

Научная статья

УДК 532.5

doi: 10.17223/19988621/78/10

Сравнение современных моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта

**Зафар Маматкулович Маликов¹, Фаррух Холиёрович Назаров²,
Муродил Эркинжанович Мадалиев³**

^{1, 3} *Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз,
Ташкент, Узбекистан*

² *Ташкентский государственный технический университет им. Ислама Каримова,
Ташкент, Узбекистан*

¹ *malikov.z62@mail.ru*

² *farruxnazar@mail.ru*

³ *madaliev.me2019@mail.ru*

Аннотация. Проводится сравнительный анализ современных моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта. Для этой цели использованы линейные модели турбулентности SARC и SST-RC, метод Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и двухжидкостная модель. Результаты этих моделей сопоставлены между собой, а также с известными экспериментальными данными и данными прямого моделирования DNS.

Ключевые слова: вращающийся поток, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, модель SSG/LRR-RSM-w2012, модель SARC, модель SST, двухжидкостная модель

Для цитирования: Маликов З.М., Назаров Ф.Х., Мадалиев М.Э. Сравнение современных моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 125–142. doi: 10.17223/19988621/78/10

Original article

Comparison of advanced turbulence models for the Taylor-Couette flow

Zafar M. Malikov¹, Farrukh Kh. Nazarov², Murodil E. Madaliev³

^{1, 3} *Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures Named after M.T. Urazbayev,
Tashkent, Republic of Uzbekistan*

² *Tashkent State Technical University Named after Islam Karimov, Tashkent,
Republic of Uzbekistan*

¹ *malikov.z62@mail.ru*

² farruxnazar@mail.ru

³ madaliev.me2019@mail.ru

Abstract. Swirling flows of fluids and gases are an integral part of many complex flows which are widely encountered in nature and technology. The working process of numerous technical devices (cyclones, vortex combustion chambers, air separators, gas and steam turbines, electric machines and generators, etc.) is generally determined by the laws of hydrodynamics and heat exchange of rotating flows. The problem of deriving general laws for a turbulent flow in the field of centrifugal forces provokes considerable scientific interest since it belongs to an underdeveloped field of hydromechanics. Therefore, mathematical modeling of swirling turbulent flows is still an urgent problem.

In this paper, a comparative analysis of the advanced turbulence models for the Taylor – Couette flow is carried out. For this purpose, the linear turbulence models (SARC and SST-RC), the Reynolds stress method SSG/LRR-RSM-w2012, and a two-fluid model are used. The results obtained using these models are compared with each other and with known experimental data and direct numerical simulation results.

The numerical results calculated with the use of turbulence models for the Taylor-Couette flow confirm that almost all the models adequately describe velocity profiles. However, they yield different turbulent viscosity values and, as a result, different friction coefficients. A comparison of the numerical results shows that the friction coefficient calculated using a two-fluid turbulence model is the closest to that obtained experimentally.

Keywords: rotating flow, Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, SSG/LRR-RSM-w2012 model, SARC model, SST model, two-fluid model

For citation: Malikov, Z.M., Nazarov, F.Kh., Madaliev, M.E. (2022) Comparison of advanced turbulence models for the Taylor-Couette flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 125–142. doi: 10.17223/19988621/78/10

Введение

В настоящее время для решения задач турбулентности используются метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation – DNS) [1, 2], метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES) [3] и методы, направленные на замыкание осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations, RANS). Метод прямого моделирования DNS является сложным и требует больших вычислительных ресурсов, потому что реализация уравнений Навье–Стокса проводится в трехмерной постановке с расчетными ячейками, размеры которых меньше Колмогоровского масштаба. В последнее время в этом направлении в связи с развитием суперкомпьютеров достигнут большой прогресс: для некоторых классов турбулентности методом DNS получены результаты для числа Рейнольдса вплоть до 10^6 . Однако для многих инженерных задач по турбулентности метод прямого моделирования все еще остается недоступным. Метод LES по сравнению с DNS может применяться для расчетов течений с существенно большими числами Рейнольдса. Однако при использовании метода LES для расчета течений вблизи стенки требуются расчетные ячейки, приближающиеся по своим характеристикам к ячейкам метода DNS [4]. Поэтому для технических приложений более применимыми до сих пор являются модели, базирующиеся на замыкании уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу.

Таким образом, для инженерных расчетов требуются несложные модели турбулентности, достаточно точно описывающие усредненные поля и флуктуирующие параметры закрученных или вращающихся течений. Получившие широкое распространение в инженерных расчетах многие модели турбулентности RANS плохо описывают такие течения. Чтобы улучшить адекватность моделирования турбулентных закрученных течений, проводится модифицирование существующих RANS-моделей турбулентности. Например, в моделях SARC [5] и $k-\omega$ SST-RC [6] введены специальные поправки на вращение потока в ранее известных моделях SA [7] и $k-\omega$ SST [8] соответственно. Однако в работе [9] отмечается, что в определенных случаях при сильном вращении потока эти модели также могут дать не совсем адекватные результаты. Объяснением этого явления является то, что данные модели основаны на гипотезе Буссинеска, которая справедлива для изотропных турбулентных течений, а в течениях с сильной закруткой наблюдается анизотропная турбулентность. Поэтому для расчета течений с анизотропной турбулентностью рекомендуется использовать модели без привлечения гипотезы Буссинеска. К таким моделям RANS можно отнести модели Рейнольдсовых напряжений, однако они очень громоздки и требуют много вычислительных ресурсов. Помимо этого, в данных моделях необходимо использовать специальные методики для обеспечения устойчивости и сходимости, а также очень много эмпирических констант и функций, которые сложно калибровать.

Еще одним подходом к решению проблемы турбулентности является двухжидкостный подход Сполдинга [10]. Суть данного подхода заключается в том, что турбулентный поток делится на две жидкости по некоторым отличительным признакам потока. Например, для описания перемежаемости поток делится на ламинарный и турбулентный, в задачах горения – на сгоревший и не сгоревший газ и т.д. Сложнее обстоит дело с простым турбулентным потоком, где отсутствуют явные отличительные черты, по которым можно было бы разделить поток на две жидкости. Поэтому в следующей работе Сполдинга [11] предложено умозрительно разделить поток на «быструю» и «медленную» жидкости. С помощью этой модели были получены результаты, довольно точно предсказавшие турбулентные характеристики потока. Однако двухжидкостный подход Сполдинга не получил дальнейшего развития. Причина этого, по всей видимости, заключается в том, что для поиска некоторых параметров турбулентности в этой модели, как и в моделях RANS, привлекались дополнительные уравнения на основе различных гипотез. В результате число решаемых уравнений удваивалось по сравнению с RANS-моделями, что увеличивало вычислительное время.

