

Научная статья

УДК 532.516.5

doi: 10.17223/19988621/79/6

Определение давления при течении жидкости в плоском клиновидном слое с учетом сил инерции

Павел Викторович Кауров

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Санкт-Петербург, Россия, pusto@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы ламинарного течения вязкой жидкости в плоском клиновидном слое. Решены обобщенные уравнения Рейнольдса для слоя по методу Слёзкина–Тарга. Предложен метод расчета гидродинамического давления, развиваемого в плоском клиновидном слое, с учетом сил инерции. Приведена зависимость результирующей силы гидродинамического давления от безразмерной величины начального зазора, угла наклона клина и числа Рейнольдса.

Ключевые слова: вязкая жидкость, клиновидный слой, силы инерции, гидродинамическое давление, тонкий зазор

Для цитирования: Кауров П.В. Определение давления при течении жидкости в плоском клиновидном слое с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 69–77. doi: 10.17223/19988621/79/6

Original article

Pressure calculation for a fluid flowing in a plane wedge-shaped layer with account for inertial forces

Pavel V. Kaurov

*Saint Petersburg State University of Industrial Technology and Design,
Saint Petersburg, Russian Federation, pusto@mail.ru*

Abstract. The Reynolds equations are solved with account for inertial forces in a plane wedge-shaped layer using the Slezkin-Targ method. The analytical expressions determining the dimensionless longitudinal velocity, hydrodynamic pressure, and total pressure force as functions of the lubricating Reynolds number and dimensionless parameter of the problem are obtained. A new method for solving the Reynolds equations is proposed accounting for inertial forces and avoiding averaging the inertial terms with respect to the gap height. The numerical analysis of the proposed method shows that in the first and second approximations, the deviations for the total hydrodynamic pressure force in a plane wedge-shaped layer differ little from each other in the considered range of the

lubricating Reynolds number for varying dimensionless parameter of the problem, but exceed the deviation obtained using the Slezkin-Targ method. The coincidence of the first approximation with the second one gives ground to believe that the proposed method is more accurate for calculating the total hydrodynamic pressure force in the fluid flow occurring in a plane wedge-shaped layer.

Keywords: viscous fluid, wedge-shaped layer, inertial forces, hydrodynamic pressure, thin gap

For citation: Kaurov, P.V. (2022) Pressure calculation for a fluid flowing in a plane wedge-shaped layer with account for inertial forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 69–77. doi: 10.17223/19988621/79/6

Введение

Для математического описания ламинарного течения несжимаемой вязкой жидкости в тонком зазоре, как известно [1–3], применяются уравнения Рейнольдса, называемые теорией смазки.

Библиографические обзоры публикаций, посвященных учету инерции при расчете параметров течения смазочного слоя, приведены в [4, 5], из них следует, что для решения уравнений Рейнольдса с учетом инерции преимущественно используется метод Слэзкина–Тарга.

Вопросы учета сил инерции при решении уравнений Рейнольдса для расчета течения смазочной жидкости в подшипнике скольжения также освещены в публикациях [6–9]. В работах [10–12] проводился гидродинамический расчет с учетом инерции по методу Слэзкина–Тарга.

В публикациях [4–11] отмечается существенное влияние инерции на получаемые расчетом результаты, особенно на несущую способность тонкого слоя.

В работах [13, 14] изучалась гидродинамическая модель клиновидной опоры скольжения, но без учета инерции смазочного слоя.

Таким образом, уточнение широко используемого метода Слэзкина–Тарга – актуальная задача, и получение решения системы уравнений Рейнольдса с учетом инерции для плоского клиновидного слоя является целью данной работы.

