

Научная статья

УДК 51-76

doi: 10.17223/19988605/60/9

Вейвлеты Мейера с кратными коэффициентами масштабирования $N > 2$ **Полина Николаевна Подкур¹, Николай Константинович Смоленцев²**¹ Кузбасский технический университет им. Т.Ф. Горбачева, Кемерово, Россия, paulina.podkur@gmail.com² Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, smolennk@mail.ru

Аннотация. Определяются вейвлеты Мейера с произвольным натуральным коэффициентом масштабирования $N > 2$ с использованием вейвлетов Мейера с кратными коэффициентами масштабирования $MN > 2$. Получены выражения частотных функций вейвлетов и соответствующих фильтров. Рассмотрен пример при $M = 3$ и $N = 2$.

Ключевые слова: вейвлеты Мейера; вейвлет-анализ; вейвлеты с коэффициентом масштабирования N

Для цитирования: Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлеты Мейера с кратными коэффициентами масштабирования $N > 2$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 84–92. doi: 10.17223/19988605/60/9

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/9

Meyer wavelets with multiple scale factors $N > 2$ **Paulina N. Podkur¹, Nikolay K. Smolentsev²**¹ T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation, paulina.podkur@gmail.com² Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation, smolennk@mail.ru

Abstract. In this paper, wavelets with a scaling factor $N > 2$ are defined, similar to the classical Meyer wavelets with $N = 2$. The Meyer wavelets stand out among other wavelets in that they provide the clearest separation of the signal over frequency bands and have rapidly decaying filters. The construction of the Meyer wavelets $\varphi(x)$ and $\psi^1(x), \dots, \psi^{N-1}(x)$ with a scaling factor $N > 2$ in this paper is performed in the frequency domain according to the formulas $\hat{\varphi}(\omega) = H^0\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right)$ and $\hat{\psi}^k(\omega) = H^k\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right)$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, based on the construction of the frequency functions $H^0(\omega)$ and $H^k(\omega)$. As the scaling function $\varphi(x)$ for any N , the Meyer function $\varphi(x)$ known for $N = 2$ is taken. Other frequency functions $H^k(\omega)$ are constructed on the basic interval $[-\pi, \pi]$ by smoothing functions equal to ± 1 on the intervals $[-(k+1)\pi/N, -k\pi/N]$ and $[k\pi/N, (k+1)\pi/N]$ and equal to zero outside these intervals. The functions $H^k(\omega)$ for an even value of k are defined as even functions, and for an odd value of k , as odd functions on the interval $[-\pi, \pi]$. This construction works well for odd N dimensions. But in the case of even N , one of the filters, namely the filter for the wavelet $\psi^{N-1}(x)$, has an infinite impulse response and a weak decrease at infinity, which makes practical use difficult in the case of even $N > 2$. To solve this problem, the paper proposes to use multiple scaling factors MN . It is shown that if wavelets with scaling factors M and N are given, then wavelets with scaling factor MN can be determined. If $H^k(\omega)$ and $G^l(\omega)$ are frequency functions of N - and M -wavelets, respectively, then the frequency functions of wavelets with a multiple of the scaling factor MN are defined by the formula $H^{kl}(\omega) = G^l(N\omega)H^k(\omega)$. It is also shown that if the given M - and N -wavelets have the Meyer function $\varphi(x)$ as a scaling one, then the result is wavelets with the Meyer scaling function $\varphi(x)$ with the scaling factor MN . Considering that for $N = 2$ the Meyer wavelets

$\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are well known and have rapidly decaying filters, this solves the above problem with wavelet filters for an even scaling factor and completely solves the problem of defining Meyer wavelets with an arbitrary scaling factor $N > 2$. At the end of the paper, an example is considered for $M = 3$ and $N = 2$.

