

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 515.12

doi: 10.17223/19988621/80/1

MSC: 54C35

**О свойстве конечного носителя гомеоморфизма
Гулько–Хмылёвой****Валерия Серверовна Аметова¹, Вадим Ремирович Лазарев²**^{1, 2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *ametovalera@gmail.com*² *lazarev@math.tsu.ru*

Аннотация. Установлено, что для гомеоморфизма пространств c_0 и $s \times c_0$, построенного С.П. Гулько и Т.Е. Хмылёвой, образ первого координатного функционала при сопряженном отображении не имеет конечного носителя. Как следствие получаем, что этот гомеоморфизм не имеет свойства конечного носителя. Кроме этого показано, что образы всех остальных координатных функционалов при сопряженном отображении имеют конечные носители.

Ключевые слова: топология поточечной сходимости, t -эквивалентность, функционал с конечным носителем, свойство конечного носителя

Благодарности: Авторы благодарят С.П. Гулько и Т.Е. Хмылёву, а также А.В. Осипова за благожелательное внимание к этой работе.

Для цитирования: Аметова В.С., Лазарев В.Р. О свойстве конечного носителя гомеоморфизма Гулько – Хмылёвой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 5–15. doi: 10.17223/19988621/80/1

Original article

**On the finite support property of Gul'ko–Khmyleva's
homeomorphism**

Valeriya S. Ametova, Vadim R. Lazarev

^{1, 2} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*¹ *ametovalera@gmail.com*² *lazarev@math.tsu.ru*

Abstract. This paper considers an example of a homeomorphism between spaces c_0 and $s \times c_0$ with the topology of pointwise convergence. This example was constructed by

Gul'ko and Khmyleva in 1986 to show that a compact space, namely, $\alpha\mathbb{N}$ can be t -equivalent to a non-compact space, namely, $\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$. The example of Gul'ko and Khmyleva cannot be uniform because Uspensky proved that compactness is preserved by uniform homeomorphisms of function spaces; moreover, it is not a linear homeomorphism.

In our paper, we study the question of whether the homeomorphism of Gul'ko and Khmyleva has the finite support property. Homeomorphisms with the finite support property are a broad generalization of linear homeomorphisms. However, they do not completely cover the class of uniform homeomorphisms. The main result of our work is the negative answer to the above question. It turned out that, to obtain this result, it suffices to consider the (continuous linear) functional $P_1 : C_p(\alpha\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ generated by the natural number 1 as an element of the Alexandroff compactification $\alpha\mathbb{N}$ of the natural series $\mathbb{N}$. We have proved that the image of the functional P_1 under the dual mapping in space $C_p C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$ does not have a finite support in the space $\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, and the functional P_1 itself has a single-point support $\{1\}$. Thus, the interesting question of the preservation of compactness by homeomorphisms of spaces of continuous functions remains open.

As an additional result, it is established in this paper that the dual images of the remaining functionals P_n ($n > 1$) have finite supports in the space $\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, similar to linear continuous functionals on the space $C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$.

Keywords: pointwise convergence topology, t -equivalence, functional with a finite support, finite support property

Acknowledgments: The authors thank S.P. Gul'ko and T.E. Khmyleva, as well as A.V. Osipov for their kind attention to this work.

For citation: Ametova, V.S., Lazarev, V.R. (2022) On the finite support property of Gul'ko–Khmyleva's homeomorphism. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 5–15. doi: 10.17223/19988621/80/1

1. Предварительные сведения и основные обозначения

Всюду в этой работе мы называем гомеоморфизмом Гулько–Хмылёвой пример гомеоморфного отображения

$$U : C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}) \rightarrow C_p(\alpha\mathbb{N}), \quad (1.1)$$

построенный в 1986 г. С.П. Гулько и Т.Е. Хмылёвой в статье [1]. Этот пример показал, что результат В.В. Успенского [2] о сохранении компактности равномерными гомеоморфизмами пространств непрерывных функций нельзя обобщить на случай произвольного гомеоморфизма.

