

Научная статья

УДК 519.21

doi: 10.17223/19988605/61/7

Оценка длительности мертвого времени в обобщенном МАР-потоке событий с двумя состояниями

Анастасия Владимировна Кеба¹, Людмила Алексеевна Нежелская²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ mir.na.mig7@mail.ru

² ludne@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача оценки длительности мертвого времени в обобщенном МАР-потоке событий (Markovian Arrival Process) с двумя состояниями методом моментов в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Приводятся явные виды плотностей вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока в случае коррелированного и рекуррентного задания потоков. Формулируется алгоритм вычисления оценки периода ненаблюдаемости. Приводятся численные результаты расчетов оценок, полученных с использованием имитационной модели потока, и их анализ.

Ключевые слова: обобщенный МАР-поток событий; плотность вероятности длительности интервала между моментами наступления соседних событий; метод моментов; оценка непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности; условия рекуррентности потока

Для цитирования: Кеба А.В., Нежелская Л.А. Оценка длительности мертвого времени в обобщенном МАР-потоке событий с двумя состояниями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 69–80. doi: 10.17223/19988605/61/7

Original article

doi: 10.17223/19988605/61/7

Estimation of dead time duration in generalized MAP with two states

Anastasiya V. Keba¹, Ludmila A. Nezhel'skaya²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ mir.na.mig7@mail.ru

² ludne@mail.ru

Abstract. The paper deals with a generalized MAP with two states under conditions of partial observability (unextendable dead time of a fixed duration T). The accompanying random process $\lambda(t)$ of the flow is an unobservable piecewise constant process with n states: $S_1, \dots, S_n$. The process $\lambda(t)$ is unobservable in principle, the moments of occurrence of events $t_1, t_2, \dots$ are observable.

We denote $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$, is the value of the k th interval duration between events of the observed flow t_k and t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$. Due to the fact that the flow operates in a stationary mode, then for the probability density of values τ_k it is true $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau_k \geq 0$, for any $k \geq 1$. This allows, without loss of generality, to set the moment of occurrence of the event t_k equal to zero or, which is the same, the moment the event occurs is $\tau = 0$.

It is necessary to use the method of moments to estimate the parameter T in generalized MAP with two states (we assume $n = 2$) at an arbitrary time instant τ , provided that the realization of the time intervals between events $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ is known of the observed flow on the interval $(0, t)$, where $t = 0$ is the moment of occurrence of the event, τ is the end of observation, m is the number of observed events over the time interval $(0, t)$. It is assumed that $\lambda(t)$ is stationary. The estimation of the parameter T is carried out both in the correlated case of setting the flow under study, and in the recurrent one, the recurrence condition is determined from the analytical expression of the joint probability density $p_T(\tau_1, \tau_2)$ of the duration of two adjacent intervals between the moments of the occurrence of events.

In the paper we present an explicit form of the probability density parameters of the interval duration between events in generalized MAP with two states in the case of correlated and recurrent flows specification. The method of moments is used to find estimate of the duration of the unobservable period T . The algorithm were implemented by C# programming language in the Visual Studio 2015. Statistical experiments were conducted on the simulation model of the flow in order to establish the quality of the results obtained by evaluating the duration of the dead time T . The numerical results of these experiments are given in the paper and illustrate an acceptable estimate that does not contradict the physical interpretation.

Keywords: generalized MAP; probability density of the values of the interval duration between the moments of the events occurrence; method of moments; estimation of unextendible dead time of a fixed duration; flow recurrence conditions

For citation: Keba, A.V., Nezhel'skaya, L.A. (2022) Estimation of dead time duration in generalized MAP with two states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 69–80. doi: 10.17223/19988605/61/7

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий [1–3]. Изучаемый поток представляет собой адекватную математическую модель реальных потоков случайных событий в телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи и глобальных компьютерных сетях; сопровождающий процесс потока есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [4–7].

