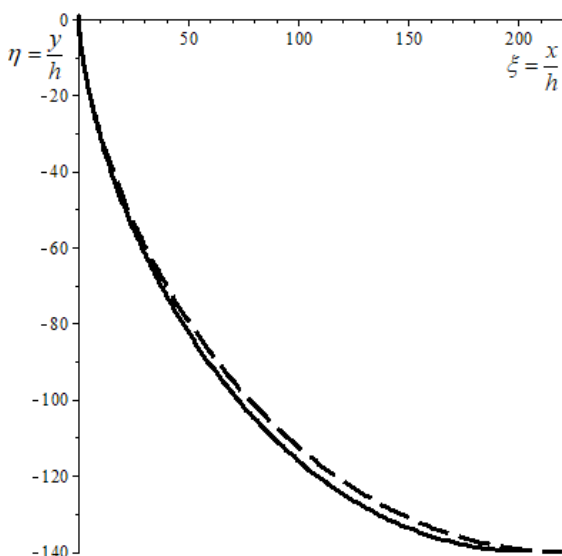


Рис. 6. Сравнение почти неподвижной брахистохроны (сплошная линия), $\lambda = 1\,000$, и обычной брахистохроны (пунктирная линия). Начальные условия

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2}, u(0) = 0, u'(0) = 1$$

Fig. 6. Comparison of an almost immobile brachistochrone (the solid line), $\lambda = 1\,000$, with an ordinary brachistochrone (the dashed line). Initial conditions are as follows:

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2}, u(0) = 0, u'(0) = 1$$

Заключение

В заключение кратко формулируем основные полученные выше результаты.

1. Приведена наиболее общая система динамических уравнений, описывающая вращающуюся с постоянной угловой частотой в поле силы тяжести брахистохрону с учетом сил сопротивления.

2. Приведен подробный анализ полученных уравнений в отсутствие сил сопротивления.

3. Строго аналитически доказано, что в поле силы тяжести криволинейное движение может происходить только либо по параболе, либо по брахистохроне. Других траекторий в природе не существует.

4. Найдено численное решение уравнений (27) с начальными условиями (28) и с их помощью согласно неявной зависимости $\eta = \eta(\xi, \lambda, \gamma)$ дана графическая иллюстрация возможных форм желоба в условиях его вращения.

Список источников

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. Ст. 161101-1-5.

2. Гладков С.О., Богданова С.Б. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. Ст. 164002-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. Ст. 171101-1-5.
4. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. Ст. 172101-1-6.
5. Гладков С.О., Богданова С.Б. О классе двумерных геодезических кривых в поле силы тяжести // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/58/1
6. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
7. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории пространственной брахистохроны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5
8. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases // Journal of Mathematical Sciences. 2020. V. 245, No. 4. P. 528–537. doi: 10.1007/s10958-020-04709-0
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them // Journal of Mathematical Sciences. 2021. V. 257, No. 1. P. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4
10. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 1. С. 54–62. doi: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62
11. Гладков С.О. Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, вып. 2. С. 5–12.
12. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, вып. 3. С. 337–341. doi: 10.21883/JTF.2018.03.45587.2349
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М. : Наука, 1973. 207 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М. : Наука, 1988. 733 с.

References

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskii fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in a problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 161101. pp. 1–5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body entering the fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 4. Article 164002. pp. 1–5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) Obobshchennye dinamicheskie uravneniya ploskogo krivolineynogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetom sil treniya (ikh chislennyy

- analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamical equations of plane curvilinear motion of a material body on a trench with account of friction forces (their numerical analysis in some special cases)]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 171101. pp. 1–5.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheyasya brakhistokhrone s uchedom sil treniya [To the question of analysis equations for moving due to the rotating of the plane brachistohron]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2. Article 172101. pp. 1–6.
 5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2019) O klasse dvukhmernykh geodezicheskikh krivyykh v pole sily tyazhesti [On the class of two-dimensional geodesic curves in the field of the gravity force]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/58/1.
 6. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6.
 7. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii prostranstvennoy brakhistokhrony [To the theory of n-dimensional brachistochrone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5.
 8. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 245(4). pp. 528–537. doi: 10.1007/s10958-020-04709-0.
 9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2021) On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them. *Journal of Mathematical Sciences*. 257(1). pp. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4.
 10. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2019) K voprosu ucheta sily soprotivleniya v sharnirnoy toчке krep leniya fizicheskogo mayatnika i eyo vliyanie na dinamiku dvizheniya [On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika – Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 27(1). pp. 53–62. doi: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62.
 11. Gladkov S.O. (2021) Ob odnom metodicheskoy podkhode pri vyvode osnovnykh fizicheskikh uravneniy [About one method for deducing basic physical equations]. *Fizicheskoe Obrazovanie v VUZakh*. 27(2). pp. 5–12.
 12. Gladkov S.O. (2018) On calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the time of entrainment of a coaxial external. *Technical Physics*. 63(3). pp. 325–330. doi: 10.1134/S1063784218030088.
 13. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
 14. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Fluid Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Сведения об авторах:

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

Information about the authors:

Gladkov Sergey O. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Bogdanova Sofiya B. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

Статья поступила в редакцию 26.09.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 26.09.2021; accepted for publication 12.07.2022