Постановка задачи: уравнения Рейнольдса

Для жидкости в плоском клиновидном слое (рис. 1) система уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции в прямоугольной системе координат в безразмерной форме имеет вид [1–3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \text{Re} \frac{dp}{dx} + \text{Re} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где (штрихом обозначены размерные величины) u' и v' – проекции скорости жидкости на горизонтальную x' и вертикальную y' координатные оси соответственно; $u = u'/U'$ – безразмерная продольная скорость жидкости; U' – скорость подвижной границы зазора; $v = v'/U'$ – безразмерная поперечная скорость жидкости; $x = x'/L'$ – относительная продольная координата; L' – длина зазора; $y = y'/L'$ – относительная поперечная координата; $Re = U'L'/\nu'$ – число Рейнольдса; ν' – кинематический коэффициент вязкости; p' – гидродинамическое давление; $p = p'/(ρU'^2)$ – безразмерное гидродинамическое давление; $ρ'$ – плотность жидкости.

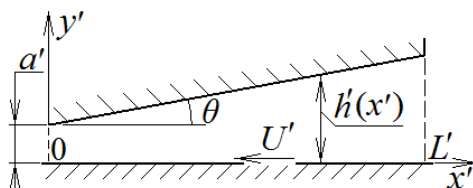


Рис. 1. Схема плоского клиновидного слоя
Fig. 1. Schematic representation of a wedge-shaped layer

Безразмерная форма зазора для клиновидного слоя (см. рис. 1) имеет вид:

$$h(x) = h'/L' = a(1 + Zx), \quad (2)$$

где a – безразмерная величина начального зазора, $a = a'/L'$; Z – безразмерный параметр задачи, $Z = \tan(\theta)/a$; θ – угол наклона клина.

Граничные условия для безразмерных скоростей и давления имеют вид:

$$u(x, 0) = -1, \quad u(x, h(x)) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(x, h(x)) = 0, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 0. \quad (3)$$

Решение системы уравнений Рейнольдса (1) без учета сил инерции для плоского клиновидного слоя, зазор в котором изменяется согласно формуле (2), полученное при использовании граничных условий (3), имеет вид:

безразмерное гидродинамическое давление:

$$p_0(x) = \frac{6Zx(1-x)}{Re_a(2+Z)(1+Zx)^2},$$

где Re_a – смазочное число Рейнольдса, $Re_a = Re a^2$;

безразмерная продольная скорость:

$$u_0 = Re_a \frac{dp_0}{dx} \frac{(1+Zx)^2}{2} \left[\frac{y^2}{h^2(x)} - \frac{y}{h(x)} \right] + \frac{y}{h(x)} - 1;$$

безразмерная результирующая сила гидродинамического давления:

$$P_0 = \int_0^1 p_0 dx = \frac{6[(2+Z)\ln(1+Z) - 2Z]}{Re_a Z^2(2+Z)}.$$

Решение уравнений Рейнольдса методом Слэзкина–Тарга

По методу Слэзкина–Тарга [1] вместо проекции действительного ускорения на горизонтальную ось x вводится его осредненное по высоте слоя значение, равное

$$W = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy. \quad (4)$$

Решение уравнений (1) и (4) с использованием граничных условий (3) для плоского клиновидного слоя в данной работе получено в виде:

безразмерная продольная скорость:

$$u_w = u_0 + \text{Re}W \left[\frac{y^2}{h^2(x)} - \frac{y}{h(x)} \right],$$

$$W = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u_0^2 dy = \frac{f_1 + Zx f_2 + (Zx)^2 f_3}{15 [(2+Z)(1+Zx)]^2},$$

$$f_1 = 20 + 35Z + 17Z^2, \quad f_2 = 10 + 7Z + Z^2, \quad f_3 = 8 + 8Z + 2Z^2;$$

безразмерное гидродинамическое давление: $p_w(x) = p_0(x) + p_{w0}(x)$,

$$p_{w0} = \frac{Z^3 x \ln(1+Z)}{7.5(2+Z)(1+Zx)^2} \left(x + \frac{2+2x}{Z} + \frac{4+x}{Z^2} + \frac{2}{Z^3} \right) - \\ - \frac{\ln(1+Zx)}{7.5(2+Z)(1+Zx)^2} (Z^3 x^2 + 2Z^2 x^2 + 2Z^3 x + 4Zx + Z + 2);$$