Развитие двухжидкостного подхода после достаточно долгого перерыва получено в работах [12–13]. В работе [12] дается методика построения математической модели турбулентности на основе двухжидкостного подхода. В этой работе проведена верификация новой модели на примерах уже изученных экспериментально задач турбулентности. Показано, что модель хорошо описывает начальный, переходной и автомодельный участки турбулентной затопленной струи, турбулентное обтекание плоской пластины, а также сильно закрученные потоки в канале с внезапным расширением. В работе [13] двухжидкостная модель успешно использована для расчета двухфазного потока внутри воздушного сепаратора. В этой работе показано преимущество новой модели по сравнению с линейными и нелинейными моделями RANS как по точности, так и по затратам вычисли-

тельных ресурсов. В упомянутых работах продемонстрировано, что модифицированная двухжидкостная модель является низкорейнольдсовою моделью и способна с высокой достоверностью описывать анизотропные турбулентные течения.

Физическая и математическая постановка задачи

В настоящей работе проводится сравнение современных популярных моделей турбулентности для потока в зазоре между вращающимися цилиндрами (течение Тейлора–Куэтта). Для этой цели использованы модели турбулентности SARC, $k-\omega$ SST, метод Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и двухжидкостная модель. Полученные результаты сопоставлены с известными экспериментальными данными, а также с результатами DNS. Модели SARC, $k-\omega$ SST и метод Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 на сегодняшний день являются широко известными и изложены во многих научных работах и учебниках. А двухжидкостная модель турбулентности описана подробно в работе [12] и в общих чертах в работах [13–15]. Поэтому ниже приводится окончательный вид систем уравнений турбулентности на основе двухжидкостного подхода:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\rho \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \vartheta_j \vartheta_i \right], \\ \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} = -\vartheta_j \frac{\partial V_i}{\rho \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ji} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{F_{si}}{\rho} + \frac{F_{fi}}{\rho}, \\ \nu_{ji} = 3\nu + 2 \left| \frac{\vartheta_i \vartheta_j}{\text{def}(\vec{V})} \right| \quad \text{при } i \neq j, \quad \nu_{ii} = 3\nu + \frac{1}{\text{div} \vec{\vartheta}} \left| \frac{\vartheta_k \vartheta_k}{\text{def}(\vec{V})} \right| \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} = 0, \quad \vec{F}_f = -\rho K_f \vec{\vartheta}, \quad \vec{F}_s = \rho C_s \text{rot} \vec{V} \times \vec{\vartheta}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь K_f – коэффициент трения:

$$K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\vec{d} \cdot \vec{\vartheta}|}{d^2}. \quad (2)$$

В данном выражении d – ближайшее расстояние до твердой стенки, λ_{\max} – наибольший корень характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (3)$$

где A – матрица

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + C_s \zeta_2 \\ -\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - C_s \zeta_1 \\ -\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - C_s \zeta_2 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + C_s \zeta_1 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

и $\vec{\zeta} = \text{rot} \vec{V}$.

В тестовых задачах показано, что хорошие результаты получаются при $C_1 = 0.7825$, $C_2 = 0.306$, $C_s = 0.2$.

Моделирование турбулентного течения Тейлора–Куэтта

Выше было сказано, что течением Тейлора–Куэтта называется течение жидкости в зазоре между вращающимися цилиндрами. Несмотря на кажущуюся простоту, течение Тейлора–Куэтта на самом деле является довольно сложным для многих моделей турбулентности. Эта задача – типичный пример анизотропной турбулентности. Такого типа движения рассматривали еще Рэлей [16] и Тейлор [17–18]. Ими показано, что при вращении только внутреннего цилиндра возникает анизотропный турбулентный поток [19–25]. Поэтому, как было сказано выше, для расчета таких течений используются трудоемкие модели турбулентности, которые учитывают анизотропию. Более сложное течение возникает, когда вращается и внешний цилиндр, потому что, с одной стороны, с увеличением скорости вращения увеличивается число Рейнольдса, что приводит к увеличению турбулентности потока, а с другой стороны, вращение внешнего цилиндра, как отмечается исследователями, может приводить к подавлению турбулентности. Поэтому в таком течении могут возникать ламинарная и турбулентная зоны. По этой причине многие модели турбулентности не способны адекватно описывать такие течения.

Из соображений симметрии ясно, что для исследования рассматриваемой задачи удобной системой координат является цилиндрическая [26–27]. Чтобы расписать систему уравнений (1) в цилиндрических координатах, введем следующие обозначения $x_1 = r$; $x_2 = \varphi$; $V_1 = V_r$; $V_2 = V_\varphi$; $\vartheta_1 = \vartheta_r$; $\vartheta_2 = \vartheta_\varphi$.

Уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$\frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0. \quad (4)$$

В силу симметрии должно быть $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0$, следовательно, из (4) получим

$V_r = 0$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right) - \frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 \vartheta_r \vartheta_\varphi), \\ \frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 v_{\varphi r} \left(\frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial r} - \frac{\vartheta_\varphi}{r} \right) \right] - (1 - C_s) \frac{\vartheta_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) - K_f \vartheta_\varphi, \\ \frac{\partial \vartheta_r}{\partial t} = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r v_{rr} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} \right] - \frac{2 v_{rr} \vartheta_r}{r^2} - C_s \frac{\vartheta_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) + \frac{2 V_\varphi \vartheta_\varphi}{r} - K_f \vartheta_r, \\ v_{\varphi r} = 3v + 2 \frac{|\vartheta_\varphi \vartheta_r|}{|\partial V_\varphi / \partial r - V_\varphi / r|}, \quad v_{rr} = 3v + 2 \frac{|\vartheta_r \vartheta_r|}{|\partial V_\varphi / \partial r - V_\varphi / r|}, \quad K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\vartheta_r|}{d}. \end{array} \right. \quad (5)$$

В данной системе уравнений штрих означает производную по r , t – время, V_φ – осредненная тангенциальная скорость, $\vartheta_\varphi, \vartheta_r$ – относительные тангенциальная и

радиальная скорости молей, ν – молекулярная кинематическая вязкость, $\nu_{\varphi r}$, ν_{rr} – эффективные молярные вязкости.