Keywords: Meyer wavelets; wavelet analysis; wavelets with scaling factor N

For citation: Podkur, P.N., Smolentsev, N.R. (2022) Meyer wavelets with multiple scale factors $N > 2$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 84–92. doi: 10.17223/19988605/60/9

Вейвлет-анализ предоставляет мощный инструментарий для решения различных задач математического моделирования. Особенно эффективно вейвлет-анализ используется для изучения медицинских данных [1–3]. В настоящее время известно и эффективно используется множество вейвлетов [4, 5]. Среди них вейвлеты Мейера выделяются тем, что они обеспечивают наиболее четкое разделение сигнала по частотным диапазонам и имеют быстро убывающие фильтры. Использование степеней двойки для построения теории вейвлетов и при их использовании удобно во многих отношениях, хотя и не является обязательным. Можно вместо коэффициента масштабирования 2 использовать любое целое число N , и даже рациональное, большее единицы [4]. Развитию этой темы посвящены работы [5, 6]. Вейвлет-анализ с коэффициентом масштабирования $N > 2$ имеет определенные преимущества, обеспечивая разделение сигнала на N частотных диапазонов уже при однократном вейвлет-разложении. Примеры вейвлет-анализа данных фондового рынка с коэффициентами масштабирования 4, 5 и 8 представлены в работе [5]. В работах [7, 8] показана возможность использования вейвлет-анализа с коэффициентом масштабирования 3 для изучения сигналов ЭЭГ. В работе [8] предложены построение и использование аналогов вейвлетов Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$. Однако в случае четного N один из фильтров вейвлетов, а именно фильтр вейвлета $\psi^{N-1}(x)$ имеет бесконечную импульсную характеристику и слабое убывание на бесконечности, что затрудняет практическое использование таких вейвлетов в случае четного $N > 2$.

В данной работе предлагается другой подход к построению вейвлетов Мейера, которые не имеют отмеченных выше недостатков. Определены вейвлеты Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования N , которые вполне подходят для нечетных значений N . Основное содержание работы заключается в построении вейвлетов Мейера с кратными коэффициентами масштабирования MN . Учитывая, что для $N = 2$ вейвлеты Мейера $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены [4, 5] и имеют быстро убывающие фильтры, этот прием решает указанную выше проблему с фильтрами вейвлетов Мейера для четного $N > 2$. Отметим, что в отличие от работы [8] здесь предлагается более унифицированный подход к определению N -вейвлетов Мейера, когда в качестве масштабирующей функции для всех коэффициентов масштабирования N берется одна и та же функция Мейера $\varphi(x)$.

1. Предварительные сведения

Напомним основные положения вейвлет-анализа с масштабным коэффициентом $N \geq 2$ (развитие этой темы см.: [5]). Функция $\varphi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ называется масштабирующей с коэффициентом N , если она удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x) = \sqrt{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^0 \varphi(Nx - n), \quad (1)$$

где набор действительных чисел $\{h_n^0\}$ называется *масштабирующим фильтром* функции $\varphi(x)$. Для масштабирующей функции $\varphi(x)$ определяется *частотная функция* формулой

$$H^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^0 e^{-in\omega}. \quad (2)$$

После преобразования Фурье масштабирующее соотношение (1) принимает вид:

$$\hat{\varphi}(\omega) = H^0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right). \quad (3)$$

Масштабирующей функции $\varphi(x)$ соответствует $N - 1$ вейвлетов $\psi^1(x), \dots, \psi^{N-1}(x)$, определенных равенствами

$$\psi^k(x) = \sqrt{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^k \varphi(Nx - n), \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (4)$$

где коэффициенты разложения $\{h_n^k\}_{n \in \mathbf{Z}}$ называются *фильтрами вейвлетов*. В частотной области соотношения (4) принимают вид:

$$\hat{\psi}^k(\omega) = H^k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (5)$$

где $H^k(\omega)$ – частотные функции, соответствующие вейвлетам $\psi^k(x)$:

$$H^k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^k e^{-in\omega}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (6)$$