безразмерная результирующая сила давления: $P_w = P_0 + P_{w0}$,

$$P_{w0} = \int_0^1 p_{w0} dx = \frac{2Z + Z^2 - (2Z + 2)\ln(1+Z)}{7.5Z(2+Z)}.$$

Для оценки влияния инерционных членов, получаемого решением системы уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции по методу Слэзкина–Тарга, представим выражение для результирующей силы гидродинамического давления в виде: $P_w = P_0[1 + (P_{w0}/P_0)] = P_0(1 + \Delta_{P,w})$, где величина относительного отклонения $\Delta_{P,w}$ от линейного решения уравнений Рейнольдса без учета сил инерции для результирующей силы имеет вид: $\Delta_{P,w} = k_w(Z)\text{Re}_a$.

Зависимость величины $\Delta_{P,w}$ от смазочного числа Рейнольдса Re_a при разных значениях параметра Z графически показана ниже.

Решение уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции по предлагаемому методу

В предлагаемом методе в качестве нулевого приближения используются результаты решения уравнений Рейнольдса без учета сил инерции, т.е. выражения для u_0 и p_0 , полученные ранее.

Для первого приближения с учетом сил инерции решается уравнение Рейнольдса, записанное в виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \text{Re} \frac{dp_1}{dx} + \text{Re} A_0, \quad (5)$$

где выражение для A_0 , полученное с использованием уравнения неразрывности, имеет вид:

$$A_0 = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u_0}{\partial x} dy. \quad (6)$$

Решение уравнений (5) и (6) с использованием граничных условий (3), будет иметь вид:

безразмерная продольная скорость:

$$u_1 = \operatorname{Re} \left[\frac{dp_1}{dx} \frac{(y^2 - h(x)y)}{2} + u_{A0} \right] + \frac{y}{h(x)} - 1, \\ u_{A0} = \iint A_0 dy dy - \frac{y}{h(x)} \iint A_0 dy dy \Big|_{h(x)}; \quad (7)$$

безразмерное гидродинамическое давление: $p_1(x) = p_0(x) + p_{01}(x)$,

$$p_{01} = 12 \left[I_{01}(x) + f_p(x) I_{01}(1) \right], \\ I_{01} = \int_0^x \left[\frac{1}{h^3(x)} \int_0^{h(x)} u_{A0} dy \right] dx, \quad (8) \\ f_p(x) = \frac{x(2 + Zx)(1 + Z)^2}{(1 + Zx)^2(2 + Z)};$$

безразмерная результирующая сила:

$$P_1 = P_0 + P_{01}, \quad P_{01} = \int_0^1 p_{01} dx. \quad (9)$$

Для оценки влияния инерционных членов в первом приближении запишем выражение для результирующей силы гидродинамического давления в виде: $P_1 = P_0[1 + (P_{01}/P_0)] = P_0(1 + \Delta_{P,1})$, где величина относительного отклонения $\Delta_{P,1}$ от линейного решения уравнений Рейнольдса без учета сил инерции для результирующей силы гидродинамического давления, имеет вид: $\Delta_{P,1} = k_{P,1}(Z) \operatorname{Re}_a$.

Зависимость величины $\Delta_{P,1}$ от смазочного числа Рейнольдса Re_a при различных значениях безразмерного параметра задачи Z показана на рис. 2 линией 2 с серыми кружками.

После вычисления первого приближения аналогичным образом производится второе приближение, т.е. решаются уравнения

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \operatorname{Re} \frac{dp_2}{dx} + \operatorname{Re} A_1, \\ A_1 = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u_1}{\partial x} dy. \quad (10)$$

Решение во втором приближении будет иметь вид:

безразмерная продольная скорость:

$$u_2 = \operatorname{Re} \left[\frac{dp_2}{dx} \frac{(y^2 - h(x)y)}{2} + u_{A1} \right] + \frac{y}{h(x)} - 1, \\ u_{A1} = \iint A_1 dy dy - \frac{y}{h(x)} \iint A_1 dy dy \Big|_{h(x)}; \quad (11)$$

безразмерное гидродинамическое давление: $p_2(x) = p_0(x) + p_{02}(x)$,

$$p_{02} = 12 \left[I_{02}(x) + f_p(x) I_{02}(1) \right], \\ I_{02} = \int_0^x \left[\frac{1}{h^3(x)} \int_0^{h(x)} u_{A1} dy \right] dx; \quad (12)$$

безразмерная результирующая сила:

$$P_2 = P_0 + P_{02}, \quad P_{02} = \int_0^1 p_{02} dx. \quad (13)$$

При вычислении интегралов в формулах (6)–(13) использовался метод трапеций на равномерной сетке с шагом в 0.01.