Данный результат, замечательный сам по себе, приобретает дополнительный интерес в связи с тем, что В.Р. Лазарев (см., напр.: [3]) выделил новый класс гомеоморфизмов пространств функций – так называемые гомеоморфизмы со свойством конечного носителя. Этот класс намного шире, чем линейные гомеоморфизмы, и несравним с классом равномерных гомеоморфизмов. Таким образом, возникает естественный вопрос: имеет ли гомеоморфизм (1.1) свойство конечного носителя. Ответу на этот вопрос и посвящена настоящая работа. Мы доказы-

ваем (теорема 4.1, следствие 4.2), что гомеоморфизм (1.1) не обладает свойством конечного носителя.

Для тихоновского топологического пространства X символ $C_p(X)$ означает множество всех непрерывных функций $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, наделенное топологией поточечной сходимости. Таким образом, в частном случае, когда X – это компактификация $\alpha\mathbb{N}$ натурального ряда $\mathbb{N}$ одной точкой α , мы получаем известное пространство s сходящихся последовательностей, наделенное топологией покоординатной сходимости. Это пространство s топологически изоморфно (линейно гомеоморфно) пространству бесконечно малых последовательностей c_0 , поэтому, следуя статье [1], мы не различаем эти пространства. Аналогично, пространство $C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$ может рассматриваться как произведение $s \times c_0$ с топологией покоординатной сходимости. В [1] также используется известный факт, что c_0 линейно гомеоморфно своей счетной c_0 -степени, взятой относительно стандартной нормы $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n, \dots)\| = \max \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Однако для других целей эта норма в [1] и в данной работе не используется.

В настоящей работе все топологические пространства заранее предполагаются тихоновскими, и поэтому, как известно, можно отождествить каждое такое пространство X с некоторым (замкнутым) подпространством в $C_p(C_p(X)) = C_p C_p(X)$. В силу этого каждая точка $x \in X$ рассматривается одновременно и как (линейный непрерывный) функционал $x: C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $x(\varphi) = \varphi(x)$. Говоря о непрерывных отображениях вида $f: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$, мы по умолчанию предполагаем, что $f(0^X) = 0^Y$, где 0^X , 0^Y – функции, тождественно равные нулю на пространствах X , Y соответственно. (Это предположение справедливо, как легко убедиться, и для всех гомеоморфизмов, описанных в разд. 3.) В частности, если пространство Y состоит из одной точки, $Y = \{y\}$, то $C_p(Y)$ есть вещественная прямая $\mathbb{R}$, и мы имеем $f(0^X) = 0$. Запись $f = 0$ означает, что $f(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in C_p(X)$. Отображение, сопряженное к $u: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$, – это отображение $u^*: C_p C_p(Y) \rightarrow C_p C_p(X)$, $u^*(f) = f \circ u$. Хорошо известно, что если u – гомеоморфизм, то u^* – изоморфизм топологических колец и, в частности, $u^*(0) = 0$.

За дополнительной информацией по терминам общей топологии можно обратиться к [4], а по специальным вопросам теории пространств непрерывных функций – к [5].

2. Отображения со свойством конечного носителя

В этом разделе мы описываем класс гомеоморфизмов со свойством конечного носителя и нужные для дальнейшего свойства этого класса.

Определение 2.1. Говорят, что функция $f: C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал с конечным носителем, если существует конечное $K \subset X$ такое, что:

1. Для каждого $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(X)$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\max\{|\varphi(x) - \psi(x)| : x \in K\} < \delta$, то $|f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$.

2. Для каждого $x_0 \in K$ множество $K \setminus \{x_0\}$ не удовлетворяет пункту 1.

При этом множество K называют носителем функционала f .

Из определения 2.1 легко вывести, что каждый линейный непрерывный функционал $f : C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\varphi) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n)$ имеет конечный носитель $\{x_1, \dots, x_n\}$. Справедливо следующее предложение, вытекающее непосредственно из определения 2.1.

Предложение 2.2. 1) $f = 0$ тогда и только тогда, когда носитель f пуст.

2) Каждый функционал с конечным носителем имеет единственный носитель.