Вейвлеты называются ортогональными, если сдвиги масштабированных вейвлетов $\psi_{j,n}^k(x) = \sqrt{N^j} \psi^k(N^j x - n)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$, образуют полную ортонормированную систему функций в $L^2(\mathbf{R})$. Для ортогональности частотные функции вейвлетов должны удовлетворять свойству унитарности матрицы [4, 5]:

$$\begin{pmatrix} H^0(\omega) & H^0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H^0\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ H^1(\omega) & H^1\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H^1\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H^{N-1}(\omega) & H^{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H^{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

2. Вейвлеты Мейера

Масштабирующая функция Мейера $\varphi(x)$ для коэффициента $N = 2$ определяется через задание ее преобразования Фурье равенством

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega, \end{cases} \quad (8)$$

где $v(x)$ есть вспомогательная функция, удовлетворяющая трем условиям: $v(x) = 0$ при $x \leq 0$, $v(x) = 1$ при $x \geq 1$, и $v(x) + v(1-x) = 1$ [4, 5]. Распространенным выбором функции $v(x)$ является следующая полиномиальная интерполяция: $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$ между 0 и 1 на промежутке $[0, 1]$.

Теорема 1. Масштабирующая функция Мейера $\varphi(x)$ является N -масштабирующей для любого натурального $N > 2$.

Доказательство. Достаточно показать, что существует частотная функция $H^0(\omega)$ для которой выполнено масштабированное соотношение в форме образов Фурье: $\hat{\varphi}(\omega) = H^0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right)$. Вследствие 2π -периодичности функцию $H^0(\omega)$ достаточно определить на промежутке $[-\pi, \pi]$. Поскольку функция $\hat{\varphi}(\omega)$ обращается в нуль вне промежутка $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ и $\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right) = 1$ на промежутке $\left[-\frac{2\pi N}{3}, \frac{2\pi N}{3}\right]$,

включающем $[-4\pi/3, 4\pi/3]$, то $H^0\left(\frac{\omega}{N}\right) = \hat{\phi}(\omega)$ на $[-4\pi/3, 4\pi/3]$, или $H^0(\omega) = \hat{\phi}(N\omega)$ на промежутке $[-4\pi/3N, 4\pi/3N]$. Таким образом, получаем искомую функцию $H^0(\omega)$:

$$H^0(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[-\frac{2\pi}{3N}, \frac{2\pi}{3N}\right], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3N}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3N} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3N}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega. \end{cases} \quad (9)$$

Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функция $H^0(\omega)$ продолжается периодически. Коэффициенты $\{h_n^0\}$ N -масштабирующего соотношения (1) находятся из разложения в ряд Фурье функции $H^0(\omega)$.

2.1. Построение частотных функций и вейвлетов

Для построения вейвлетов Мейера найдем сначала их частотные функции $H^k(\omega)$ с учетом унитарности матрицы (7). Вследствие 2π -периодичности, функцию $H^k(\omega)$ достаточно определить на промежутке $[-\pi, \pi]$. Сначала определим $H^k(\omega)$ на $[0, \pi]$, а затем продолжим на $[-\pi, 0]$ как четную либо нечетную функцию в соответствии с четностью k . Берем функцию, равную единице на промежутке $[k\pi/N, (k+1)\pi/N]$ и равную нулю вне этого промежутка. Затем сгладим ее вблизи концов $k\pi/N, (k+1)\pi/N$, а именно на промежутках $\frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}$ и $\frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}$. Тогда получаются следующие выражения сглаженных функций $H_+^k(\omega)$, $k = 1, 2, \dots, N-2$, при $\omega \geq 0$:

$$H_+^k(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \text{ или } \omega \geq \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - \frac{3k-1}{2}\right)\right), & \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}, \\ 1, & \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - \frac{3(k+1)-1}{2}\right)\right), & \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}. \end{cases} \quad (10)$$

