Аналогичный результат удалось доказать и для гиперкуба Q_4, что является основным результатом данной работы.

Теорема 2. Гиперкуб Q_4 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение.

Единственные с точностью до изоморфизма минимальные рёберные 1-расширения гиперкубов Q_2 и Q_3 изображены на рис. 1.

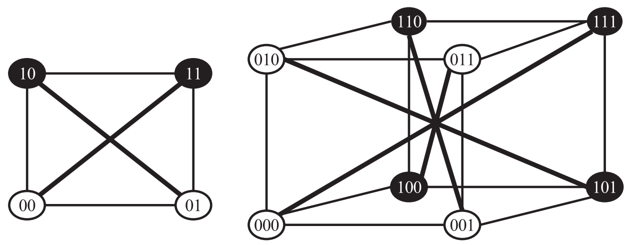


Рис. 1. Минимальные рёберные 1-расширения для Q_2 и Q_3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Padua D. A.* Encyclopedia of Parallel Computing. N.Y.: Springer, 2011.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
4. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
5. *Лобов А. А., Абросимов М. Б.* О вершинном 1-расширении гиперкуба // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2018. С. 249–251.
6. *Лобов А. А., Абросимов М. Б.* О минимальном рёберном 1-расширении гиперкуба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2018. № 11. С. 109–111.
7. *Harary F., Hayes J. P., and Wu H.-J.* A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Math. with Appl. 1988. V. 15. Iss. 4. P. 277–289.
8. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/15/27

О ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ МИНИМАЛЬНОГО РЁБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ЦИКЛА

О. В. Моденова, М. Б. Абросимов

Исследуются верхняя и нижняя оценки числа дополнительных дуг $\mathrm{ec}(\overrightarrow{C_n})$ минимального рёберного 1-расширения ориентации $\overrightarrow{C_n}$ цикла C_n. Основной результат работы: $\lceil n/2 \rceil \leqslant \mathrm{ec}(\overrightarrow{C_n}) \leqslant n$. Приводятся примеры ориентаций циклов, на которых оценки достигаются.

Ключевые слова: *минимальное рёберное 1-расширение, ориентация цикла, отказоустойчивость.*

Введение

Рассмотрим неориентированные и ориентированные графы, основные определения даются согласно работам [1–3]. Неориентированным циклом (далее — просто циклом) C_n называется n-вершинный граф, состоящий из единственного цикла, содержащего все вершины. Очевидно, что число вершин любого цикла $n \geqslant 3$. Цикл C_n является связным однородным графом порядка 2. Для нас представляют интерес ориентации цикла C_n, которые получаются заменой каждого ребра цикла на дугу. Простые циклические пути в ориентированном графе называются контурами. Особым случаем ориентации цикла C_n является контур $\overrightarrow{C_n}$, то есть ориентированный граф, состоящий из единственного контура, содержащего все вершины. В контуре $\overrightarrow{C_n}$ все вершины имеют степени исхода и захода, равные 1.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (МВ-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

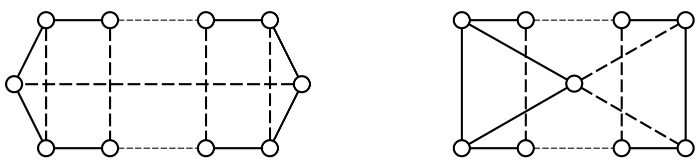
Понятие минимального вершинного k-расширения появилось в работе [1] как модель для исследования отказоустойчивости элементов дискретных систем. Позднее в [2] введена модель для исследования отказов связей между элементами.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* (МР-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер (дуг);
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Задача поиска минимального вершинного или рёберного k-расширения для произвольного графа является вычислительно сложной [4], и в общем виде решение удалось получить лишь для некоторых классов графов. Обзор основных результатов можно найти в [3]. В работе [2] предлагаются схемы построения минимальных рёберных 1-расширений для циклов.