Известно, что турбулентность имеет трехмерный характер. Это означает, что в рассматриваемой задаче хоть и отсутствует движение в целом в осевом направлении, но присутствует флуктуирующая скорость. Однако в двухжидкостной модели влиянием их на тангенциальное движение пренебрегается.

Для поиска λ_{\max} составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(1-C_s)\frac{rV_\varphi}{r} \\ -C_s\frac{rV_\varphi}{r} + \frac{2V_\varphi}{r} & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Корни данного уравнения равны

$$\lambda = \pm\sqrt{D}. \quad (7)$$

При $D > 0$, $\lambda_{\max} = \sqrt{D}$, при $D < 0$, $\lambda_{\max} = 0$. Здесь

$$D = C_s(1-C_s)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right]^2 - (1-C_s)\frac{2V_\varphi}{r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi). \quad (8)$$

Необходимо отметить, что режим течения определяется знаком выражения D . Если $D < 0$, относительные скорости молей со временем затухают и поток стремится к ламинарному режиму, а при $D > 0$ бесконечно малые возмущения относительных скоростей могут расти, и в этом случае поток переходит в турбулентный режим. Из выражения (8) видно, что в нашей задаче $D < 0$ может быть, если

$V_\varphi\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi) > 0$, что наблюдается вблизи вращающегося внешнего цилиндра.

Данное утверждение согласуется с классической теорией [13].

В нашей задаче присутствует две стенки. Поэтому для определения неизвестного d предлагается следующее выражение:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}. \quad (9)$$

В этих выражениях d_1 – ближайшее расстояние до первой стенки, d_2 – ближайшее расстояние до второй стенки.

Для исследования течения Тейлора–Куэтта рассмотрим по отдельности три задачи: 1) плоское течение Куэтта, которое является частным случаем рассматриваемой задачи при $r_1 \rightarrow \infty$; 2) течение, вызванное вращением внутреннего цилиндра с фиксированным внешним цилиндром; 3) течение, вызванное контрвращением цилиндров, т.е. цилиндры вращаются в противоположных направлениях с одинаковой скоростью.

Уравнения приведены к безразмерному виду соотношением всех скоростей к скорости вращающегося цилиндра $V_{0\varphi}$, радиуса – к ширине канала $h = r_2 - r_1$. Здесь r_1 – радиус внутреннего, r_2 – радиус внешнего цилиндра. Поэтому число Рейнольдса определялось выражением $Re = hV_{0\varphi} / \nu$. Для численной реализации системы (5) использована абсолютно устойчивая неявная схема второго порядка

точности по пространству и первого порядка точности по времени. Исследования показали, что для получения корректных численных результатов вплоть до $Re = 10^6$ достаточное количество расчетных точек в радиальном направлении должно быть не менее 10 000. Интегрирование велось безразмерным шагом по времени 0.05. Увеличение числа расчетных точек до 20 000 дало изменения результатов не более 0.1%. Стационарное решение получено, когда изменения результатов становилось менее 0.0001% для одного цикла интегрирования по времени. Аналогичная методика использована и для численных реализаций моделей SARC, $k-\omega$ SST и Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012. Однако для обеспечения устойчивости в этих моделях интегрирование проводилось более мелкими шагами по времени, менее чем 0.001.

Плоское течение Куэтта

Рассмотрим задачу, когда нижняя пластина покоится, а верхняя движется со скоростью U_0 . Пусть y – переменная в поперечном направлении, h – расстояние между пластинами. Данная задача называется плоским течением Куэтта и является классическим примером для тестирования моделей турбулентности. Для численного исследования этой задачи на основе двухжидкостной модели турбулентности можно воспользоваться системой уравнений (5) устремляя $r_1 \rightarrow \infty$. Численные результаты различных моделей турбулентности для плоского течения Куэтта продемонстрированы на рис. 1–3. На рис. 1 показаны безразмерные профили скорости. Результаты получены для числа Рейнольдса $Re = U_0 h / \nu = 32\,800$. На этом рисунке также показаны экспериментальные данные для скорости (точки) по работе [28]. Очевидно, что результаты всех моделей довольно хорошо соответствуют с опытными данными.

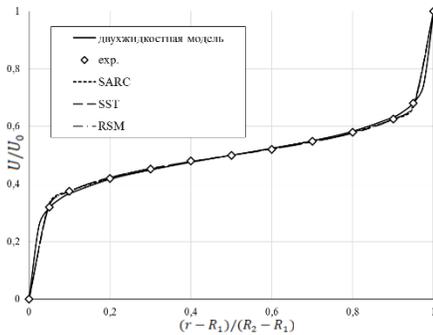


Рис. 1. Профиль скорости для плоского течения Куэтта
Fig. 1. Velocity profile for the plane Couette flow

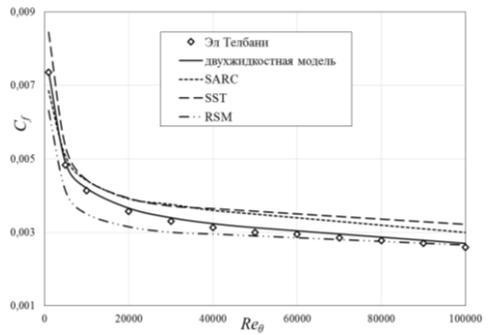


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса
Fig. 2. Friction coefficient as a function of the Reynolds number

На рис. 2 представлены результаты расчетов моделей для коэффициента трения, а также для сравнения – результаты расчетов по эмпирической формуле, представленной в работе [29]. Данная эмпирическая формула получена на основе обработки опытных данных и имеет вид:

$$\left(c_f / 2\right)^2 = 0.182 / \log_{10} \operatorname{Re}_0 . \quad (10)$$

Здесь $\operatorname{Re}_0 = U_0 \frac{h}{2\nu} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}$.