На весь промежуток $[-\pi, \pi]$ функции $H_+^k(\omega)$ можно продолжить как по четности, так и по нечетности. Далее мы уточним, как это сделать из требования унитарности матрицы (7). Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функции $H_+^k(\omega)$ продолжаются по периодичности. Последняя частотная функция $H_+^{N-1}(\omega)$ на $[0, \pi]$ определяется формулой:

$$H_+^{N-1}(\omega) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - \frac{3(N-1)-1}{2}\right)\right), & \omega \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N}, \frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}\right], \\ 1, & \omega \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}, \pi\right], \\ 0, & \text{для остальных } \omega \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (11)$$

Покажем, что указанные выше функции $H^0(\omega)$, $H^k(\omega)$ и (11) обладают тем свойством, что строки матрицы (7) имеют единичную норму. Равенство $|H^0(\omega)|^2 + |H^0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H^0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 = 1$ достаточно показать только на промежутке $[\pi/N - \pi/3N, \pi/N + \pi/3N]$. Это следует из того, что сглаживание всех функций в точках разрыва проведено одинаково и симметрично. Кроме того, в приведенной

сумме носители соседних функций пересекаются именно по тем промежуткам, где производилось сглаживание. На промежутке $[\pi/N - \pi/3N, \pi/N + \pi/3N]$ в сумме имеется только два ненулевых слагаемых, $H^0(\omega)$ и $H^0(\omega - 2\pi/N)$. Тогда получаем с использованием равенства $v(1-x) = 1 - v(x)$

$$\begin{aligned} |H^0(\omega)|^2 + |H^0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H^0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 &= |H^0(\omega)|^2 + |H^0(\omega - 2\pi/N)|^2 = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\left|\omega - \frac{2\pi}{N}\right| - 1\right)\right) = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(1 - \left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right)\right) = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично показывается нормированность остальных строк для функций $H^k(\omega)$ как для четного продолжения $H^k_+(\omega)$, так и для нечетного. Обеспечим эрмитову ортогональность строк матрицы (7) частотных функций. Поскольку носитель функции $H^k(\omega)$ имеет непустое пересечение с носителями только соседних функций $H^{k-1}(\omega)$ и $H^{k+1}(\omega)$, то достаточно обеспечить ортогональность только соседних строк. Для этого достаточно частотные функции $H^k(\omega)$ с четными номерами k считать четными функциями, а нечетные $H^k(\omega)$ сделать нечетными функциями на промежутке $[-\pi, \pi]$, исходя из функций $H^k_+(\omega)$, определенных на промежутке $[0, \pi]$.

Таким образом, искомые частотные функции вейвлетов $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ имеют следующий вид: для четных значений k функция $H^k(\omega)$ является четной и на промежутке $[0, \pi]$ определяется формулой (10), а для нечетных значений k функция $H^k(\omega)$ является нечетной и на промежутке $[0, \pi]$ также определяется формулой (10). Соответственно определяется и последняя частотная функция $H^{N-1}(\omega)$ в зависимости от четности числа $N - 1$.

Масштабирующий фильтр $\{h_n^0\}$ и фильтры вейвлетов $\{h_n^k\}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$, находятся разложением в ряд Фурье частотных функций $H^0(\omega)$ и $H^k(\omega)$.

Вейвлеты $\psi^k(x)$ определяются своими фильтрами $\{h_n^k\}$ по формуле (4). Поскольку преобразования Фурье вейвлетов $\hat{\psi}(\omega)$ и $\hat{\psi}^k(\omega)$ имеют компактные носители, то функции $\varphi(x)$ и $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми.

3. Кратные коэффициенты масштабирования

Отметим, что в случае четного $N > 2$, определенная выше последняя частотная функция $H^{N-1}(\omega)$ в точках $(2n + 1)\pi$ имеет разрыв: слева от π она принимает значение 1, а справа – значение -1 . Вследствие этого фильтр $\{h_n^{N-1}\}$ имеет бесконечную импульсную характеристику и слабое убывание на бесконечности, что затрудняет практическое использование таких вейвлетов в случае четного $N > 2$. Этот недостаток можно устранить с использованием кратных коэффициентов масштабирования и классических вейвлетов Мейера с коэффициентом масштабирования 2.