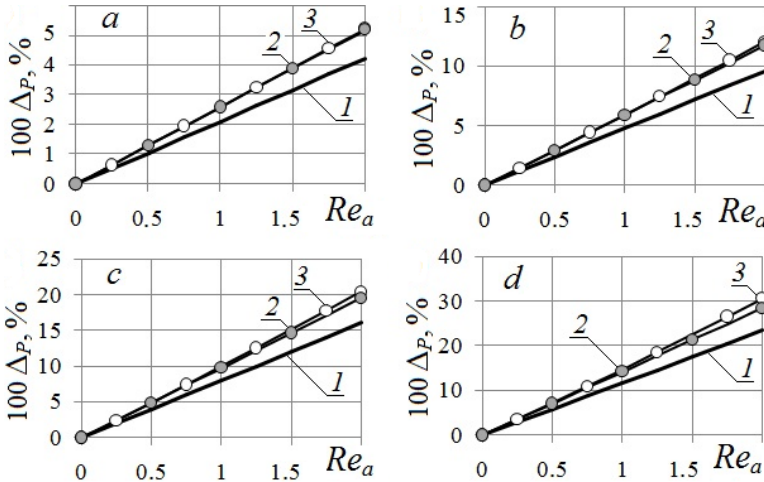


Рис. 2. Зависимость относительного отклонения ΔP от смазочного числа Рейнольдса Re_a при значениях безразмерного параметра задачи: $Z = 0.4$ (a), $Z = 0.8$ (b), $Z = 1.2$ (c), $Z = 1.6$ (d); 1 – $\Delta_{P,w}$, 2 – $\Delta_{P,1}$, 3 – $\Delta_{P,2}$

Fig. 2. Relative deviation ΔP as a function of the lubricating Reynolds number Re_a at dimensionless parameters of the problem: $Z =$ (a) 0.4, (b) 0.8, (c) 1.2, and (d) 1.6; 1 – $\Delta_{P,w}$, 2 – $\Delta_{P,1}$, and 3 – $\Delta_{P,2}$

Для оценки влияния инерционных членов во втором приближении запишем выражение для результирующей силы гидродинамического давления в виде: $P_2 = P_0[1 + (P_{02}/P_0)] = P_0(1 + \Delta_{P,2})$, где величина относительного отклонения $\Delta_{P,2}$ во втором приближении имеет вид: $\Delta_{P,2} = k_{P,1}(Z)Re_a + k_{P,2}(Z)Re_a^2 + k_{P,3}(Z)Re_a^3$.

Зависимость величины относительного отклонения $\Delta_{P,2}$ от смазочного числа Рейнольдса Re_a при различных значениях безразмерного параметра задачи Z показана на рис. 2 линией 3 с белыми кружками.

Заключение

Решены уравнения Рейнольдса с учетом сил инерции для плоского клиновидного слоя по методу Слэзкина–Тарга относительно безразмерных величин: продольной скорости, гидродинамического давления и результирующей силы давления, в результате чего получены аналитические выражения для их определения в зависимости от смазочного числа Рейнольдса Re_a и безразмерного параметра задачи Z .

Предложен новый способ решения уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции без осреднения инерционных членов по высоте зазора, результаты по которому достигаются расчетом путем простого численного интегрирования.