Необходимо отметить, что результаты моделей SARC и $k-\omega$ SST дополнительно были проверены с использованием лицензионного кода ANSYS Fluent. Сопоставление показало, что полученные результаты для упомянутых двух моделей соответствуют результатам кода ANSYS Fluent. Из рис. 2 видно, что результаты двухжидкостной модели более близки к опытным данным.

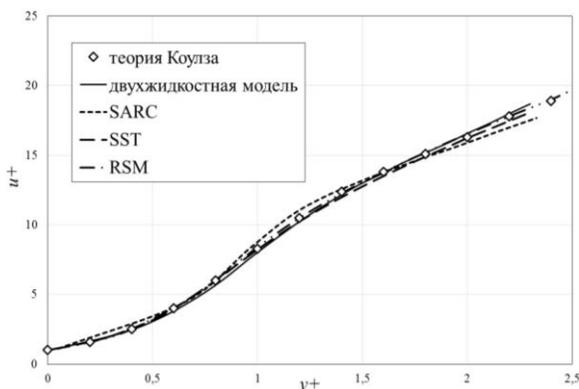


Рис. 3. Профили продольной безразмерной скорости
Fig. 3. Dimensionless longitudinal velocity profiles

На рис. 3 представлены профили безразмерной продольной скорости потока вблизи неподвижной пластины, рассчитанные на основе различных моделей. Здесь можно отметить, что все модели удовлетворительно описывают закон «стенки».

Течение Тейлора–Куэтта, вызванное вращением внутреннего цилиндра с фиксированным внешним цилиндром

Течение Тейлора–Куэтта, обусловленное вращением только внутреннего цилиндра, имеет большое практическое значение в теплотехнических устройствах, поскольку в таком течении значительно усиливается обмен тепла в силу деструктивного действия центробежной силы на ламинарное течение. Поэтому исследованию течения Тейлора–Куэтта с вращением внутреннего цилиндра посвящено большое количество научных работ. Ниже приводятся численные результаты системы уравнений (6). Для этой системы поставлены следующие условия: $V_\varphi = V_{1\varphi}$ при $r = r_1$ и $V_\varphi = 0$ при $r = r_2$. Число Рейнольдса определялось выражением

$$\operatorname{Re} = V_{1\varphi} (r_2 - r_1) / \nu . \quad (11)$$

На рис. 4 представлены профили тангенциальной скорости, рассчитанные по различным моделям. Численные результаты получены для $\eta = r_1 / r_2 = 0.8$ и числа Рейнольдса $\operatorname{Re} = 40\,000$.

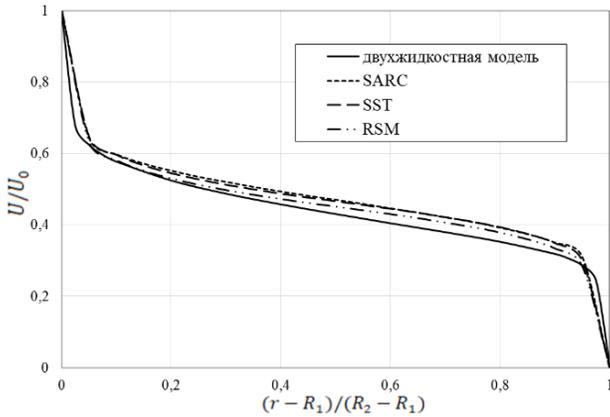


Рис. 4. Профили скорости в течении Тейлора–Куэтта с вращением только внутреннего цилиндра

Fig. 4. Velocity profiles in the Taylor-Couette flow with only inner cylinder rotating

Видно, что и в этом случае результаты довольно близки друг другу, однако профиль скорости, полученный с использованием новой двухжидкостной модели, проходит чуть ниже, чем для других моделей.

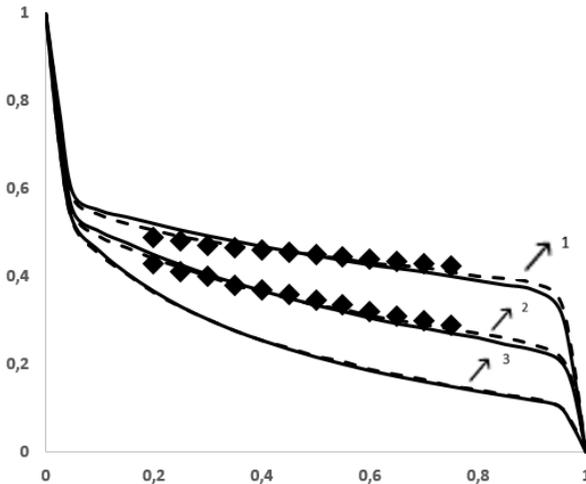


Рис. 5. Профили тангенциальной скорости при различных соотношениях радиусов: 1 – результаты двухжидкостной модели и DNS получены при $\eta = 0.9$, $Ta = 10^{10}$, результаты эксперимента при $\eta = 0.9$, $Ta = 1.1 \cdot 10^{11}$, 2 – результаты двухжидкостной модели и DNS получены при $\eta = 0.7$, $Ta = 10^{10}$, результаты эксперимента при $\eta = 0.7$, $Ta = 1.5 \cdot 10^{12}$, 3 – результаты двухжидкостной модели и DNS получены при $\eta = 0.5$, $Ta = 10^{10}$

Fig. 5. Tangential velocity profiles at different ratios of the radii: results for a two-fluid model and DNS obtained at (1) $\eta = 0.9$, $Ta = 10^{10}$, experimental results at $\eta = 0.9$, $Ta = 1.1 \cdot 10^{11}$; (2) $\eta = 0.7$, $Ta = 10^{10}$, experimental results at $\eta = 0.7$, $Ta = 1.5 \cdot 10^{12}$; and (3) $\eta = 0.5$, $Ta = 10^{10}$

Выше было сказано, что в последнее время получены результаты DNS для достаточно больших чисел Рейнольдса [30]. Поэтому на рис. 5 представлены результаты двухжидкостной модели и DNS, а также опытные данные [30]. Сопоставление результатов показывает, что двухжидкостная модель хорошо описывает течение при различных соотношениях радиусов цилиндров.

