

Научная статья

УДК 517.956.35

MSC: 35L20, 35L72, 35D30

doi: 10.17223/19988621/80/2

О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений

Олег Людинович Бозиев

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-
Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, boziev@yandex.ru*

Аннотация. Устанавливаются априорные оценки решений одномерных неоднородных гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части, имеющей вид $a(s) = s^p$, при $p = 1, 0.5$ и -1 , с неоднородными начальными и однородными граничными условиями. Здесь s – интеграл по пространственной переменной от квадрата модуля производной решения уравнения по x . Приводятся примеры линеаризации нагруженных уравнений подстановкой правых частей оценок вместо $a(s)$.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, интегральная нагрузка, априорная оценка, линеаризация

Для цитирования: Бозиев О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 16–25. doi: 10.17223/19988621/80/2

Original article

On linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part using an a priori estimate of their solutions

Oleg L. Boziev

*Kabardino-Balkarian State University, Institute of Computer Science and Problems of Regional
Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences,
Nalchik, Russian Federation, boziev@yandex.ru*

Abstract. This article describes a method for the linearization of one-dimensional inhomogeneous hyperbolic equations with an integral load in the main part. The integral load here is a function $a(s)$, where s is the integral of the squared the modulus of the derivative of the solution of the equation in x over the spatial variable. It is noted that s is the norm

of the derivative of the desired solution in the Lebesgue space L_2 . This allows using an a priori estimate of the specified derivative to linearize the original loaded equation. To do this, the integral load $a(s)$ is replaced in the equation by the right side of the estimate established a priori. A priori estimates are established for the case of a linear function $a(s)$, as well as in two cases when $a(s)$ is not linear. In all cases, inhomogeneous initial and homogeneous boundary conditions of the second kind are considered. Examples of linearization of loaded equations by this method are given. The exact or approximate solution of the linearized equation found under the initial and boundary conditions of the loaded problem can be taken as an approximate solution of the original loaded equation.

Keywords: hyperbolic equation, integral load, a priori estimation, linearization

For citation: Bozиеv, O.L. (2022) On linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part using an a priori estimate of their solutions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 16–25. doi: 10.17223/19988621/80/2

Введение

Моделирование ряда физических, биологических, экологических процессов приводит к начально-краевым задачам для уравнений гиперболического типа, содержащих в главной части интегральную нагрузку, под которой понимается некоторая функция $a(s)$, содержащая интеграл некоторой степени искомого решения или его производной. Таким является, например, уравнение

$$u_{tt} - a(s)u_{xx} = 0, s = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx.$$

Одним из первых исследований этого уравнения была работа [1], в которой при $\Omega = [0, l]$ «указывается прием решения некоторых краевых задач при помощи бесконечных систем дифференциальных уравнений». К числу более поздних работ, связанных с данным уравнением, относятся [2, 3]. В статьях [4, 5] и других исследуются вопросы однозначной разрешимости начально-краевых задач в многомерном случае, при этом в [5] уравнение дополнено младшими членами, один из которых является нелинейным.

Многомерное неоднородное уравнение

$$u_{tt} - a(s)u_{xx} = f, s = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \Omega \subset R^n,$$

рассматривалось в работах [6, 7]. В настоящее время подобное уравнение с младшими членами интенсивно исследуется. Среди большого количества последних работ можно указать [8–10]. В этих и других источниках практически важные нагруженные уравнения содержат функцию $a(s)$, аргумент которой, как нетрудно заметить, представляет собой норму производной искомого решения в пространстве $L_2(\Omega)$. Это приводит к мысли о возможности использования априорной оценки производной решения задачи в указанной норме для линеаризации исходного уравнения. Такой подход был использован в [11, 12] и некоторых других работах автора, в которых интегральная нагрузка содержится в младших членах уравнения и является нормой его решения в пространстве $L_p(\Omega)$, $p > 3$.

Целью настоящей работы является установление априорных оценок второй смешанной задачи с однородными граничными условиями для неоднородного

гиперболического уравнения с интегральной нагрузкой в главной части. Рассматривается линейный случай $a(s) = s$, а также нелинейные случаи $a(s) = \sqrt{s}$ и $a(s) = s^{-1}$. Приводятся примеры, в которых с целью линеаризации первоначального уравнения интегральная нагрузка заменяется некоторой известной функцией от t , определяемой посредством правой части априорной оценки.