Определение 2.3. Говорят, что отображение $f : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ имеет свойство конечного носителя, если $f^*(y)$ – функционал с конечным носителем для любого $y \in Y$.

Определение 2.4. Говорят, что гомеоморфизм $f : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ имеет свойство конечного носителя, если отображения f и f^{-1} имеют свойство конечного носителя.

Теорема 2.5. Пусть $f : C_p(Y) \rightarrow C_p(X)$, $g : C_p(Z) \rightarrow C_p(Y)$ – гомеоморфизмы со свойством конечного носителя. Тогда их композиция $h = f \circ g : C_p(Z) \rightarrow C_p(X)$ также имеет свойство конечного носителя.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $K_x \subset Y$ – конечный носитель функционала $f^*(x)$ и $K_y \subset Z$ – конечные носители функционалов $g^*(y)$, где $y \in K_x$. Положим $K = \bigcup \{K_y : y \in K_x\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(Z)$. Так как $f^*(x)$ – функционал с конечным носителем, то найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что если $\psi \in C_p(Y)$ и $\max\{|g(\varphi)(y) - \psi(y)| : y \in K_x\} < \delta_1$, то

$$|f^*(x)(g(\varphi)) - f^*(x)(\psi)| = |f(g(\varphi))(x) - f(\psi)(x)| < \varepsilon.$$

Далее, так как каждый функционал $g^*(y)$ имеет конечный носитель, и множество $\{g^*(y) : y \in K_x\}$ конечно, то существует $\delta_2 > 0$ такое, что если $\eta \in C_p(Z)$ и $\max\{|\varphi(z) - \eta(z)| : z \in K\} < \delta_2$, то $|g^*(y)(\varphi) - g^*(y)(\eta)| = |g(\varphi)(y) - g(\eta)(y)| < \delta_1$ для всех $y \in K_x$. Следовательно,

$$|f(g(\varphi))(x) - f(g(\eta))(x)| = |(f \circ g)^*(x)(\varphi) - (f \circ g)^*(x)(\eta)| < \varepsilon,$$

что означает, что K удовлетворяет условию 1 определения 2.1. Если K удовлетворяет и условию 2, то доказательство завершено. Если же условие 2 не выполнено, то при некотором $z_0 \in K$ множество $K \setminus z_0$ удовлетворяет условию 1. Повторяя

это рассуждение, через конечное число шагов получим конечное множество $K' \subset Z$, удовлетворяющее условиям 1 и 2. Заметим, что множество $K' \subset Z$ не может оказаться пустым, так как если $x \in X$, то $x \neq 0$, а значит и $(f \circ g)^*(x) \neq 0$. По предположению 2.2, $K' \neq \emptyset$.

Ясно, что аналогичными рассуждениями можно доказать, что для каждого $z \in Z$ функционал $(g^{-1} \circ f^{-1})^*(z)$ также имеет конечный носитель. ■

Из доказательства теоремы 2.5 легко усмотреть справедливость следующего замечания.

Замечание 2.6. 1) Пусть в обозначениях и условиях теоремы 2.5 для некоторого $x \in X$ некоторое конечное множество $S(x) \subset Y$ удовлетворяет условию 1 из 2.1 (для функционала $f^*(x)$). Пусть также для каждого $y \in S(x)$ некоторое конечное множество $S(y) \subset Z$ удовлетворяет условию 1 из 2.1 (для функционала $g^*(y)$). Тогда (конечное) множество $S = \cup\{S(y) : y \in S(x)\}$ удовлетворяет условию 1 из 2.1 (для функционала $(g^* \circ f^*)(x) = (f \circ g)^*(x)$). Следовательно, S содержит (конечный, непустой) носитель функционала $(f \circ g)^*(x)$.

2) Ясно, что теорему 2.4 и пункт 1 данного замечания можно распространить на случай произвольного конечного числа непрерывных отображений со свойством конечного носителя.

3. Гомеоморфизм Гулько–Хмылёвой

В этом разделе для удобства читателя приводится краткое описание конструкции гомеоморфного отображения $U : s \times c_0 \rightarrow c_0$ из статьи [1]. Обратим внимание, что евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ рассматривается здесь с метрикой $\rho^+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty)$, $\rho^+((r_1, r_2), (s_1, s_2)) = |s_1 - r_1| + |s_2 - r_2|$.