Влияние ключевых факторов (угловая скорость и размеры цилиндров) в задаче Куэтта–Тейлора учитывается через числа Рейнольдса Re и Тейлора Ta :

$$Ta = \frac{V_{1\phi}^2 (r_2 - r_1)^3}{\nu^2 r_1} = Re^2 \frac{r_2 - r_1}{r_1}. \quad (12)$$

Для проверки достоверности полученных результатов различных моделей на рис. 6 демонстрируется зависимость изменения коэффициента трения для вращающегося внутреннего цилиндра от числа Тейлора при $\eta = 0.8$:

$$c_f = \frac{\tau|_{r=r_1}}{\frac{1}{2} \rho V_{1\phi}^2} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial \bar{V}_\phi}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{V}_\phi}{\bar{r}} \right) \Big|_{r=r_1}. \quad (13)$$

Здесь \bar{V}_ϕ , \bar{r} – безразмерные скорость и радиус.

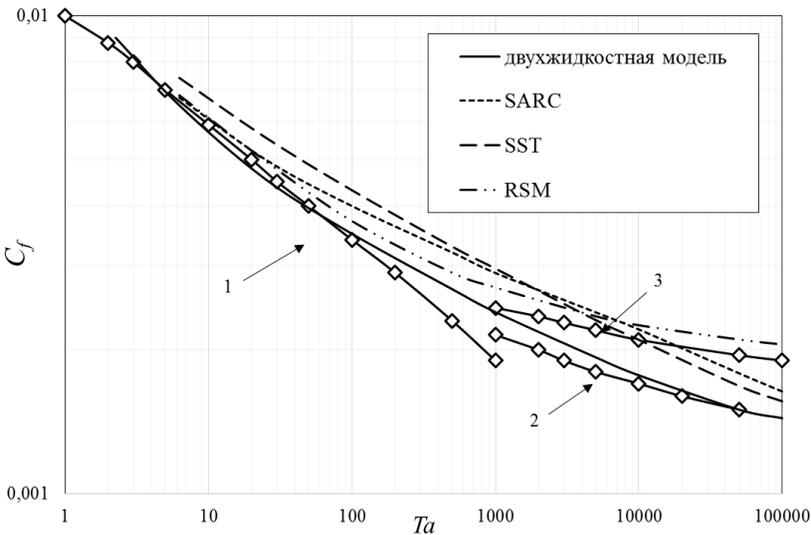


Рис. 6. Зависимости коэффициента трения от числа Тейлора:

1 – опытные данные работы [30], 2 – работы [31], 3 – работы [32]

Fig. 6. Friction coefficient as a function of the Taylor number: experimental data in (1) [30], (2) [31], and (3) [32]

На рис. 6 кроме численных результатов моделей также представлены экспериментальные результаты [31, 32]. Результаты различных моделей показывают, что наибольшее соответствие с опытными данными наблюдается у двухжидкостной модели, в то время как остальные модели дают несколько завышенные значения для коэффициента трения.

Течение Тейлора–Куэтта, обусловленное контрвращением цилиндров

Выше было отмечено, что течение, обусловленное контрвращением цилиндров, вызывает сильно анизотропную турбулентность. Еще классиками математически показано, что при выполнении условия

$$\frac{\partial(V_\varphi r)^2}{\partial r} > 0 \quad (14)$$

происходит подавление турбулентности. С другой стороны, с увеличением числа Рейнольдса турбулентность должна усиливаться. Поэтому, как было отмечено выше, при таком течении Тейлора–Куэтта происходит подавление турбулентности, если $D < 0$. Условие (14) является необходимым для подавления турбулентности, но не достаточным, поскольку в классических работах учитывается только роль центробежной силы, действующей на объем жидкости, а в двухжидкостном подходе учитывается еще и сила Сеффмена. В работе [12] показано, что именно сила Сеффмена играет решающую роль в возникновении турбулентности при плоскопараллельном течении.

В рассматриваемой задаче цилиндры вращаются в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Следовательно, для решения поставленной задачи к системе (5) ставятся условия: $V_\varphi = -V_0$ при $r = r_1$ и $V_\varphi = -V_0$ при $r = r_2$. Ниже представлены численные результаты поставленной задачи для $\eta = r_1 / r_2 = 0.917$.

На рис. 7, 8 показаны результаты численного расчета для профиля тангенциальных скоростей при $Re = 3\,800$ и $Re = 47\,000$ соответственно. На этих графиках нанесены также результаты экспериментальных данных [33]. Из рисунков видно, что все модели дают адекватную картину для профиля тангенциальной скорости.

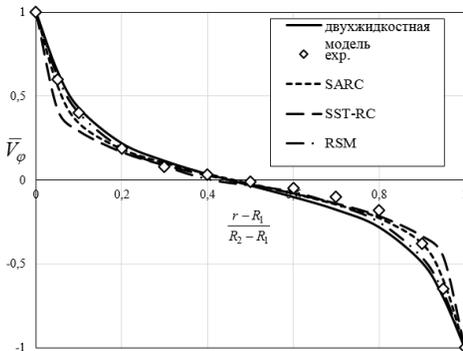


Рис. 7. Безразмерные профили тангенциальной скорости при $Re = 3\,800$
Fig. 7. Dimensionless tangential velocity profiles at $Re = 3800$

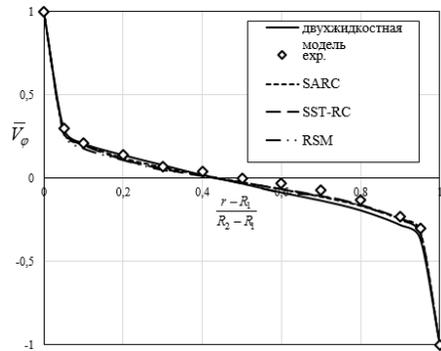


Рис. 8. Безразмерные профили тангенциальной скорости при $Re = 47\,000$
Fig. 8. Dimensionless tangential velocity profiles at $Re = 47000$

Для рассматриваемого течения большой интерес представляет турбулентная вязкость потока. Поэтому на рис. 9, 10 представлены профили безразмерных турбулентных вязкостей при числах Рейнольдса $Re = 3\,800$ и $Re = 47\,000$. Здесь

турбулентная вязкость соотнесена к молекулярной вязкости. Для определения турбулентной вязкости по двух-жидкостной модели использовано соотношение

$$v_t = \left| \frac{\vartheta_\varphi \vartheta_r}{\partial V_\varphi / \partial r - V_\varphi / r} \right|. \quad (15)$$

