

Секция 5

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ И ГРАФОВ

УДК 519.1, 004.05

DOI 10.17223/2226308X/15/24

О КОНЕЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ
ОРИЕНТАЦИЙ ДАННОГО ГРАФА СО ВСЕМИ ДОСТИЖИМЫМИ
И НЕДОСТИЖИМЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

А. В. Жаркова

Рассматривается конечная динамическая система, состояниями которой являются все возможные ориентации данного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Характеризуются системы, все состояния которых являются достижимыми и в которых есть недостижимые состояния; подсчитывается количество графов, образующих системы со всеми достижимыми состояниями; приводится таблица с количеством графов с числом вершин от одной до двенадцати, образующих системы со всеми достижимыми и недостижимыми состояниями.

Ключевые слова: граф, достижимое состояние, конечная динамическая система, недостижимое состояние, ориентированный граф, отказоустойчивость, эволюционная функция.

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем [1–3]. В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. В настоящей работе графы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

Под *ориентированным графом* (*орграфом*) понимается пара $\vec{G} = (V, \beta)$, где V — конечное непустое множество вершин; $\beta \subseteq V \times V$ — отношение смежности на множестве V (пара $(u, v) \in \beta$ называется *дугой* орграфа). *Неориентированным графом* (или, для краткости, *графом*) называется пара $G = (V, \beta)$, где β — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V . Дуги неориентированного графа называют *рёбрами*. Граф $G = (V, \beta)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается K_n . Вершины u и v графа G называются *связанными*, если в G существует проходящий через них путь. Отношение связности является эквивалентностью на множестве вершин графа. Классы этого отношения называются *компонентами связности* (или просто *компонентами*) графа. Говорят, что вершина v *достижима* из вершины u , если в орграфе существует путь из u в v . Вершина орграфа, недостижимая из других его вершин, называется *источником*, а вершина, из которой недостижима никакая другая вершина, — *стоком* [4].

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество *состояний* системы; $\delta : S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией* системы. Конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой ориентированный граф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без проведения динамики. К числу основных характеристик состояний динамических систем относятся свойства достижимости и недостижимости: состояние, не имеющее непосредственных предшественников, называется *недостижимым* или *начальным* состоянием системы, иначе состояние называется *достижимым*. В [5] описаны недостижимые состояния конечных динамических систем всех возможных ориентаций графов. В данной работе характеризуются конечные динамические системы всех возможных ориентаций графов, все состояния которых являются достижимыми и в которых есть недостижимые состояния.

Пусть дан некоторый граф G . Пометим его вершины и придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив ориентированный граф \vec{G} . Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α , которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки, а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получаем орграф $\alpha(\vec{G})$. Если проделать эти действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту динамической системы. Такая динамика для бесконтурных связных орграфов введена в [1]. Итак, будем рассматривать конечную динамическую систему (Γ_G, α) , где через Γ_G обозначим множество всех возможных ориентаций графа G , а эволюционная функция α задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф $\vec{G} \in \Gamma_G$, то его динамическим образом $\alpha(\vec{G})$ является орграф, полученный из \vec{G} одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между \vec{G} и $\alpha(\vec{G})$ нет.

На рис. 1 изображён граф G и карта конечной динамической системы (Γ_G, α) .

Теорема 1. В конечной динамической системе (Γ_G, α) все состояния являются достижимыми тогда и только тогда, когда в графе G компонентами связности являются полные графы с n вершинами при $1 \leq n \leq 3$, и только они.

На рис. 1 граф G имеет следующие три компонента связности: один граф K_1 , один граф K_2 и один граф K_3 ; все состояния конечной динамической системы (Γ_G, α) являются достижимыми.

Теорема 2. В конечной динамической системе (Γ_G, α) есть недостижимые состояния тогда и только тогда, когда в графе G есть компоненты связности, отличные от полных графов с n вершинами при $1 \leq n \leq 3$.

Теорема 3. Количество графов G с n вершинами, образующих конечные динамические системы (Γ_G, α) , все состояния которых являются достижимыми, равно

$$\text{КСД}_{G_n} = 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\lfloor (n-3)/2 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-2i}{3} \right\rfloor.$$

В таблице приведены данные о количестве графов с n вершинами, $1 \leq n \leq 12$, образующих конечные динамические системы (Γ_G, α) со всеми достижимыми (граф Д) и недостижимыми (граф Н) состояниями, полученные с помощью вычислительных экспериментов.

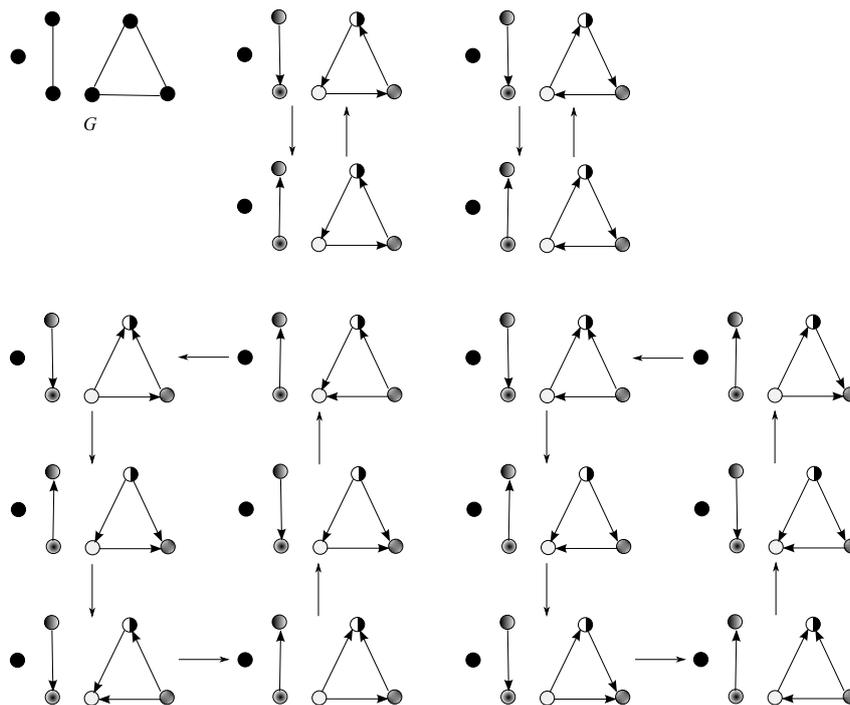


Рис. 1. Граф G и карта конечной динамической системы (Γ_G, α)

n	Количество графов Д	%	Количество графов Н	%
1	1	100	0	0
2	2	100	0	0
3	3	75	1	25
4	4	≈ 36	7	≈ 64
5	5	≈ 15	29	≈ 85
6	7	≈ 4	149	≈ 96
7	8	≈ 1	1036	≈ 99
8	10	$\approx 0,1$	12336	$\approx 99,9$
9	12	$\approx 0,004$	274656	$\approx 99,996$
10	14	$\approx 0,0001$	12005154	$\approx 99,9999$
11	16	$\approx 0,000002$	1018997848	$\approx 99,999998$
12	19	$\approx 0,00000001$	165091172573	$\approx 99,99999999$

Можно заметить, что при увеличении количества вершин в графе G в большинстве конечных динамических систем (Γ_G, α) есть недостижимые состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001.
2. *Салый В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
3. *Anashin V. and Khrennikov A.* Applied Algebraic Dynamics. Walter De Gruyter, 2009.
4. *Богомолов А. М., Салый В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. *Жаркова А. В.* О ветвлении и непосредственных предшественниках состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций графа // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 76–78.