Выберем произвольное число $a > 0$ и положим $a_k = a \cdot (1 - 2^{-k})$, $k \in \mathbb{N}$. Для выбранного значения a зададим семейство гомеоморфизмов евклидовой плоскости $\varphi_{k,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ таких, что все отображения $\varphi_k : \mathbb{R}^2 \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_k((r_1, r_2), t) = \varphi_{k,t}(r_1, r_2) = (\varphi_{k,t}^1(r_1, r_2); \varphi_{k,t}^2(r_1, r_2))$ непрерывны (т.е. являются автоизотопиями плоскости).

Итак, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим (очевидно, непрерывные) функции $z_k : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $z_k(x) = \min(x_2, \dots, x_k)$, и $t_k : c_0 \rightarrow [0; 1]$, где $t_1(x) \equiv 1$, а при $k > 1$

$$t_k(x) = \begin{cases} 0, & z_k(x) < a_k/2; \\ (2z_k(x) - a_k)/(a_{k+1} - a_k), & a_k/2 \leq z_k(x) \leq a_{k+1}/2; \\ 1, & z_k(x) > a_{k+1}/2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Зададим значения $\varphi_{k,t}(r_1, r_2)$ при $r_1 > 0$, полагая затем $\varphi_{k,t}(-r_1, r_2) = \varphi_{k,t}(r_1, r_2)$, $\varphi_{k,t}(0, r_2) = (0, r_2)$. Пусть все отображения $\varphi_{k,t}$ тождественны при $r_2 \geq r_1 > 0$,

а также при $|r_1| < a_k$. При $r_1 \geq a_k$ и $r_2 < r_1$ каждая точка $r = (r_1, r_2)$ принадлежит единственному множеству $\Gamma_{b(r)} = [a_k; b(r)] \times \{-b(r)\} \cup \{b(r)\} \times [-b(r); b(r)]$, где

$$b(r) = b(r_1, r_2) = \max(r_1, -r_2). \quad (3.2)$$

Все отображения $\varphi_{k,t}$ определены так, что $\varphi_{k,t}(\Gamma_{b(r)}) = \Gamma_{b(r)}$. Действительно, пусть $J: (\Gamma_{b(r)}, \rho^+) \rightarrow [a_k; 3b(r)] \subset \mathbb{R}$ — такая изометрия, что $J([a_k; b(r)] \times \{-b(r)\}) = [a_k; b(r)]$, $J(\{b(r)\} \times [-b(r); b(r)]) = [b(r); 3b(r)]$. Рассмотрим функцию $\psi_{k1}: [a_k; 3b(r)] \rightarrow [a_k; 3b(r)]$ с графиком в виде ломаной с наименьшим возможным числом звеньев, такую, что $\psi_{k1}(a_k) = a_k$, $\psi_{k1}(3b(r)) = 3b(r)$, $\psi_{k1}(a_m) = 2b(r) + a_m/2$ при $a_k < a_m \leq b(r)$, $\psi_{k1}(b(r)) = 5b(r)/2$, $\psi_{k1}(a) = 2b(r) + a/2$ при $a \leq b(r)$. При $0 \leq t < 1$ полагаем $\psi_{kt}(s) = s + t \cdot (\psi_{k1}(s) - s)$, $s \in [a_k; 3b(r)]$. Наконец, пусть $\varphi_{k,t} = J^{-1} \circ \psi_{k,t} \circ J$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Из такого определения $\varphi_{k,t}$ следует, что $\varphi_{k,0}$ — тождественное отображение, и при $a_k < a_m \leq b(r)$

$$\varphi_{k,t}(a_m, -b(r)) = (b(r), a_m/2). \quad (3.3)$$

Теперь для каждого $k \in \mathbb{N}$ зададим гомеоморфизм $u_k: c_0 \rightarrow c_0$ формулой