В реальных ситуациях параметры, определяющие поток событий, либо известны частично, либо вообще неизвестны, либо изменяются со временем. Поэтому при анализе дважды стохастических потоков событий выделяют два основных класса задач, базой для которых служат моменты времени наступления событий в потоке: 1) оценивание состояний потока событий [8–11]; 2) оценивание параметров потока [12–15]. Задача, решаемая в настоящей статье, относится ко второму классу задач.

При решении перечисленных задач следует учитывать возможные искажающие факторы, существенно влияющие на качество оценивания. Одним из таких факторов является мертвое время регистрирующих приборов [16–18], порождаемое каждым зарегистрированным событием: последующие события исходного потока, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны для наблюдения. Такой эффект характерен для большинства реальных систем. Предполагается, что период ненаблюдаемости потока имеет фиксированную длительность T [19].

В данной работе осуществляется исследование обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями в условиях частичной наблюдаемости. В общем случае дважды стохастические потоки событий, в том числе и рассматриваемый обобщенный МАР-поток, являются коррелированными потоками; в работе на основании явного вида совместной плотности вероятности двух смежных интервалов между моментами наступления событий выписываются условия рекуррентности рассматриваемого потока. Предлагается явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления событий потока в случае как коррелированного, так и рекуррентного задания потоков. Приводятся численные результаты оценивания периода ненаблюдаемости соседних событий исследуемого потока. Данная статья является непосредственным развитием работ [20–22].

1. Постановка задачи

Исследуется обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний (далее – поток), функционирующий в установившемся (стационарном) режиме. Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ изучаемого потока представляет собой кусочно-постоянный принципиально ненаблюдаемый процесс с n состояниями: $S_1, \dots, S_n$. Полагается, что при $\lambda(t) = \lambda_i$ имеет место i -е состояние (S_i), $i = \overline{1, n}$, процесса $\lambda(t)$. При этом $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$. Наблюдаемыми являются моменты времени наступления событий потока $t_1, t_2, \dots$

Функция распределения случайной величины – длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i – является экспоненциальной: $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. В момент окончания состояния S_i

процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j с вероятностью $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$ с наступлением события потока или с вероятностью $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$ без наступления события потока, $i, j = \overline{1, n}$. Отметим, что для введенных вероятностей справедливо $\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j|\lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 1, i = \overline{1, n}$.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик [19] процесса $\lambda(t)$ имеет вид $\mathbf{D} = \|\mathbf{D}_0|\mathbf{D}_1\|$:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_1(1-P_0(\lambda_1|\lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -\lambda_2(1-P_0(\lambda_2|\lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n|\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1-P_0(\lambda_n|\lambda_n)) \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n|\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n|\lambda_n) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Каждое зарегистрированное событие потока создает период ненаблюдаемости фиксированной длительности (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны для наблюдения (теряются); кроме того, события, наступившие в течение периода мертвого времени, не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Первое наступившее после периода мертвого времени событие потока снова создает период мертвого времени длительности T и т.д.

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена одна из реализаций процесса $\lambda(t)$ и наблюдаемого потока, где λ_i – значение процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i , $i = \overline{1, n}$; штриховкой обозначены периоды мертвого времени; события обобщенного MAP-потока, недоступные наблюдению, отмечены черными кружками; $t_1, t_2, \dots$ – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке.