Пусть $\varphi_H(x)$ и $\psi_H^1(x)$, $\psi_H^2(x)$, ..., $\psi_H^{N-1}(x)$ – масштабирующая функция и вейвлеты с масштабным коэффициентом N . Соответствующие фильтры и масштабирующие соотношения в частотной области:

$$\begin{aligned} H^0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^0 e^{-in\omega}, \quad H^k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^k e^{-in\omega}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \hat{\varphi}_H(\omega) &= H^k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}_H\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad \hat{\psi}_H^k(\omega) = H^k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}_H\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_G(x)$ и $\psi_G^1(x)$, $\psi_G^2(x)$, ..., $\psi_G^{M-1}(x)$ – масштабирующая функция и вейвлеты с масштабным коэффициентом M . Соответствующие фильтры и масштабирующие соотношения в частотной области:

$$G^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^0 e^{-im\omega}, \quad G^l(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l e^{-im\omega}, \quad l = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\hat{\phi}_G(\omega) = G^0\left(\frac{\omega}{M}\right) \hat{\phi}_G\left(\frac{\omega}{M}\right), \quad \hat{\psi}_G^l(\omega) = G^l\left(\frac{\omega}{M}\right) \hat{\phi}_G\left(\frac{\omega}{M}\right), \quad l = 1, 2, \dots, M-1.$$

Рассмотрим вопрос о том, как из заданных N - и M -вейвлетов получить масштабирующую функцию и вейвлеты $\psi^{kl}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $l = 0, 1, 2, \dots, M-1$, с коэффициентом масштабирования MN .

3.1. Разложение с коэффициентом N

Задачу удобно решать на уровне формальных степенных рядов [5]. Пусть $X(z) = \sum_n x_n z^n$ – степенной ряд, соответствующий сигналу $\{x_n\}$, $z \in \mathbb{C}$. Сделаем сначала вейвлет-разложение сигнала при помощи вейвлетов с коэффициентом масштабирования N , а потом к тому, что получится, применим вейвлет-разложение с коэффициентом M .

На уровне степенных рядов вейвлет-разложение (с учетом N -децимации) производится по следующей схеме [5]:

$$X \rightarrow \{A^0, A^1, A^2, \dots, A^{N-1}\},$$

где компоненты разложения $A^k(w)$ являются также степенными рядами и определяются из формул

$$A^k(w) = A^k(z^N) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s z) X(\rho^s z), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (12)$$

где $\rho = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$ и $w = z^N$.

Коэффициенты степенных рядов $A^k(w)$ представляют собой коэффициенты $\{a_m^k\}$ вейвлет-разложения сигнала $\{x_n\}$.

3.2. Вейвлет-разложение с коэффициентом M

Теперь к каждому $A^k(w)$ применяем вейвлет-разложение с коэффициентом масштабирования M . На уровне степенных рядов это вейвлет-разложение производится по следующей схеме:

$$A^k(w) \rightarrow \{A^{k0}(u), A^{k1}(u), \dots, A^{kM-1}(u)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где компоненты разложения $A^{kl}(u) = A^{kl}(w^M)$ определяются из формул

$$A^{kl}(u) = A^{kl}(w^M) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\tau^p w) A^k(\tau^p w), \quad l = 0, 1, \dots, M-1,$$