Теорема 1. Графы, представленные на рис. 1, являются минимальными рёберными 1-расширениями для цикла C_n при чётном числе вершин (a) и нечётном числе вершин (*б*).



а *б*

Рис. 1. МР-1Р цикла C_n из теоремы 1

Заметим, что число дополнительных рёбер в этих расширениях равно $\lceil n/2 \rceil$. В [3] предлагаются другие схемы построения минимальных рёберных 1-расширений циклов и доказывается, что при $n > 5$ построенные по ним расширения неизоморфны расширениям из теоремы 1.

Теорема 2. Графы, представленные на рис. 2, являются минимальными рёберными 1-расширениями для цикла C_n при чётном числе вершин (a) и нечётном числе вершин ($б$); при $n > 5$ они неизоморфны расширениям, построенным по теореме 1.

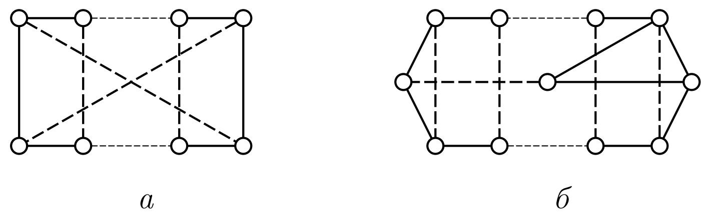


Рис. 2. МР-1Р цикла C_n из теоремы 2

1. Ориентации циклов

Рассмотрим ориентации цикла. Ранее были получены оценки для числа дополнительных дуг в МВ-1Р ориентации цикла, а также схемы построения для двух ориентаций цикла, на которых достигается нижняя оценка. Напомним, что расширение (вершинное или рёберное) G^* графа G называется неприводимым, если никакая его собственная часть не является расширением (вершинным или рёберным) графа G. Заметим, что неориентированный цикл можно рассматривать как ориентированный граф, в котором каждое ребро является парой встречных дуг.

Теорема 3. Цикл C_n является неприводимым рёберным 1-расширением для произвольной ориентации $\overrightarrow{C_n}$ цикла C_n.

Теорема 1 даёт оценку сверху для числа дополнительных дуг в минимальном рёберном 1-расширении ориентации цикла. Следующая теорема показывает, что оценка является достижимой.

Теорема 4. Цикл C_n является минимальным рёберным 1-расширением контура $\overrightarrow{C_n}$.

Отметим, что в общем случае цикл C_n является не единственным минимальным рёберным 1-расширением контура $\overrightarrow{C_n}$.

Для получения нижней оценки заметим, что в цикле каждая вершина имеет степень 2, соответственно в ориентации цикла в каждой вершине будет две дуги (входящие или исходящие). Тогда в минимальном рёберном 1-расширении в каждой вершине будет не менее трёх дуг [3]. Это даёт нижнюю оценку числа дополнительных дуг $\lceil n/2 \rceil$. Получаем итоговую оценку:

Теорема 5. Для числа дополнительных дуг минимального рёберного 1-расширения любой ориентации $\overrightarrow{C_n}$ цикла C_n справедливо следующее неравенство:

$$\lceil n/2 \rceil \leqslant \mathrm{ec}(\overrightarrow{C_n}) \leqslant n.$$

Далее представлены схемы построения минимальных рёберных 1-расширений для некоторых ориентаций циклов, которые показывают, что нижняя оценка также является достижимой. С этой целью рассмотрим возможность ориентации минимальных рёберных 1-расширений циклов из теоремы 2.