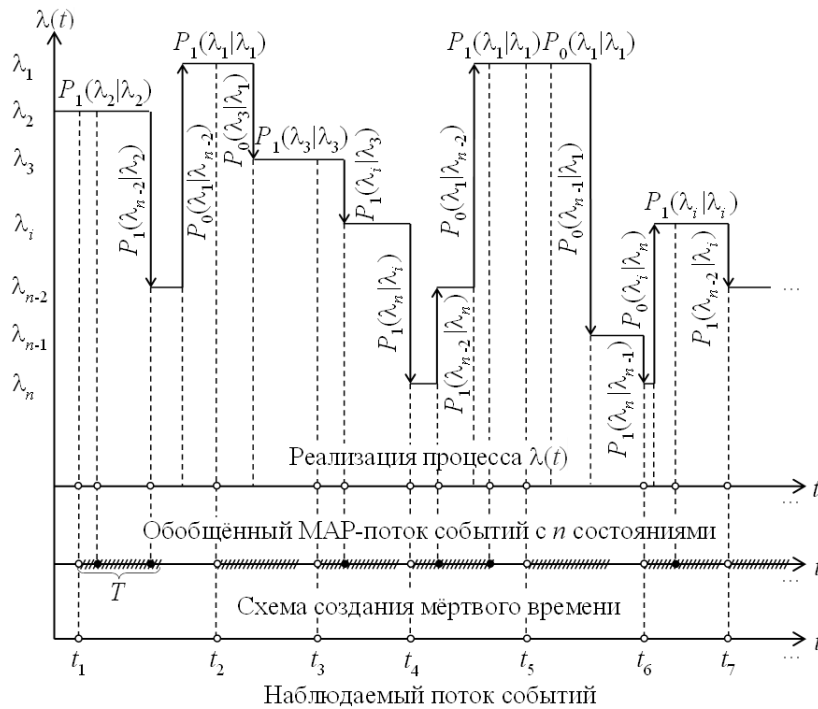


Рис. 1. Реализация обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени длительности T

Fig. 1. Realization of Generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendible dead time of duration T

Замечание 1. Введение вероятности $P_0(\lambda_i|\lambda_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_i без наступления события приводит к обобщению классического МАР-потока с произвольным числом состояний.

Утверждение 1. Для обобщенного МАР-потока событий с n состояниями процесс $\lambda(t)$ является скрытым марковским процессом.

Цель работы заключается в решении задачи оценивания периода ненаблюдаемости для случая как коррелированного, так и для рекуррентного задания обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями и в анализе полученных оценок. Оценка находится методом моментов на основании полученной при имитационном моделировании потока выборки последовательных моментов наступления событий $t_1, \dots, t_m$, на интервале наблюдения $(0, t)$; $0 < t_1 < \dots < t_m < t$.

2. Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в коррелированном обобщенном МАР-потоке при неполной наблюдаемости

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$. Для плотности вероятности значений τ_k вследствие функционирования потока в стационарном режиме справедливо $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, при любом $k \geq 1$, что позволяет без ограничения общности положить момент наступления события t_k равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Утверждение 2. Последовательность $t_1, t_2, \dots$ порождает вложенную по моментам времени наступления событий цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$.

Теорема 1. В обобщенном МАР-потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени, плотность вероятности $p_T(\tau)$ длительности интервала между соседними событиями имеет вид:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = \frac{z_2 - \lambda_1 \pi_1(T) [P_1(\lambda_1|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(T) [P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)]}{z_2 - z_1},$$

$$\pi_i(T) = \pi_i - [\pi_i - \pi_i(0|T)] e^{-aT}, \quad i = 1, 2,$$

$$z_{1,2} = \frac{\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) \mp \sqrt{D}}{2},$$

$$D = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2))]^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2),$$

$$0 < z_1 < z_2,$$

где условные стационарные вероятности $\pi_i(0|T)$ того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии S_i , $i = 1, 2$, при условии, что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности T , определяются выражениями

$$\pi_1(0|T) = \frac{p_{21} + \pi_1(p_{11} - p_{21})(1 - e^{-aT})}{p_{12} + p_{21} + (p_{22} - p_{12})(1 - e^{-aT})}, \quad \pi_2(0|T) = \frac{p_{12} + \pi_2(p_{22} - p_{12})(1 - e^{-aT})}{p_{12} + p_{21} + (p_{22} - p_{12})(1 - e^{-aT})},$$

вероятности перехода p_{ij} , $i, j = 1, 2$, представляются в виде

$$p_{li} = \frac{P_1(\lambda_i|\lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) + P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_1(\lambda_i|\lambda_2)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}, \quad (2)$$

$$p_{2i} = \frac{P_1(\lambda_i|\lambda_2)(1-P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_i|\lambda_1)}{(1-P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1-P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)},$$

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1, i=1,2;$$

априорные финальные вероятности π_i состояний S_i , $i=1,2$, и величина a равны соответственно

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2(P_0(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_1|\lambda_2))}{a}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1(P_0(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_1))}{a}, \quad \sum_{i=1}^2 \pi_i = 1, \quad (3)$$

$$a = \lambda_1(P_0(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_1)) + \lambda_2(P_0(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_1|\lambda_2)).$$

Доказательство основано на применении свойств вложенной цепи Маркова и здесь не приводится ввиду громоздкости выкладок.

3. Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном МАР-потоке при неполной наблюдаемости

Пусть (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала, длительности которых есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ и $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ соответственно, $\tau_k, \tau_{k+1} \geq 0$; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k=1$, будем рассматривать два соседних интервала (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$ и $\tau_2 = t_3 - t_2$, $\tau_1, \tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, а $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. С учетом функционирования потока в условиях непродлевающегося мертвого времени длительности двух смежных интервалов есть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$, где $t^{(l)}$ – значение длительности интервала между соответствующими моментом окончания мертвого времени и моментом наступления следующего события наблюдаемого потока, $t^{(l)} > 0$, $l=1,2$. Совместная плотность вероятности при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1, \tau_2 \geq 0$.

Теорема 2. В обобщенном МАР-потоке в условиях неполной наблюдаемости (при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности) совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ двух соседних интервалов имеет вид:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0, \\ 0, & \tau_1 \geq 0, 0 \leq \tau_2 < T, \\ p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{z_1z_2}\gamma(T)(1-\gamma(T))e^{-aT} \times \\ \times [P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)] \times & \tau_1, \tau_2 \geq T, \\ \times \left(z_1 e^{-z_1(t^{(1)}-T)} - z_2 e^{-z_2(t^{(1)}-T)} \right) \left(z_1 e^{-z_1(t^{(2)}-T)} - z_2 e^{-z_2(t^{(2)}-T)} \right), & \end{cases} \quad (4)$$

где $\gamma(T)$, z_1, z_2 , $p_T(\tau_k)$, $k=1,2$, (при $\tau = \tau_k$) определены в (1); величина a определена в (3).

Доказательство здесь не приводится вследствие громоздкости выкладок.

На основании полученной аналитической формулы (4) совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ выпишем условие рекуррентности: $P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1) = 0$. Тогда выражение для плотности вероятности $p_T(\tau)$ длительности интервала между соседними событиями в (1) преобразуется к виду:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = \frac{z_2 - \lambda_1 \pi_1(T) [P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(T) [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)]}{z_2 - z_1}, \quad (5)$$

$$\pi_i(T) = \pi_i - [\pi_i - p_{ji}] e^{-aT}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

где z_1, z_2 определены в (1), вероятности перехода p_{ij} , $i, j = 1, 2$, – в (2), величины π_i , $i = 1, 2$, a – в (3).

Два другие условия рекуррентности, вытекающие из выражения $\gamma(T)(1-\gamma(T)) = 0$, далее не рассматриваются, так как при их выполнении обобщенный МАР-поток событий становится простейшим.

4. Уравнения моментов и результаты численных расчетов

Для оценки параметра потока – длительности мертвого времени – используется метод моментов. Введем в рассмотрение выборку $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ из распределения $p_T(\tau) = \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}$, $\tau \geq 0$, зависящего от неизвестного параметра T . В силу близости теоретической и эмпирической функций распределения, т.е. неограниченного сближения их значений при $n \rightarrow \infty$, следует ожидать близости их числовых характеристик – моментов одного и того же порядка. Теоретический начальный момент 1-го порядка $M_T \tau = \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau$ близок к соответствующему выборочному моменту – статисти

стистике $C_1 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – значение длительности между моментами t_k и t_{k+1} наступления событий в обобщенном МАР-потоке событий. Таким образом, для оценки параметра T необходимо иметь уравнение моментов вида:

$$M_T \tau = C_1. \quad (6)$$

Выполняя интегрирование левой части (6), находим

$$M_T \tau = \int_T^\infty \tau (\gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}) d\tau = T + \frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1-\gamma(T)}{z_2} = C_1,$$

где $\gamma(T)$ определена в (1) для коррелированного обобщенного МАР-потока, в (5) – для рекуррентного обобщенного МАР-потока.