$$\begin{aligned} u_k(x) &= u_k(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) = \\ &= \left(\varphi_{k,t_k}^1(x_1, x_{k+1}), x_2, \dots, x_k, \varphi_{k,t_k}^2(x_1, x_{k+1}), x_{k+2}, \dots \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее, определим гомеоморфизмы $v_n: c_0 \rightarrow c_0$ правилом $v_n = u_n \circ \dots \circ u_1$ и положим $v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$ для всех $x \in c_0$. В статье [1] доказано (предложение 1 и лемма 2), что $v: G \rightarrow c_0$ — гомеоморфизм, где $G = \{x \in c_0 : x_1 < a\}$. Зададим еще отображение $u_0: \mathbb{R} \times c_0 \rightarrow G$ правилом $u_0(r, x) = \left(\frac{2a}{\pi} \cdot \arctg r, x_1, \dots, x_n, \dots \right)$ и положим $u = v \circ u_0$. Понятно, что таким образом мы получили гомеоморфизм $u: \mathbb{R} \times c_0 \rightarrow c_0$. В [1] доказано, что при этом выполнено неравенство $\|u(r, x)\| - \|x\| < a$.

Полагая в описанном выше построении $a = 1/n$, получим гомеоморфизмы $U_n: \mathbb{R} \times c_0 \rightarrow c_0$ такие, что

$$\|U_n(r, x)\| - \|x\| < 1/n. \quad (3.5)$$

Наконец, зафиксируем некоторое разбиение множества $\mathbb{N}$ на бесконечные подмножества $N_1, N_2, \dots$, и для всякого $x \in c_0$ положим $x^n = x|_{N_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Легко проверить, что соответствие $x \leftrightarrow (x^1, \dots, x^n, \dots)$ задает топологический изоморфизм пространства c_0 на его счётную c_0 -степень $E = (c_0)_0^{\omega}$. Ввиду этого для $(r_1, \dots, r_n, \dots) \in s$ и $(x^1, \dots, x^n, \dots) \in E$ положим

$$U\left((r_1, \dots, r_n, \dots), (x^1, \dots, x^n, \dots)\right) = \left(U_1(r_1, x^1), \dots, U_n(r_n, x^n), \dots\right). \quad (3.6)$$

Неравенства (3.5) гарантируют, что каждое значение отображения U принадлежит $E \cong c_0$.

4. Основные результаты

В этом разделе мы рассматриваем проекционные (они же координатные) функционалы $P_n : C_p(\alpha\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ заданные формулой $P_n(x) = x_n$ для всех $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in C_p(\alpha\mathbb{N})$. Как уже отмечалось в разд. 2, функционал такого вида имеет одноточечный носитель $\{n\}$. Так как мы условились не различать (линейно гомеоморфные) пространства $C_p(\alpha\mathbb{N})$ и c_0 , то проекционный функционал $P_\alpha : C_p(\alpha\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, $P_\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ – нулевой функционал, и потому его носитель пуст (предложение 2.2). Так как при отображениях, сопряженных к гомеоморфизмам пространств функций, нулевой функционал переходит в нулевой функционал, это позволяет ниже не рассматривать функционал P_α и не следить за преобразованиями его носителя.

Ниже без изменений используются обозначения из предыдущего раздела.

Теорема 4.1. Функционал $u^*(P_1)$ не имеет конечного носителя.

Доказательство. Пусть, напротив, $K \subset \alpha\mathbb{N}$ – конечный носитель функционала $u^*(P_1)$. Тогда $K \setminus \{\alpha\}$ – конечное подмножество в $\mathbb{N} \cup \{0\}$, и потому существует натуральное число $n > 2$ такое, что $K \setminus \{\alpha\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Покажем, что условие 1 определения 2.1 не выполняется.

