

СЕРИЯ ФОРМУЛ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ БХАТТАЧАРИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯРНЫХ КОДОВ¹

С. Г. Колесников, В. М. Леонтьев

В теории полярных кодов для определения позиций замороженных и информационных битов используются параметры Бхаттачария. Они характеризуют скорость поляризации каналов $W_N^{(i)}$, где $1 \leq i \leq N$ и $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, — длина кода, специальным образом построенных из исходного канала W . Предполагается, что i -й бит сообщения передаётся по каналу $W_N^{(i)}$, а параметр Бхаттачария $Z(W_N^{(i)})$ можно интерпретировать как степень зашумлённости $W_N^{(i)}$. W является моделью физического канала передачи. В случае, когда W есть классический двоичный симметричный канал без памяти, известные в настоящее время формулы для параметров Бхаттачария содержат порядка $2^N = 2^{2^n}$ слагаемых. Для серии каналов $W_N^{(N-2^k+1)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, найдены формулы, которые содержат порядка $2^{(n-k+1)2^k}$ слагаемых. Также высказан ряд предположений о том, как ещё можно упростить полученные формулы.

Ключевые слова: полярный код, параметр Бхаттачария.

Пусть W — двоичный симметричный канал без памяти с входным алфавитом $X = \{0, 1\}$, выходным алфавитом $Y = \{0, 1\}$ и переходными вероятностями $W(y | x) = p$, если $x \neq y$, иначе $W(y | x) = 1 - p$. Через W^N , $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, обозначим N -ю декартову степень W . Для каждого i , $1 \leq i \leq N$, определим канал $W_N^{(i)} : X \rightarrow Y^N \times X^{i-1}$ с переходными вероятностями

$$W_N^{(i)}(y, u' | u_i) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{u'' \in X^{N-i}} W^N(y | uG_N),$$

где $y \in Y^N$; $u' \in X^{i-1}$; $u = u'u_i u''$ — конкатенация векторов u' , (u_i) , u'' ; G_N — порождающая матрица полярного кода с ядром Арикана

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Z(W_N^{(i)}) = \sum_{y \in Y^N} \sum_{u' \in X^{i-1}} \sqrt{W_N^{(i)}(y, u | 0) W_N^{(i)}(y, u | 1)}. \quad (1)$$

Таким образом, формула для вычисления параметра Бхаттачария содержит 2^{N+i-1} слагаемых. Более того, суммы под знаком корня содержат по 2^{N-i} слагаемых. Поэтому расчёт $Z(W_N^{(i)})$ невозможен уже при $N \geq 32$. В [1, 2] формула (1) упрощена до следующей:

$$Z(W_N^{(i)}) = 2^{N-1} \sum_{y \in L} \sqrt{W_N^{(i)}(y, u | 0) W_N^{(i)}(y, u | 1)},$$

где L есть система представителей некоторого фактор-множества и $|L| = 2^i$. Там же установлено равенство

$$Z(W_N^{(2i)}) = \left(Z(W_{N/2}^{(i)}) \right)^2,$$

¹Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2022-876).

с учётом которого достаточно найти эффективные формулы для нечётных i .

Доказана следующая

Теорема 1. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, $N = 2^n$, $m = 2^k$, $M = N/m - 1$. Тогда

$$Z(W_N^{(N-2^k+1)}) = \sum_{s_1=0}^M \cdots \sum_{s_m=0}^M \binom{M}{s_1} \cdots \binom{M}{s_m} \sqrt{Q_1(s_1, \dots, s_m) Q_2(s_1, \dots, s_m)}, \quad (2)$$

где

$$Q_i(s_1, \dots, s_m) = \sum_{\substack{y \in Y^m, \\ \omega(y) \in 1+i+2\mathbb{Z}}} p^{\omega(y)N/m + (\bar{y}_1 - y_1)s_1 + \dots + (\bar{y}_m - y_m)s_m} (1-p)^{N - \omega(y)N/m + (y_1 - \bar{y}_1)s_1 + \dots + (y_m - \bar{y}_m)s_m}.$$

Здесь $\omega(y) = y_1 + \dots + y_m$ — вес Хэмминга вектора y , $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

Замечание 1. Для различных наборов чисел $s_1, \dots, s_m$ произведения

$$Q_1(s_1, \dots, s_m) Q_2(s_1, \dots, s_m)$$

могут быть равны (как полиномы от p). Поэтому интересно найти условия на $s_1, \dots, s_m$ и $s'_1, \dots, s'_m$, при которых

$$Q_1(s_1, \dots, s_m) Q_2(s_1, \dots, s_m) = Q_1(s'_1, \dots, s'_m) Q_2(s'_1, \dots, s'_m),$$

что, возможно, существенно упростит полученную формулу.

Замечание 2. Выражение для Q_i в общем случае является полиномом от p следующего вида:

$$Q_i(s_1, \dots, s_m) = \sum_{j=0}^N \alpha_j^i(s_1, \dots, s_m) p^j (1-p)^{N-j}, \quad i = 1, 2.$$

Явное вычисление коэффициентов $\alpha_j^i(s_1, \dots, s_m)$ также значительно упростит (2). Легко видеть, что

$$\alpha_j^i(s_1, \dots, s_m) = |\{y \in Y^m : \omega(y) \in 1+i+2\mathbb{Z}, \omega(y)(N/m) + (\bar{y}_1 - y_1)s_1 + \dots + (\bar{y}_m - y_m)s_m = j\}|.$$

Следующая формула (не из указанной в теореме 1 серии) найдена с учётом замечаний 1 и 2:

$$Z(W_N^{(1)}) = 2 \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{2k} p^{2k} (1-p)^{N-2k} \right) \left(\sum_{k=1}^{N/2} \binom{N}{2k-1} p^{2k-1} (1-p)^{N-2k+1} \right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Arikan E. Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels. <https://arxiv.org/abs/0807.3917>. 2009.
2. Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 2009. V.55. No. 7. P. 3051–3073.