Подчеркнем, что решение уравнений моментов возможно только численно; в данной работе решения уравнений моментов находятся с применением метода простой итерации.

Отметим, что при выбранных параметрах коррелированного либо рекуррентного потоков, как показывают результаты численных экспериментов, приведенные ниже, математическое ожидание $M_T \tau$ есть возрастающая функция переменной (параметра) T , $T > 0$. Вследствие этого каждое из уравнений моментов имеет единственное решение.

С целью получения численных результатов разработан алгоритм вычисления оценки $\hat{T}$ (решение уравнения моментов (6)) и построена имитационная модель обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями в условиях непродлевающегося мертвого времени. Основой имитационной модели являются датчики псевдослучайных чисел и метод обратных функций [23]. На первом этапе расчета осуществляется имитационное моделирование обобщенного МАР-потока события с двумя состояниями с тем, чтобы получить статистику C_1 на основе выборки моментов времени наступления событий $t_1, \dots, t_m$. На втором этапе расчета вычисляется оценка $\hat{T}$.

Для каждой реализации найдены оценки $\hat{T}^{(v)}$, $v = \overline{1, N}$, на основании которых вычислены выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \hat{T}^{(v)}$ и выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (\hat{T}^{(v)} - \hat{T})^2$.

В первом и втором экспериментах будем рассматривать случай коррелированного задания потока, а в эксперименте 3 исследуем влияние времени моделирования на оценку периода ненаблюдаемости в случае рекуррентного задания потока; условие рекуррентности при этом определено как $P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1) = 0$.

Эксперимент 1. Фиксируются число состояний $n = 2$, количество опытов (реализаций) $N = 1\,000$, длительность мертвого времени $T = 1$, значения $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 10$ процесса $\lambda(t)$ и переходные вероятности, представленные в табл. 1.

Целью данного эксперимента является нахождение временного интервала установления стационарного режима функционирования обобщенного МАР-потока события с двумя состояниями в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности в случае задания параметров для коррелированного потока или, иными словами, установление зависимостей $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T})$ от длительности времени моделирования T_m , где $T_m \in \{100; 200; \dots; 1\,500\}$.

Результаты первого статистического эксперимента представлены в табл. 2 и на рис. 2.

Таблица 1

Значения переходных вероятностей коррелированного обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями в рамках 1-го и 2-го статистических экспериментов

$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,05$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,05$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,05$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,05$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,15$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,75$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,75$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,15$

Таблица 2

Результаты 1-го статистического эксперимента

T_m	100	200	300	400	500
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9445	0,9497	0,9515	0,9523	0,9529
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	29,8556	24,3601	22,6321	21,8365	21,3135
T_m	600	700	800	900	1 000
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9531	0,9534	0,9536	0,9538	0,9539
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	21,0447	20,7491	20,6081	20,4755	20,3541
T_m	1 100	1 200	1 300	1 400	1 500
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9540	0,9541	0,9541	0,9542	0,9542
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	20,2591	20,1868	20,1356	20,0653	20,0202

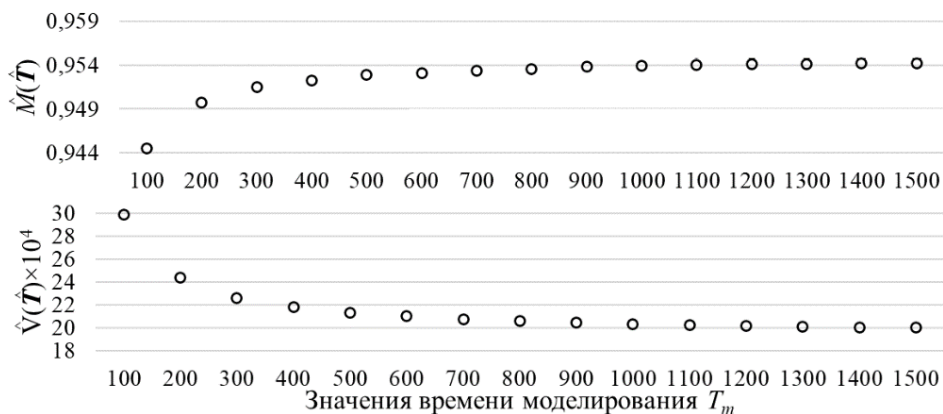


Рис. 2. График зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$ от значения T_m