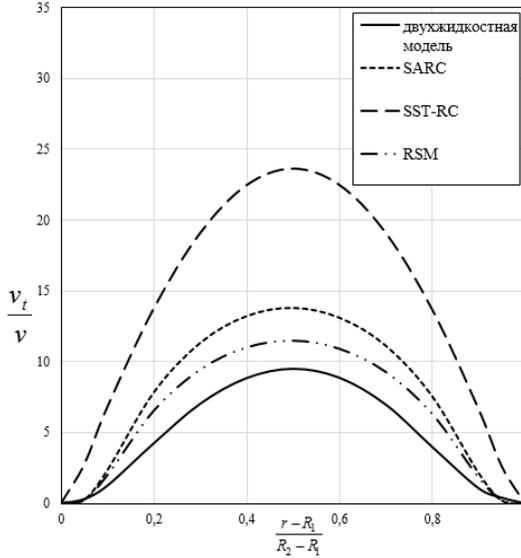


Рис. 9. Профили безразмерной турбулентной вязкости при $Re = 3\ 800$
Fig. 9. Dimensionless turbulent viscosity profiles at $Re = 3800$

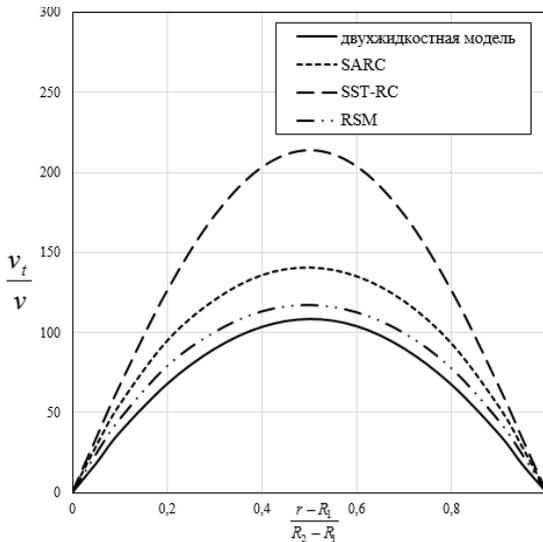


Рис. 10. Профили безразмерной турбулентной вязкости при $Re = 47\ 000$
Fig. 10. Dimensionless turbulent viscosity profiles at $Re = 47000$

Из рис. 9, 10 видно, что профили безразмерной турбулентной вязкости имеют почти симметричный вид и довольно сильно отличаются друг от друга. При этом минимальное значение вязкости у двухжидкостной модели, а вязкость по модели $k-\omega$ SST почти в два раза больше.

В работе [34] для определения характеристик потока в течении Тейлора–Куэтта предложены параметры

$$Re_s = \frac{2|\eta Re_2 - Re_1|}{1 + \eta}, \quad c_f = \frac{M}{2\pi r_1^2 LU^2} = \frac{2\pi r_1^2 L \tau_{r\phi} \Big|_{r=\eta}}{2\pi r_1^2 LU^2} = \frac{\nu}{U^2} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)_{r=r},$$

$$U = \frac{2|\eta V_{2\phi} - V_{1\phi}|}{1 + \eta}.$$

Здесь L – длина цилиндра, $\tau_{r\phi}$ – напряжение трения. Для рассматриваемой задачи несложно получить $Re_s = 2 Re$, $U = 2V_0$.

Для верификации моделей на рис. 11 представлено сравнение численных результатов для коэффициента трения с экспериментальными данными. Здесь же приведены опытные данные работы [23].

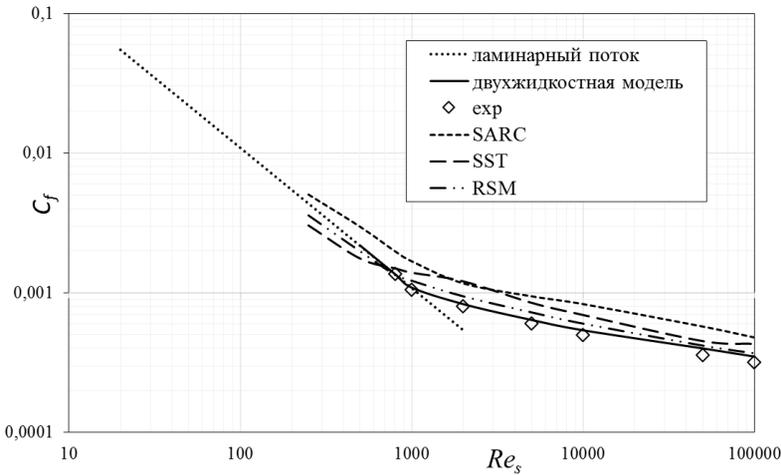


Рис. 11. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса Re_s .

Fig. 11. Friction coefficient as a function of the Reynolds number Re_s .

Из рис. 11 очевидно, что и в этом случае, кроме двухжидкостной модели, остальные модели дают завышенные значения для коэффициента трения. Однако довольно близкие к экспериментальным данным результаты получены и по методу Рейнольдсовых напряжений. Это можно объяснить тем, что данная модель более адекватно описывает анизотропную турбулентность, чем линейные модели RANS, где используется гипотеза Буссинеска. Отметим, что двухжидкостная модель хорошо описывает и зону перехода от ламинарного режима к турбулентному.

Заключение

По численным результатам моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта можно заключить, что практически все модели адекватно описывают

профили скоростей. Однако они дают различные значения для турбулентной вязкости, следовательно, и для коэффициента трения. Сравнение численных результатов показало, что для коэффициента трения в течении Тейлора–Куэтта наиболее близкие к экспериментальным результаты получены при использовании двухжидкостной модели. Еще одним преимуществом двухжидкостной модели по сравнению с другими является ее устойчивость: если в моделях SARC, $k-\omega$ SST и методе Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 для устойчивости требовались шаги интегрирования по безразмерному времени менее 0.001, то в двухжидкостной модели можно было проводить интегрирование шагом более 0.05.