Пусть $\varepsilon = 1/2$. Рассмотрим последовательности $y^1, y^2 \in \mathbb{R} \times c_0$, совпадающие на множестве K , а именно

$$y^1 = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi a_n}{2a}, (0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots) \right), \quad y^2 = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi a_n}{2a}, (0, \dots, 0, a_n, 0, \dots) \right),$$

где нули в начале последовательностей повторяются $n-2$ раза. По определению отображений u, u_0 (см. предыдущий раздел)

$$u^*(P_1)(y^1) = P_1(v(u_0(y^1))) = P_1(v(a_n, 0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots)),$$

$$u^*(P_1)(y^2) = P_1(v(u_0(y^2))) = P_1(v(a_n, 0, \dots, 0, a_n, 0, \dots)).$$

Для последовательностей $x^1 = (a_n, 0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots)$, $x^2 = (a_n, 0, \dots, 0, a_n, 0, \dots)$ имеем $x^1, x^2 \in \overline{G_n} \subset G_{n+1}$, где $G_k = \{x \in c_0 : x_1 < a_k\}$. Поэтому ([1. Лемма 2])

$$v(x^1) = v_n(x^1) = u_n(v_{n-1}(x^1)), \quad v(x^2) = v_n(x^2) = u_n(v_{n-1}(x^2)). \quad (4.1)$$

Дальнейшее рассуждение распадается на n шагов, начиная с последовательностей x^1, x^2 . На j -м шаге ($j > 1$) рассматриваются последовательности, полученные на шаге $j-1$. По формуле (3.1) для них находим значения функций

z_j, t_j . Затем рассматриваем точки плоскости, определяемые 1-й и $j+1$ -й координатами этих последовательностей, и по формулам (3.2), (3.3) находим значения гомеоморфизма φ_{j,t_j} в этих точках плоскости. Наконец, по формуле (3.4) находим значения гомеоморфизма u_j (новые последовательности) и переходим к шагу $j+1$.

На первом шаге, по определению, $t_1(x^1) = t_1(x^2) = 1$. По формулам (3.3) получаем $\varphi_{1,1}(a_n, 0) = (a_n, a_n/2)$. Подставляя эти координаты в формулу (3.4), получим $u_1(x^1) = (a_n, a_n/2, 0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots)$. После $n-2$ -го шага, учитывая равенство $v_{n-2} = u_{n-2} \circ \dots \circ u_1$, можем записать

$$v_{n-2}(x^1) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, -(a+1), 0, \dots),$$

$$v_{n-2}(x^2) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots).$$

Применим теперь u_{n-1} . Так как $z_{n-1}(a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, -(a+1), 0, \dots) = z_{n-1}(v_{n-2}(x^1)) = a_n/2 = a_{(n-1)+1}/2$, то $t_{n-1}(v_{n-2}(x^1)) = 1$. Аналогично, из $z_{n-1} \times (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots) = a_n/2$ и формулы (3.1) следует, что $t_{n-1}(v_{n-2}(x^2)) = 1$. Поэтому $\varphi_{n-1,1}(a_n, -(a+1)) = (a+1, a_n/2)$, $\varphi_{n-1,1}(a_n, a_n) = (a_n, a_n)$ и, таким образом,

$$v_{n-1}(x^1) = u_{n-1}(v_{n-2}(x^1)) = (a+1, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n/2, 0, \dots),$$

$$v_{n-1}(x^2) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots) = v_{n-2}(x^2).$$

Далее, для $i=1, 2$ имеем $z_n(v_{n-1}(x^i)) = a_n/2 < a_{n+1}/2$, что влечет $t_n(v_{n-1}(x^i)) = 0$, а это, в свою очередь означает, что отображение u_n оставляет точки $v_{n-1}(x^i)$, $i=1, 2$, неподвижными:

$$v_n(x^i) = u_n(v_{n-1}(x^i)) = v_{n-1}(x^i), \quad i=1, 2.$$

Учитывая (4.1), заключаем, что

$$v(x^1) = v(u_0(y^1)) = u(y^1) = (a+1, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n/2, 0, \dots),$$

$$v(x^2) = v(u_0(y^2)) = u(y^2) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots).$$

Таким образом,

$$|u^*(P_1)(y^1) - u^*(P_1)(y^2)| = |P_1(u(y^1)) - P_1(u(y^2))| = a+1 - a_n > 1 > \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Следствие 4.2. Гомеоморфизм u не имеет свойства конечного носителя.