где $\tau = e^{-\frac{i2\pi}{M}}$ и $u = w^M$. В итоге мы получаем разложение сигнала $X(z)$ на серию формальных степенных рядов $A^{kl}(u)$. Для нахождения $A^{kl}(u)$ нам потребуются выражения вида $A^k(\tau^p w)$. Если $w = z^N$, то $\tau^p w = (\tau^{p/N} z)^N$. Тогда

$$A^k(\tau^p w) = A^k(\tau^p z^N) = A^k\left((\tau^{p/N} z)^N\right) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s \tau^{p/N} z) X(\rho^s \tau^{p/N} z), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Вычислим $A^{kl}(w^M)$. Пусть $\sigma = e^{-\frac{i2\pi}{MN}}$, следовательно, $\tau = \sigma^N$ и $\rho = \sigma^M$. Тогда

$$\begin{aligned} A^{kl}(w^M) &= \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\tau^p w) A^k(\tau^p w) = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\tau^p w) \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s \tau^{p/N} z) X(\rho^s \tau^{p/N} z) = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{p=0}^{M-1} G^l\left((\tau^{p/N} z)^N\right) \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s \sigma^p z) X(\rho^s \sigma^p z) = \frac{1}{MN} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\sigma^{pN} z^N) \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\sigma^{Ms+p} z) X(\sigma^{Ms+p} z). \end{aligned}$$

Обозначим $Ms + p = q$, $q = 0, 1, \dots, MN - 1$. Тогда $p = q - Ms$. Получаем

$$G^l(\sigma^{pN} z^N) = G^l(\sigma^{(q-Ms)N} z^N) = G^l(\sigma^{qN-MNs} z^N) = [\sigma^{MN} = 1] = G^l(\sigma^{qN} z^N).$$

Получаем окончательную формулу:

$$A^{kl}(w^M) = \frac{1}{MN} \sum_{q=0}^{MN-1} G^l((\sigma^q z)^N) H^k(\sigma^q z) X(\sigma^q z),$$

где $\sigma = e^{\frac{i2\pi}{MN}}$.

Теперь в качестве частотных функций вейвлетов $\psi^{kl}(x)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $l = 0, 1, \dots, M - 1$ возьмем функции

$$H^{kl}(z) = G^l(z^N) H^k(z).$$

Тогда

$$A^{kl}(z^{MN}) = \frac{1}{MN} \sum_{q=0}^{MN-1} H^{kl}(\sigma^q z) X(\sigma^q z),$$

что полностью соответствует общей схеме (12) вейвлет-разложения сигнала на уровне формальных степенных рядов с коэффициентом масштабирования MN .

Будем считать, что $z = e^{i\omega}$, тогда положим $H^{kl}(\omega) = H^{kl}(e^{i\omega})$. Таким образом, мы получили следующие частотные функции вейвлетов:

$$H^{kl}(\omega) = G^l(N\omega) H^k(\omega).$$

Найдем масштабирующие фильтры вейвлетов $\psi^{kl}(x)$ (здесь обозначено $n = p + mN$, $p = n - mN$):

$$\begin{aligned} G^l(N\omega) H^k(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l e^{-iNm\omega} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p^k e^{-ip\omega} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_p^k e^{-i(Nm+p)\omega} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_{n-mN}^k e^{-in\omega} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^{kl} e^{-in\omega} = H^{kl}(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем масштабирующие фильтры вейвлетов $\psi^{kl}(x)$

$$h_n^{kl} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_{n-mN}^k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad l = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Теорема 2. Если $\varphi_H(x)$ и $\varphi_G(x)$ являются N - и M -масштабирующими функциями Мейера с частотными функциями $H^0(\omega)$ и $G^0(\omega)$ соответственно, то масштабирующая функция $\hat{\psi}^{00}(\omega)$, соответствующая масштабирующему фильтру $H^{00}(\omega) = G^0(N\omega) H^0(\omega)$, также является функцией Мейера $\varphi(x)$.

Доказательство. Достаточно показать, что функция Мейера $\varphi(x)$ удовлетворяет масштабирующему соотношению с коэффициентами $h_n^{00} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^0 h_{n-mN}^0$ (обозначим $m = n - kN$, $n = m + kN$):

$$\begin{aligned} \psi^{00}(x) &= \sqrt{NM} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^0 h_{n-kN}^0 \varphi(MNx - n) = \\ &= \sqrt{NM} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_k^0 h_m^0 \varphi(MNx - m - kN) = \sqrt{NM} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_k^0 h_m^0 \varphi(N(Mx - k) - m) = \\ &= \sqrt{M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^0 \varphi(Mx - k) = \varphi(x). \end{aligned}$$

4. Пример. Вейвлеты Мейера с коэффициентом масштабирования 6

Рассмотрим построение вейвлетов Мейера с кратным коэффициентом масштабирования, когда $M = 3$ и $N = 2$. Масштабирующая функция будет одна и та же – $\varphi(x)$, указанная в формуле (8).