2. Циклы с чётным числом вершин

Рассмотрим цикл C_n с чётным числом вершин, который ориентируем по схеме «сток — источник». Обозначим такую ориентацию $\overrightarrow{CST_n}$. Очевидно, что в минимальном рёберном 1-расширении орграфа $\overrightarrow{CST_n}$ все вершины, в которых есть три дуги, могут быть также только источниками или стоками. По этой причине минимальное рёберное 1-расширение для $\overrightarrow{CST_n}$ не может быть получено никакой ориентацией минимального рёберного 1-расширения цикла из теоремы 1. Можно заметить, что это расширение имеет два цикла длины 3. Любая его ориентация приведёт к тому, что появится вершина, не являющаяся ни стоком, ни источником. Граф из теоремы 2 не имеет циклов длины 3 и для него подобную ориентацию построить возможно.

Теорема 6. Граф, представленный на рис. 3, является минимальным рёберным 1-расширением для ориентации $\overrightarrow{CST_n}$ при $n = 4k + 2$.

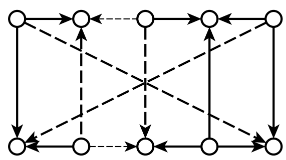


Рис. 3. МР-1Р ориентации цикла из теоремы 6

Пунктирными линиями на рис. 3 показаны дополнительные дуги. Заметим, что в ориентации направление дуг выбирается естественным образом, чтобы сохранить источники и стоки. Очевидно, что такая ориентация невозможна при $n = 4k$, так как в этом случае вершины в противоположных углах прямоугольника будут иметь одинаковый тип (сток — сток или источник — источник). Любая ориентация диагонали не сможет сохранить источники и стоки.

3. Циклы с нечётным числом вершин

Рассмотрим цикл C_n с нечётным числом вершин. Его нельзя ориентировать по схеме «сток — источник», поэтому предложим другую ориентацию. В одной вершине ориентируем рёбра так, чтобы одно ребро было исходящим, а другое — входящим. Остальные вершины ориентируем по схеме «сток — источник». Обозначим такую ориентацию $\overrightarrow{CSTN_n}$. Для неё можно ориентировать минимальные рёберные 1-расширения как из теоремы 1, так и из теоремы 2.

Теорема 7. Граф, представленный на рис. 4, является минимальным рёберным 1-расширением для ориентации $\overrightarrow{CSTN_n}$.

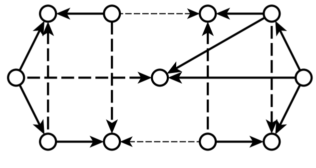


Рис. 4. МР-1Р ориентации цикла из теоремы 7

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
4. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 643–650.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/15/28

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ МЕРАМИ СВЯЗНОСТИ[1]

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов

Вершинной связностью k называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Рёберной связностью λ нетривиального графа называется наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу. Исследуются минимальные по числу рёбер n-вершинные графы, которые имеют заданные значения вершинной и рёберной связности. Помимо теоретического интереса, графы с заданными значениями вершинной или рёберной связности представляют и прикладной интерес как модели отказоустойчивых сетей. Основной результат состоит в том, что для определённой области значений k и λ удалось описать графы, которые при заданном n имеют минимальное число рёбер.

Ключевые слова: *граф, вершинная связность, рёберная связность, отказоустойчивость.*

Введение

Изучение графов с заданной вершинной или рёберной связностью представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. В теоретическом плане эти исследования восходят к работам [1 – 3], в прикладном — к работе [4], в которой исследуется построение сетей минимальной стоимости с заданнной связностью. Большой интерес представляют графы Харари, которые имеют минимальное число рёбер при заданном значении вершинной связности [2, 5].

Рассмотрим простые неориентированные графы и их основные меры связности. Понятия из теории графов используются в соответствии с [6, 7]. Напомним, что *связным* называется граф, любая пара вершин которого соединена путём. В противном случае граф называется *несвязным. Тривиальным* называется одновершинный граф. Граф, любые две вершины которого смежны, называется *полным.*

Определение 1. *Вершинной связностью* k графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Определение 2. *Рёберная связность* λ нетривиального графа G определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках госзадания (проект № FSRR-2020-0006).