1. Линейная интегральная нагрузка $a(s) = s$

Рассмотрим уравнение с линейной интегральной нагрузкой

$$u_{tt} - \|u_x\|_{2,\Omega}^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (1)$$

в котором

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx = s, \quad \Omega = [0, l],$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$ является решением задачи (1), (2), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^4$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1) и функции u_t :

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = (f, u_t).$$

Для отдельных членов имеем

$$\begin{aligned} (u_{tt}, u_t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2, \quad (f, u_t) = \int_{\Omega} f u_t dx, \\ -(u_{xx}, u_t) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx + \int_{\Omega} u_x u_{tx} dx = -(u_x u_t)|_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u_x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^4.$$

Приведенные преобразования приводят к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^4 = \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое получаем

$$2\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x\|_{2,\Omega}^4 = 4 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + 2\|u_t(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^4.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и воспользуемся неравенством Коши с $\varepsilon = 0.5$:

$$4 \int_{\Omega} |f u_t| dx \leq 2 \left(\varepsilon \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) = \|f\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_t\|_{2,\Omega}^2,$$

что позволяет перейти к неравенству

$$2\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x\|_{2,\Omega}^4 \leq 2\int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 2\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4. \quad (3)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 0.5\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4.$$

Применяя к последнему одно из обобщений неравенства Гронуолла [13. С. 11], имеем

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 &\leq 0.5\int_0^t e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4\right)(e^t - 1) + \\ &+ 0.5\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 &\leq K_0(t), \\ K_0(t) &= 0.5\int_0^t \left(e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4\right)e^t. \end{aligned}$$

Возвращаясь к неравенству (3), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|_{2,\Omega}^2$ на $K_0(t)$. В результате получим оценку

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{2,\Omega}^4 &\leq K(t), \\ K(t) &= 2\int_0^t K_0(\tau) d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 2\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4, \end{aligned} \quad (4)$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 1 доказана.

Из (4) следует, что

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \sqrt{K(t)}.$$

Выбирая равенство в данном выражении, подставим его правую часть в (1) и получим линейное уравнение

$$u_{tt} - \sqrt{K(t)}u_{xx} = f(x, t). \quad (5)$$

Пример 1. Пусть в условиях (2)

$$l = 1, \quad \varphi_1(x) = x(x-1), \quad \varphi_2(x) = x, \quad f(x, t) = xt. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4 &= \left(\int_0^1 (2x-1)^2 dx\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau = \int_0^t \int_0^1 \tau^2 x^2 dx d\tau = \frac{t^3}{9}, \\ \int_0^t e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau &= \frac{1}{9} \left((t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + t^3 + 6 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$K_0(t) = \frac{1}{18} \left((t^3 - 3t^2 + 6t + 1)e^t + t^3 + 6 \right),$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = \frac{1}{18} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + 6t + 17 \right),$$

$$K(t) = \frac{1}{9} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24 \right).$$

Отметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$.

Подставляя в (5), переходим к линеаризованному уравнению

$$u_{tt} - \frac{1}{3} \sqrt{(t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24} u_{xx} = xt.$$

2. Нелинейная интегральная нагрузка $a(s) = \sqrt{s}$

При условиях (2) рассмотрим уравнение с нелинейной интегральной нагрузкой

$$u_{tt} - \|u_x\|_{2,\Omega} u_{xx} = f(x, t). \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$ является решением задачи (8), (2), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^3$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Запишем скалярное произведение (8) с u_t :

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

и заметим, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^3,$$

что приводит к соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^3 = \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Интегрирование последнего дает

$$3\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_x\|_{2,\Omega}^3 = 6 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + 3\|u_t(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^3.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с $\varepsilon = 0,5$:

$$6 \int_{\Omega} |f u_t| dx \leq 3 \left(\varepsilon \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) = 1.5 \|f\|_{2,\Omega}^2 + 3\|u_t\|_{2,\Omega}^2.$$