Напомним схему построения вейвлетов Мейера для $N = 2$ [4, 5]. Пусть $H^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^0 e^{-in\omega}$ – частотная функция вейвлета Мейера $\varphi(x)$ для $N = 2$. Тогда вейвлет $\psi(x)$ находится из формулы

$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{H^0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Соответствующая частотная функция имеет вид:

$H^1(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{H^0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}$, и ее фильтр $\{h_n^1\}$ находится по формуле $h_n^1 = (-1)^{n+1} h_{-n-1}^0$.

В случае $M = 3$ мы берем ту же самую масштабирующую функцию $\varphi(x)$ с масштабирующим соотношением $\varphi(x) = \sqrt{3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n^0 \varphi(3x - n)$, где масштабирующий фильтр $\{g_n^0\}$ находится из разложения в ряд Фурье функции $G^0(\omega)$, определенной по формуле (9) при $N = 3$. Фильтры вейвлетов $\{g_n^1\}, \{g_n^2\}$ находятся разложением в ряд Фурье частотных функций $H^1(\omega)$ и $H^2(\omega)$, определенных на основе формул (10) и (11).

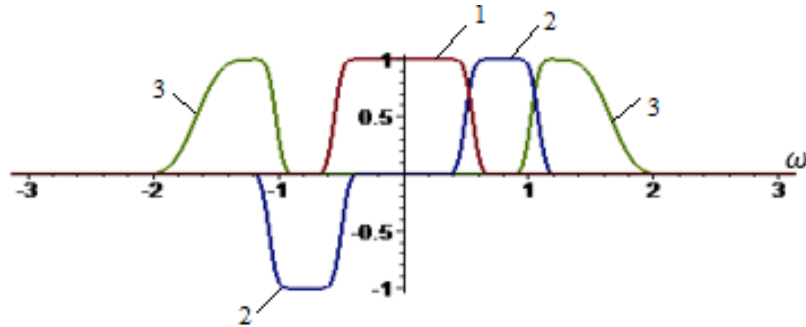


Рис. 1. Графики частотных функций $H^0(\omega)$ (линия 1), $H^1(\omega)$ (линия 2) и $H^2(\omega)$ (линия 3)
Fig. 1. Plots of frequency functions $H^0(\omega)$ (line 1), $H^1(\omega)$ (line 2) and $H^2(\omega)$ (line 3)



Рис. 2. Графики модулей частотных функций $H^{10}(\omega)$ (линия 1), $H^{11}(\omega)$ (линия 2) и $H^{12}(\omega)$ (линия 3)
Fig. 2. Plots of moduli of frequency functions $H^{10}(\omega)$ (line 1), $H^{11}(\omega)$ (line 2) and $H^{12}(\omega)$ (line 3)

Следуя схеме, изложенной в предыдущем параграфе, определим частотные функции вейвлетов $\psi^{kl}(x)$, $k = 0, 1$, $l = 0, 1, 2$ по формуле $H^{kl}(\omega) = G^l(2\omega)H^k(\omega)$. Здесь $\psi^{00}(x) = \varphi(x)$ – масштабирующая функция Мейера. Таким образом, мы получаем матрицу частотных функций вейвлетов $\psi^{kl}(x)$ с коэффициентом масштабирования 6 и фильтры вейвлетов $h_n^{kl} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_{n-2m}^k$, $k = 0, 1$, $l = 0, 1, 2$.

Приведем графики частотных функций $H^{kl}(\omega) = G^l(N\omega)H^k(\omega)$ (рис. 1, 2).