Проведенный численный анализ предлагаемого метода показал, что величины отклонений для результирующей силы гидродинамического давления в плоском клиновидном слое в первом и во втором приближениях, во-первых, мало отличаются друг от друга на рассматриваемом интервале изменения смазочного числа Рейнольдса Re_a при различных значениях безразмерного параметра задачи Z и, во-вторых, превышают величину отклонения, полученную по методу Слѣзкина–Тарга при $Re_a > 0.5$.

Таким образом, совпадение первого приближения со вторым дает основание считать, что предлагаемый метод является более точным для расчетного определения результирующей силы гидродинамического давления при течении жидкости в плоском клиновидном слое.

Список источников

1. Слѣзкин *Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. : ГИТТЛ, 1955. 521 с.
2. *Pozrikidis C.* Fluid Dynamics. Theory, Computation, and Numerical Simulation. 3th ed. New York : Springer, 2017. 912 p. doi: 10.1007/978-1-4899-7991-9
3. *Huterr K., Wang Y.* Fluid and Thermodynamics. New York : Springer, 2016. V. 1: Basic Fluid Mechanics. 652 p. doi: 10.1007/978-3-319-33633-6
4. *Deng X., Watson C.* Lubricant Inertia in Water Lubricated Bearings // Proceedings of the 29th Symposium on Fluid Machinery. 2017. P. 1–8. doi: 10.1115/FEDSM2017-69110
5. *Javorova J.G.* On the method of averaged inertia at hydrodynamic lubrication with fluid inertia effects: a review // Вестник Северо-Казахстанского Университета им. М. Козыбаева. Сер. Технические науки. 2017. Т. 3, № 36. С. 5–10.
6. *Singh U.P.* Effects of surface roughness and supply inertia on steady performance of hydrostatic thrust bearings lubricated with non-newtonian fluids // Journal of Mechanical Engineering. 2021. V. 71 (2). P. 317–328. doi: 10.2478/scjme-2021-0038.
7. *Ghosh K.C., Mazumder S.K.* Steady State Performance Characteristics of Isoviscous Finite Flexible Oil Journal Bearings Including Fluid Inertia Effect // International Journal of Engineering Research & Technology. 2017. V. 6 (7). P. 318–326. doi: 10.17577/IJERTV6IS070223
8. *Tieshu F., Sina H.* The effect of lubricant inertia on fluid cavitation for high-speed squeeze film dampers // Journal of Vibroengineering. 2017. V. 19 (8). P. 6122–6134. doi: 10.21595/jve.2017.19314
9. *Sina H., Kamran B.* A Study of Lubricant Inertia Effects for Squeeze Film Dampers Incorporated into High-Speed Turbomachinery // Lubricants. 2017. V. 5 (4). P. 1–29. doi: 10.3390/lubricants5040043
10. *Singh U.P., Sinha P.* Analysis of hydrostatic rough thrust bearing lubricated with Rabinowitsch fluid considering fluid inertia in supply region // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology. 2020. V. 235 (2). P. 386–395. doi: 10.1177/1350650120945887
11. *Walicka A., Jurczak P.* Influence of total inertia effects in a thrust curvilinear bearing lubricated with Newtonian Lubricants // Int. J. of Applied Mechanics and Engineering. 2017. V. 22 (4). P. 1045–1058. doi: 10.1515/ijame-2017-0067
12. *Борисевич В.Д., Потанин Е.П.* Использование преобразования Дородницына для анализа тепло- и массопереноса во вращающихся потоках // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 6. С. 758–771. doi: 10.31857/S0032823521060035
13. *Ахвердиев К.С., Болгова Е.А.* Гидродинамический расчет клиновидной системы «ползун–направляющая», работающей на сжимаемом смазочном материале в условиях наличия расплава на поверхности направляющей // Омский научный вестник. 2021. Т. 2, № 176. С. 10–14. doi: 10.25206/1813-8225-2021-176-10-14

14. Мукутадзе М.А., Хасьянова Д.У. Гидродинамическая модель клиновидной опоры скольжения с легкоплавким металлическим покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 4. С. 51–58. doi: 10.31857/S0235711920040100