Доказательство. Утверждение прямо следует из определений 2.3, 2.4 и теоремы 4.1. $\blacksquare$

Следствие 4.2 означает, что ни один гомеоморфизм U_n не имеет свойства конечного носителя.

Следствие 4.3. Гомеоморфизм U не имеет свойства конечного носителя.

Доказательство. Определение отображения U позволяет без потери общности считать, что $1 \in N_1$. Следовательно, для $r \in s$ и $x \in c_0$ имеем

$$\begin{aligned} U^*(P_1)(r, x) &= P_1(U(r, x)) = P_1(U_1(r_1, x^1), U_2(r_2, x^2), \dots) = \\ &= P_1(U_1(r_1, x^1)) = U_1^*(P_1)(r_1, x^1). \end{aligned}$$

По теореме 4.1, функционал $U_1^*(P_1)$ не имеет конечного носителя, следовательно, таков же функционал $U^*(P_1)$. Осталось применить определения 2.3, 2.4. ■

Замечательно, что остальные функционалы $u^*(P_n)$, $n > 1$, имеют конечные носители. При установлении этого факта мы будем опираться на замечание 2.6.

Лемма 4.4. При $n > 1$ носитель функционала $u_{n-1}^*(P_n)$ содержится в множестве $K(n) = \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Достаточно показать, что множество $K(n) = \{1, \dots, n\}$ удовлетворяет условию 1 определения 2.1. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in c_0$. Так как функции $z_{n-1}: c_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $t_{n-1}: c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно зависят от координат $x_2, \dots, x_{n-1}$ точки x (см. разд. 3), то отображение $\varphi_{n-1, t_{n-1}}: c_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывно зависит от координат $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ этой точки (см. там же). Поэтому, существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x' \in W(x; 1, \dots, n; \delta)$ выполняется неравенство

$$\rho^+(\varphi_{n-1, t_{n-1}}(x')(x'_1, x'_n), \varphi_{n-1, t_{n-1}}(x)(x_1, x_n)) < \varepsilon.$$

Из формулы (3.4) теперь следует, что

$$\begin{aligned} |u_{n-1}^*(P_n)(x) - u_{n-1}^*(P_n)(x')| &= |P_n(u_{n-1}(x)) - P_n(u_{n-1}(x'))| = \\ &= |\varphi_{n-1, t_{n-1}}^2(x')(x'_1, x'_n) - \varphi_{n-1, t_{n-1}}^2(x)(x_1, x_n)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. ■

Доказательства следующих двух лемм аналогичны доказательству леммы 4.4, и поэтому опускаются.

Лемма 4.5. Носитель функционала $u_{n-1}^*(P_1)$ содержится в множестве $K(1) = \{1, n\}$.

Лемма 4.6. При любом n и при любом $i \neq 1$, $i \neq n+1$ носитель функционала $u_n^*(P_i)$ содержится в множестве $K(i) = \{i\}$.

Замечание 4.7. Можно доказать, что в леммах 4.2–4.5 носители функционалов равны указанным множествам.

Теорема 4.8. При $m > 1$ функционалы $v^*(P_m)$ имеют конечные носители.

Доказательство. Фиксируем произвольное $m > 1$. Согласно замечанию 2.6, достаточно указать конечное подмножество S в $\alpha\mathbb{N}$, содержащее носитель $v^*(P_m)$, т.е. удовлетворяющее условию 1 определения 2.1. По определению отображения v , для всякого $x \in c_0$, $v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \circ \dots \circ u_1)(x)$. Следо-

вательно, в силу непрерывности функционала P_m и определения гомеоморфизмов u_n при $n \geq m$, можем записать

$$\begin{aligned} v^*(P_m)(x) &= P_m(v(x)) = P_m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \circ \dots \circ u_1)(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_m((u_n \circ \dots \circ u_1)(x)) = \\ &= P_m((u_{m-1} \circ \dots \circ u_1)(x)) = u_1^*\left(\dots u_{m-1}^*(P_m)\right)(x), \end{aligned}$$