Заключение

В данной работе построены вейвлеты Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$. Дано общее определение вейвлетов Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$. Представленная конструкция хорошо работает для нечетных $N > 2$, однако в случае четного N один из фильтров вейвлетов, а именно фильтр вейвлета $\psi^{N-1}(x)$, имеет бесконечную импульсную характеристику и слабое убывание на бесконечности. Далее для решения этой проблемы в работе используются кратные коэффициенты масштабирования MN . Показано, что если заданы вейвлеты с коэффициентами масштабирования M и N , то можно определить вейвлеты с коэффициентом масштабирования MN . Показано также, что если заданные M - и N -вейвлеты имеют функцию Мейера $\varphi(x)$ в качестве масштабирующей, то и в результате получаются MN -вейвлеты с той же масштабирующей функцией Мейера $\varphi(x)$. Учитывая, что для $N = 2$ вейвлеты Мейера $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ хорошо известны и имеют быстро убывающие фильтры, это решает указанную выше проблему с фильтрами вейвлетов для четного коэффициента масштабирования и полностью решает вопрос определения вейвлетов Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$.

Список источников

1. Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова Е.Ю., Макаров В.А., Овчинников А.А. Вейвлет-анализ в нейродинамике // Успехи физических наук. 2012. Т. 182, № 9. С. 905–939.
2. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-пакетное разложение ЭЭГ на основные частотные ритмы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 54–61.
3. Rahman M.A., Khanam F., Ahmad M., Uddin M.S. Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation // Brain Informatics. 2020. V. 7/7. P. 1–11.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М. : Ижевск : РХД, 2001. 464 с.
5. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М. : ДМК Пресс, 2013. 628 с.
6. Podkur P.N., Smolentsev N.K. About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N // Cornell University. 2007. URL: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>
7. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-анализ ЭЭГ с коэффициентом масштабирования 3 // Южно-Сибирский научный вестник. 2020. Вып. 6 (34). С. 56–61. doi: 10.25699/T7719-3385-0014-J
8. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлеты Мейера с коэффициентом масштабирования $N > 2$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 56. С. 81–89.

References

1. Pavlov, A.N., Khramov, A.E., Koronovsky, A.A., Sitnikova, E.Yu., Makarov, V.A. & Ovchinnikov, A.A. (2012) Veyvlet-analiz v neyro-dinamike [Wavelet analysis in neurodynamics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 182(9). pp. 905–939.
2. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2016) Wavelet packet decomposition EEG on the basic frequency rhythms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 54–61. DOI: 10.17223/19988605/35/6
3. Rahman, M.A., Khanam, F., Ahmad, M. & Uddin, M.S. (2020) Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation. *Brain Informatics*. 7/7. pp. 1–11. DOI: 10.1186/s40708-020-00108-y
4. Daubechies, I. (1992) *Desyat' lektiy po veyvletam* [Ten Lectures on Wavelets]. Moscow; Izhevs : RKHD.
5. Smolentsev, N.K. (2014) *Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB* [Fundamentals of the Theory of Wavelets. Wavelets in MATLAB]. Moscow: DMK Press.
6. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2007) *About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N* . [Online] Available form: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>.
7. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.R. (2020) Wavelet analysis of EEG with scaling factor 3. *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik – South-Siberian Scientific Bulletin*. 6(34). pp. 56–61. DOI: 10.25699/T7719-3385-0014-J
8. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.R. (2021) Meyer wavelets with scaling factor $N > 2$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 56. pp. 81–89. DOI: 10.17223/19988605/56/9

Информация об авторах:

Подкур Полина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Кузбасского государственного технического университета им. Т.Ф. Горбачева (Кемерово, Россия). E-mail: paulina.podkur@gmail.com

Смоленцев Николай Константинович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: smolennk@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Podkur Paulina N. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: paulina.podkur@gmail.com

Smolentsev Nikolay K. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 14.04.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 14.04.2022; accepted for publication 30.08.2022