References

1. Slyozkin N.A. (1955) *Dinamika vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Viscous incompressible fluid dynamics]. Moscow: GITTL.
2. Pozrikidis C. (2017) *Fluid Dynamics. Theory, Computation, and Numerical Simulation*, 3th ed. New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4899-7991-9
3. Hutter K., Wang Y. (2016) *Fluid and Thermodynamics, Volume 1: Basic Fluid Mechanics*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-33633-6
4. Deng X., Watson C. (2017) Lubricant inertia in water lubricated bearings. *Proceedings of the 29th Symposium on Fluid Machinery*. pp. 1–8. doi: 10.1115/FEDSM2017-69110
5. Javorova J.G. (2017) On the method of averaged inertia at hydrodynamic lubrication with fluid inertia effects: a review. *Vestnik of the North Kazakhstan University named after M. Kozybayev. Engineering Sciences*. 3(36). pp. 5–10.
6. Singh U.P. (2021) Effects of surface roughness and supply inertia on steady performance of hydrostatic thrust bearings lubricated with non-Newtonian fluids. *Journal of Mechanical Engineering*. 71(2). pp. 317–328. doi: 10.2478/scjme-2021-0038
7. Ghosh K.C., Mazumder S.K. (2017) Steady state performance characteristics of isoviscous finite flexible oil journal bearings including fluid inertia effect. *International Journal of Engineering Research & Technology*. 6(7). pp. 318–326. doi: 10.17577/IJERTV6IS070223
8. Tieshu F., Sina H. (2017) The effect of lubricant inertia on fluid cavitation for high-speed squeeze film dampers. *Journal of Vibroengineering*. 19(8). pp. 6122–6134. doi: 10.21595/jve.2017.19314
9. Sina H., Kamran B. (2017) A study of lubricant inertia effects for squeeze film dampers incorporated into high-speed turbomachinery. *Lubricants*. 5(4). pp. 1–29. doi: 10.3390/lubricants5040043
10. Singh U.P., Sinha P. (2020) Analysis of hydrostatic rough thrust bearing lubricated with Rabinowitsch fluid considering fluid inertia in supply region. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 235(2). pp. 386–395. doi: 10.1177/1350650120945887
11. Walicka A., Jurczak P. (2017) Influence of total inertia effects in a thrust curvilinear bearing lubricated with Newtonian lubricants. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 22(4). pp. 1045–1058. doi: 10.1515/ijame-2017-0067
12. Borisevich V.D., Potanin E.P. (2021) Ispol'zovanie preobrazovaniya Dorodnitsyna dlya analiza teplo- i massoperenosa vo vrashchayushchikhsya potokakh [Application of the Dorodnitsyn transformation for analysis of heat and mass transfer in rotating flows]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Applied Mathematics and Mechanics*. 85(6). pp. 758–771. doi: 10.31857/S0032823521060035
13. Akhverdiev K.S., Bolgova E.A. (2021) Gidrodinamicheskiy raschet klinovidnoy sistemy «polzun–napravlyayushchaya», rabotayushchey na szhimaemom smazochnom materiale v usloviyakh nalichiya rasplava na poverkhnosti napravlyayushchey [Hydrodynamic calculation of wedge-shaped system «slider-guide» operating on compressible lubricant in presence of melt on surface of guide]. *Omskiy nauchnyy vestnik – Omsk Scientific Bulletin*. 2(176). pp. 10–14. doi: 10.25206/1813-8225-2021-176-10-14
14. Mukutadze M.A., Khas'yanova D.U. (2020) Gidrodinamicheskaya model' klinovidnoy opory skol'zheniya s legkoplavkim metallicheskim pokrytiem [Hydrodynamic model of a wedge-shaped sliding support with an easy-melting metal coating]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 4. pp. 51–58. doi: 10.31857/S0235711920040100

Сведения об авторе:

Кауров Павел Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры основ конструирования машин Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: pucmo@mail.ru

Information about the author:

Kaurov Pavel V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Saint Petersburg State University of Industrial Technology and Design, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: pucmo@mail.ru

Статья поступила в редакцию 11.11.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 11.11.2021; accepted for publication 03.10.2022