Это позволяет перейти к неравенству

$$3\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_x\|_{2,\Omega}^3 \leq 3 \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 1.5 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 3\|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + 2\|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^3. \quad (9)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 0.5 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{3} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3.$$

Применяя к последнему неравенство [13, С. 11], имеем

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq K_0(t).$$

$$K_0(t) = 0.5 \int_0^t \left(e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{3} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3 \right) e^t.$$

Возвращаясь к (9), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|_{2,\Omega}^2$ на $K_0(t)$. Это приводит к оценке

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^3 \leq K(t), \quad (10)$$

$$K(t) = 1.5 \left(\int_0^t \left(K_0(\tau) + 0.5 \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 \right) + \frac{2}{3} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3,$$

выполняющейся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 2 доказана.

Из (10) следует, что

$$\|u_x\|_{2,\Omega} \leq \sqrt[3]{K(t)}.$$

Выбор равенства в данном выражении позволяет перейти от (8) к линейному уравнению

$$u_{tt} - \sqrt[3]{K(t)} u_{xx} = f(x, t). \quad (11)$$

Пример 2. Пусть имеет место (6). Воспользовавшись (7), получаем

$$\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3 = \sqrt{27^{-1}} \approx 0.19245, \quad K_0(t) = \frac{1}{18} \left((t^3 - 3t^2 + 6t + 2.3094)e^t + t^3 + 6 \right),$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = \frac{1}{18} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 15.69)e^t + 0.25t^4 + 6t + 17 \right),$$

$$K(t) = \frac{1}{12} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 15.69)e^t + 0.25t^4 + 0.6667t^3 + 6t + 24.5396 \right).$$

Подстановка в (10) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - 0.4368 \sqrt[3]{(t^3 - 6t^2 + 18t - 15.69)e^t + 0.25t^4 + 0.6667t^3 + 6t + 24.5396} u_{xx} = xt.$$

3. Нелинейная интегральная нагрузка $a(s) = s^{-1}$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} u_{xx} = f(x, t). \quad (12)$$

Теорема 3. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, $\|u_x\|_{2,\Omega}^2 > 0$, является решением задачи (12), (2). Пусть, кроме того, $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, $\|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2 > 0$.

Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Заметим, что в скалярном произведении (12) и функции u_t

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

имеет место равенство

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \frac{d}{dt} \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Это позволяет записать уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^4.$$

Применяя неравенство Коши, перейдем к неравенству

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2. \quad (13)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^2.$$

Очередное применение неравенства [13. С. 11] дает

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int_0^t \left(e^{\tau} \int_0^{\tau} \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^2 \right) e^t.$$

Возвращаясь к (13), опустим в левой части член $\|u_t\|_{2,\Omega}^2$, а в правой части заменим его на $K_0(t)$. В результате получим соотношение

$$\ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t K_0(\tau) d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2.$$

Из него следует оценка

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq K(t), \quad (14)$$

$$K(t) = \exp \left(\int_0^t \left(K_0(\tau) + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2 \right),$$

выполняющаяся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 3 доказана.

Выберем в (14) верхнюю границу оценки и подставим в (12), получим

$$u_{tt} - K^{-1}(t) u_{xx} = f(x, t). \quad (15)$$

Пример 3. Пусть имеет место (6). С помощью (7) имеем

$$\ln \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^2 = -1.0986, \quad K_0(t) = \frac{1}{9} \left((t^3 - 3t^2 + 6t - 12.8875)e^t + t^3 + 6 \right),$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = \frac{1}{9} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 30.8875)e^t + 0.25t^4 + 6t + 24.8875 \right),$$

$$K(t) = \frac{1}{9} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24.1222 \right).$$

Отметим, что $K(t) \neq 0$ при $t \geq 0$.