т.е. $v^*(P_m) = u_1^*\left(\dots u_{m-1}^*(P_m)\right)$. Таким образом, по лемме 4.4 и замечанию 2.6, достаточно рассмотреть функционалы $u_1^*\left(\dots u_{m-2}^*(P_k)\right)$, где $k=1, \dots, m$, и для каждого из этих функционалов указать конечное множество, удовлетворяющее условию 1 определения 2.1. Леммы 4.4–4.6 показывают, что на втором шаге рассуждения придется рассмотреть функционалы $u_1^*\left(\dots u_{m-3}^*(P_k)\right)$, где по-прежнему $k=1, \dots, m$. Леммы 4.4–4.6 гарантируют, что на следующих шагах набор функционалов $P_1, \dots, P_m$, к которым применяются сопряженные гомеоморфизмы, не изменится. Стало быть, по замечанию 2.6, носитель функционала $v^*(P_m)$ содержится в объединении (конечных) множеств, каждое из которых удовлетворяет условию 1 определения 2.1 для функционала $u_1^*(P_k)$, $k=1, \dots, m$. Снова по леммам 4.4–4.6 заключаем, что достаточно взять объединение носителей функционалов $P_1, \dots, P_m$. Таким образом, искомое множество – $S = \{1, \dots, m\}$. ■

Так как носители функционалов $u_0^*(P_k)$, $k=1, \dots, m$, в пространстве $\alpha\mathbb{N} \cup \{0\}$ отличаются от носителей $P_1, \dots, P_m$ в $\alpha\mathbb{N}$ самое большее присоединением точки 0, то получаем

Следствие 4.9. При $m > 1$ функционалы $u^*(P_m)$ имеют конечные носители.

5. Заключительные замечания

Итак, в предыдущем разделе мы установили, что гомеоморфизм Гулько–Хмылёвой не имеет свойства конечного носителя. Этот результат оставляет открытым следующий интересный

Вопрос 5.1. Пусть $u: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ – гомеоморфизм со свойством конечного носителя. Верно ли, что если пространство X компактно, то и Y компактно?

Список источников

1. Гулько С.П., Хмылёва Т.Е. Компактность не сохраняется отношением t -эквивалентности // Математические заметки. 1986. Т. 39, № 6. С. 895–903.
2. Успенский В.В. Характеризация компактности в терминах равномерной структуры в пространстве функций // Успехи математических наук. 1982. Т. 37, № 4 С. 183–184.
3. Lazarev V.R. On the weak finite support property of homeomorphisms of function spaces on ordinals // Topology and Its Applications. 2020. V. 275. Art. 107012. doi: 10.1016/j.topol.2019.107012

4. Engelking R. General Topology. Warszawa : PWN, 1977. 626 p.
5. Tkachuk V.V. A C_p -Theory Problem Book : Topological and Function Spaces. New York : Springer, 2011. xv, 485 p. (Problem Books in Mathematics).

References

1. Gul'ko S.P., Khmyleva T.E. (1986) Compactness is not preserved by the t -equivalence relation. *Mathematical Notes*. 39(6). pp. 484–488. DOI: 10.1007/BF01157037.
2. Uspenskii V.V. (1982) A characterization of compactness in terms of uniform structure in a function space. *Russian Mathematical Surveys*. 37(4). pp. 143–144.
3. Lazarev V.R. (2020) On the weak finite support property of homeomorphisms of function spaces on ordinals. *Topology and Its Applications*. 275. p. 107012. DOI: 10.1016/j.topol.2019.107012.
4. Engelking R. (1977) *General Topology*. Warsaw: PWN.
5. Tkachuk V.V. (2011) *A C_p -Theory Problem Book*. *Topological and Function Spaces*. New York: Springer.

Сведения об авторах:

Аметова Валерия Серверовна – студент механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ametovalera@gmail.com

Лазарев Вадим Ремирович – доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: lazarev@math.tsu.ru

Information about the authors:

Ametova Valerya S. (Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ametovalera@gmail.com

Lazarev Vadim R. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lazarev@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 13.07.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 13.07.2022; accepted for publication 01.12.2022