Список источников

1. *Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M.* Turbulent Budgets of Natural Convection in an Infinite, Differentially Heated, Vertical Channel // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1998. V. 19 (2). P. 135–149. doi: 10.1016/S0142-727X(97)10018-2
2. *Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* Direct Numerical Simulation of Natural Convection in a Vertical Channel: a Tool for Second-Moment Closure Modelling // *Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3*. Amsterdam : Elsevier, 1996. P. 39.
3. *Peng S.H., Davidson L.* Large Eddy Simulation of Turbulent Buoyant Flow in a Confined Cavity // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2001. V. 22 (3). P. 323–331. doi: 10.1016/S0142-727X(01)00095-9
4. *Cabot W., Moin P.* Approximate Wall Boundary Conditions in the Large-Eddy Simulation of High Reynolds Number Flow // *Flow, Turbulence and Combustion*. 1999. V. 63. P. 269–291. doi: 10.1023/A:1009958917113
5. *Spalart P.R., Shur M.L.* On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature // *Aerospace Science and Technology*. 1997. V. 1 (5). P. 297–302.
6. *Smirnov P., Menter F.* Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term // *Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air*. Germany. 2008. P. 10.
7. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper*. 1992. V. 12 (1). P. 439–478.
8. *Menter F.R.* Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper*. 1993. Art. 2906.
9. *Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A.* Issledovaniye modeley turbulentsnosti dlya rascheta zakruchennykh techeniy [Study of turbulence models for calculating swirling flows] // *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 2011. V. 18 (1). P. 81–94.
10. *Spalding D.B.* Chemical reaction in turbulent fluids // *Journal physicochemical hydrodynamics*. 1983. V. 4. P. 323–336. doi: 10.1007/978-981-15-2670-1_12
11. *Spalding D.B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // *4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems*. 1984. Swansea, 15–18 July.
12. *Malikov Z.* Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids // *Applied Mathematic Modeling*. 2020. V. 82 (202). P. 409–436. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.029
13. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* Numerical Simulation of Two-Phase Flow in a Centrifugal Separator // *Fluid Dynamics*. 2020. V. 55 (8). P. 1012–1028. doi: 10.1134/S0015462820080066
14. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* Numerical study of a swirling turbulent flow through a channel with an abrupt expansion // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*. 2021. No. 72. P. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8
15. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* New two-fluid turbulence model-based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2021. No. 4 (97). P. 24–39. doi: 10.18698/1812-3368-2021-4-24-39

16. Rayleigh L. On the dynamics of revolving fluids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1916. No. 93 (648). P. 148–154.
17. Taylor G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Philosophical Transactions of the Royal Society. 1923. V. 233. P. 298–343. doi: 10.1098/RSTA.1923.0008
18. Taylor G.I. Fluid friction between rotating cylinders I - Torque measurements // Proceedings of the Royal Society of London. 1933. V. 157. P. 546–564. doi: 10.1098/rspa.1936.0215
19. Von Lavante E., Yao, J. Numerical investigation of turbulent swirling flows in axisymmetric internal flow configurations // Flow Measurement and Instrumentation. 2012. V. 25. P. 63–68.
20. Panahandehgar S. CFD Study of Taylor-Like Vortices in Swirling Flows // Dissertations and Theses. 2019. 452. URL: <https://commons.erau.edu/edt/452>
21. Mulligan S., De Cesare G., Casserly J., Sherlock R. Understanding turbulent free surface vortex flows using a Taylor-Couette flow analogy // Scientific Reports. 2018. doi: 10.1038/s41598-017-16950-w
22. Tuckerman L.S. Taylor vortices versus Taylor columns // J. Fluid Mech. 2014. V. 750. P. 1–4.
23. Bai Y. Study of viscoelastic instability in Taylor-Couette system as an analog of the magneto-rotational instability : PhD dissertation. Université du Havre, 2015.
24. Mahloul M., Mahamdia A., Kristiawan M. The spherical Taylor–Couette flow // European J. Mech B/Fluids. 2016. V. 59. P. 1–6. URL: <https://doi.org/10.1016/j.euromechfu.2016.04.002>
25. Burin M.J., Czarnocki C.J. Subcritical transition and spiral turbulence in circular Couette flow // Journal of Fluid Mechanics. 2012. V. 709. P. 106–122.
26. Shvab A.V., Popp M.Yu. Modeling of the laminar swirling flow in a vortex chamber // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2014. No. 2 (28). P. 90–97.
27. Турубаяв П.П., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9
28. Robertson J.M. On turbulent plane Couette flow // Proc. 6th Midwestern Conf. Fluid Mech. Univ. Texas. Austin. 1959. P. 169–182.
29. El Telbany M.M., Reynolds A.J. The structure of turbulent plane Couette flow // Journal of Fluids Engineering. 1982. V. 104. P. 367–372. doi: 10.1115/1.3241853
30. Ostilla-Mónico R., Huisman S.G., Jannink T.J.G., Van Gils D.P.M., Verzicco R., Grossmann S., Sun C., Lohse D. Optimal Taylor_Couette flow: radius ratio dependence // Journal of Fluid Mechanics. 2014. V. 747. P. 1–29. doi: 10.1017/jfm.2014.134
31. Устименко Б.П. Процессы турбулентного переноса во вращающихся течениях. Алмата : Наука, 1977. 228 с.
32. Bjorlund I.S. Heat transfer between concentric rotating cylinders // Journal of Heat Transfer. 1959. V. 81. P. 175–186.
33. Greidanus A.J., Delfos R., Tokgoz S., Westerweel J. Turbulent Taylor–Couette flow over riblets: drag reduction and the effect of bulk fluid rotation // Experiments in Fluids. 2015. V. 56. Art. 107. doi: 10.1007/s00348-015-1978-7
34. Ravelet F., Delfos R., Westerweel J. Influence of global rotation and Reynolds number on the large-scale features of a turbulent Taylor–Couette flow // Physics of fluids. 2010. V. 22. Art. 055103. doi: 10.1063/1.3392773

References

1. Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M. (1998) Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 19(2). pp. 135–149. doi: 10.1016/S0142-727X(97)10018-2.

2. Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P. (1996) Direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: a tool for second-moment closure modelling. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*. 3.
3. Peng S.H., Davidson L. (2001) Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 22(3). pp. 323–331. doi: 10.1016/S0142-727X(01)00095-9.
4. Cabot W., Moin P. (1999) Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow Turbulence and Combustion*. 63. pp. 269–291. doi: 10.1023/A:1009958917113.
5. Spalart P.R., Shur M.L. (1997) On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature. *Aerospace Science and Technology*. 1(5).pp. 297–302.
6. Smirnov P., Menter F. (2008) Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term. *Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air. Germany*. P. 10.
7. Spalart P.R., Allmaras S.R. (1992) A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 12(1). pp. 439–478.
8. Menter F.R. (1993) Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. pp. 1993–2906.
9. Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A. (2011) Issledovanie modeley turbulentsnosti dlya rascheta zakruchennykh techeniy [Study of turbulence models for calculating swirling flows]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 18(1). pp. 81–94.
10. Spalding D.B. (1983) Chemical reaction in turbulent fluids. *Physicochemical Hydrodynamics*. 4. pp. 323–336. doi: 10.1007/978-981-15-2670-1_12.
11. Spalding D.B. (1984) A turbulence model for buoyant and combusting flows. *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea. Imperial College Report CFD/86/4*.
12. Malikov Z. Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Applied Mathematical Modelling*. 82(202). pp. 409–436. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.029.
13. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2020) Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dynamics*. 55(8). pp. 1012–1028. doi: 10.1134/S0015462820080066.
14. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe issledovanie zakruchennogo turbulentnogo techeniya v kanale s vnezapnym rashireniiem [Numerical study of a swirling turbulent flow through a channel with an abrupt expansion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8.
15. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe modelirovanie techeniya v ploskom vnezapno rasshiryayushchemsya kanale na osnove novoy dvuzhidkostnoy modeli turbulentsnosti [New two-fluid turbulence model-based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 4(97). pp. 24–39. doi: 10.18698/1812-3368-2021-4-24-39.
16. Rayleigh L. (1916) On the dynamics of revolving fluids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 93(648). pp. 148–154.
17. Taylor G.I. (1923) Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 233. pp. 298–343. doi: 10.1098/RSTA.1923.0008.
18. Taylor G.I. (1933) Fluid friction between rotating cylinders I - Torque measurements. *Proceedings of the Royal Society of London*. 157. pp. 546–564. doi: 10.1098/rspa.1936.0215.
19. Von Lavante E., Yao J. (2012) Numerical investigation of turbulent swirling flows in axisymmetric internal flow configurations. *Flow Measurement and Instrumentation*. 25. pp. 63–68.

20. Panahandehgar S. (2019) CFD Study of Taylor-like Vortices in Swirling Flows. *Dissertations and Theses*. 452. Access mode: <https://commons.erau.edu/edt/452>
21. Mulligan S., De Cesare G., Casserly J., Sherlock R. (2018) Understanding turbulent free surface vortex flows using a Taylor-Couette flow analogy. *Scientific Reports*. doi: 10.1038/s41598-017-16950-w.
22. Tuckerman L.S. (2014) Taylor vortices versus Taylor columns. *Journal of Fluid Mechanics*. 750. pp. 1–4.
23. Bai Y. (2015) *Study of Viscoelastic Instability in Taylor-Couette System as an Analog of the Magnetorotational Instability*. Ph.D. Dissertation, Université du Havre.
24. Mahloul M., Mahamdia A., Kristiawan M. (2016) The spherical Taylor–Couette flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 59. pp. 1–6. doi: 10.1016/j.euromechfu.2016.04.002.
25. Burin M.J., Czarnocki C.J. (2012) Subcritical transition and spiral turbulence in circular Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 709. pp. 106–122.
26. Shvab A.V., Popp M.Yu. (2014) Modelirovanie laminarnogo zakruchennogo techeniya v vikhrevoy kamere [Modeling of the laminar swirling flow in a vortex chamber]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 90–97.
27. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhrevoy kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9.
28. Robertson J.M. (1959) On turbulent plane Couette flow. *Proceedings of 6th Midwestern Conference on Fluid Mechanics. Univ. Texas. Austin*. pp. 169–182.
29. El Telbany M.M., Reynolds A.J. (1982) The structure of turbulent plane Couette flow. *Journal of Fluids Engineering*. 104. pp. 367–372. doi: 10.1115/1.3241853.
30. Ostilla-Mónico R., Huisman S.G., Jannink T.J.G., Van Gils D.P.M., Verzicco R., Grossmann S., Sun C., Lohse D. (2014) Optimal Taylor–Couette flow: radius ratio dependence. *Journal of Fluid Mechanics*. 747. pp. 1–29. doi: 10.1017/jfm.2014.134.
31. Ustimenko B.P. (1977) *Protsessy turbulentnogo perenosa vo vrashchayushchikhysya techeniyakh* [Processes of turbulent transfer in rotating flows]. Alma-Ata: Nauka.
32. Bjorclund I.S. (1959) Heat transfer between concentric rotating cylinders. *Journal of Heat Transfer*. 81. pp. 175–186.
33. Greidanus A.J., Delfos R., Tokgoz S., Westerweel J. (2015) Turbulent Taylor–Couette flow over riblets: drag reduction and the effect of bulk fluid rotation. *Experiments in Fluids*. 56. pp. 1–13. doi: 10.1007/s00348-015-1978-7.
34. Ravelet F., Delfos R., Westerweel J. (2010) Influence of global rotation and Reynolds number on the large-scale features of a turbulent Taylor–Couette flow. *Physics of Fluids*. 22(5). Article 055103. pp. 1–8. doi: 10.1063/1.3392773.

Сведения об авторах:

Маликов Зафар Маматкулович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: malikov.z62@mail.ru

Назаров Фаррух Холиёрович – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой механики Ташкентского государственного технического университета им. Ислама Каримова, Ташкент, Узбекистан. E-mail: farruxnazar@mail.ru

Мадалиев Муродил Эркинжанович – научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: madaliev.me2019@mail.ru

Information about the authors:

Malikov Zafar M. (Doctor of Technical Sciences, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures Named after M.T. Urazbayev, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: malikov.z62@mail.ru

Nazarov Farrukh Kh. (Tashkent State Technical University Named after Islam Karimov, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: farruxnazar@mail.ru

Madaliev Murodil E. (Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures Named after M.T. Urazbayev, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: madaliev.me2019@mail.ru

Статья поступила в редакцию 13.07.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 13.07.2021; accepted for publication 12.07.2022