Подстановка в (15) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - 9 \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24.1222 \right)^{-1} u_{xx} = xt.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки (4), (10) и (14) производных решений начально-краевых задач для одномерных неоднородных уравнений гиперболического типа с интегральной нагрузкой $a(s) = s^p$ в главной части при $p = 1, 0,5$ и -1 соответственно. Во всех случаях граничные условия второго рода являются однородными. Полученные оценки предназначены для линеаризации первоначальных уравнений путем замены интегральной нагрузки некоторыми функциями от t , полученными из правых частей соответствующих оценок. Данный способ линеаризации позволяет аппроксимировать исходное нагруженное уравнение ассоциированным с ним линейным уравнением с сохранением в основном физического смысла процесса, моделируемого нагруженным уравнением. Точное или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальных и граничных условиях, можно принять за приближенное решение исходного нагруженного уравнения. Это решение также может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Список источников

1. Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1940. Вып. 1. С. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars // J. Appl. Mech. 1950. № 17. P. 35–36.
3. Dickey R.W. Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. № 23. P. 459–468.
4. Crippa H.R. On local solutions of some mildly degenerate Hyperbolic equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1993. V. 21 (8). P. 565–574.
5. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary // Differential and Integral Equations. 2011. V. 24 (11/12). P. 1001–1020.
6. Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 1975. Т. 96 (138), № 1. С. 152–166.
7. Похожаев С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 101–108.
8. Nishihara K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. V. 8 (6). P. 623–636.

9. Ngoc L.T.P., Long N.T. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions // *Acta Appl Math.* 2010. V. 112. P. 137–169. doi: 10.1007/s10440-009-9555-9
10. Ono K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in Bounded Domains // *J. Math. Tokushima Univ.* 2021. V. 55. P. 11–18.
11. Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // *Вестник Южноуральского государственного университета. Сер. Математика, физика, механика.* 2016. Т. 8, № 2. С. 14–18. doi: 10.14529/mmph160202
12. Бозиев О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2018. № 51. С. 5–14. doi: 10.17223/19988621/51/1
13. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М. : Наука, 1976. 151 с.

References

1. Bernshtein S.N. (1940) Ob odnom klasse funktsional'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi [On a class of partial differential functional equations]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [News of the USSR Academy of Sciences. Mathematical series]. 4(1). pp. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. (1950) The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers.* 17. pp. 35–36.
3. Dickey R.W. (1969) Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 23(3). pp. 459–468.
4. Crippa H.R. (1993) On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 21(8). pp. 565–574.
5. Frota C. L., Medeiros L.A., Vicente A. (2011) Wave equation in domains with non-locally reacting boundary. *Differential and Integral Equations.* 24(11/12). pp. 1001–1020.
6. Pokhozhaev S.I. (1975) Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy [On a class of quasi-linear hyperbolic equations]. *Matematicheskii Sbornik* [Mathematical collection]. 138(1). pp. 152–166.
7. Pokhozhaev S.I. (1985) Ob odnom kvazilineynom giperbolicheskom uravnenii Kirkgofa [On a quasi-linear hyperbolic Kirchhoff equation] *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential equations]. 21(1). pp. 101–108.
8. Nishihara K. (1984) Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 8(6). pp. 623–636.
9. Ngoc L.T.P., Long N.T. (2010). Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions. *Acta Applicandae Mathematicae.* 112. pp. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
10. Ono K. (2021) Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains. *Journal of Mathematics, Tokushima University.* 55. pp. 11–18.
11. Boziev O.L. (2016) Priblizhennoye resheniye nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya s odnorodnymi kravevymi usloviyami [Approximate solution of a loaded hyperbolic equation with homogeneous boundary conditions]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika» – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics.* 8(2). pp. 14–18. DOI: 10.14529/mmph160202.
12. Boziev O.L. (2019) Resheniye nelineynogo giperbolicheskogo uravneniya priblizhenno-analiticheskim metodom [Solution of nonlinear hyperbolic equations by an approximate analytical method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika –*

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 51. pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/51/1.

13. Filatov A.N., Sharova L.V. (1976) *Integral'nyye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* [Integral inequalities and theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности Института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова; старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия. E-mail: boziev@yandex.ru

Information about the author:

Boziev Oleg L. (Candidate of in Physical and Mathematical sciences, associate professor at the Computer Technologies and Information Security Department, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University; senior staff scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management, Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation). E-mail: boziev@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15.05.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 15.05.2022; accepted for publication 01.12.2022