Fig. 2. $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$ as functions of T_m

Из анализа численных результатов, приведенных на рис. 2, следует, что имеет место смещение оценок относительно исходных значений оцениваемых параметров, однако вариация стремится к близкому к нулю числу, т.е. методика оценивания качественна, и полученную оценку можно принимать за истинную с достаточно малой погрешностью. Анализ представленных в табл. 2 результатов эксперимента приводит к утверждению о зависимости получаемых оценок от времени моделирования, а именно: с увеличением значения T_m выборочные средние и выборочная вариация стабилизируются при $T_m \geq 500$, что объясняется концепцией метода моментов.

Эксперимент 2. Фиксируются число состояний $n = 2$, количество опытов $N = 1\,000$, значение времени моделирования $T_m = 1\,000$, значения $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 10$ процесса $\lambda(t)$ и переходные вероятности, представленные в табл. 1.

В рамках эксперимента исследуются зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T})$ от изменения длительности мертвого времени T , где $T \in \{0,5; 0,6; \dots; 1,9\}$.

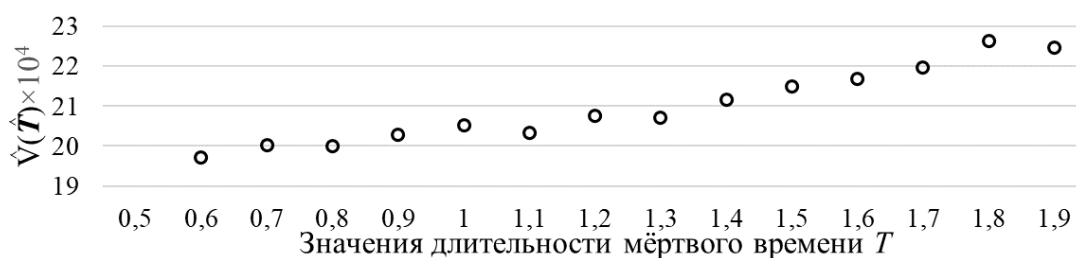
Результаты второго статистического эксперимента представлены в табл. 3 и на рис. 3.

Результаты табл. 3 указывают на то, что увеличение длительности мертвого времени T влечет увеличение выборочной вариации оценки. Это объясняется тем, что при увеличении значения T увеличивается период ненаблюдаемости потока, что приводит к увеличению числа потерянных событий и, как следствие, к ухудшению качества оценивания. Оценки также получаются смещенными, о чем свидетельствуют полученные результаты для $\hat{M}(\hat{T})$.

Таблица 3

Результаты 2-го статистического эксперимента

T	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\hat{M}(\hat{T})$	0,4551	0,5547	0,6546	0,7542	0,8538
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	19,7215	20,0124	19,9936	20,2736	20,5286
T	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9539	1,0533	1,1533	1,2527	1,3523
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	20,3396	20,7526	20,7149	21,1622	21,4898
T	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\hat{M}(\hat{T})$	1,4521	1,5515	1,6507	1,7508	1,8505
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	21,6761	21,9654	22,6457	22,4818	22,7099

Рис. 3. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$ от значения T Fig. 3. $\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$ as functions of T

Замечание 2. В случае коррелированного задания обобщенного МАР-потока событий говорить о состоятельности получаемых методом моментов оценок не представляется возможным [24, 25].

Эксперимент 3. Фиксируются число состояний $n = 2$, количество опытов $N = 1\,000$, длительность мертвого времени $T = 1$, значения $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 10$ процесса $\lambda(t)$ и переходные вероятности, представленные в табл. 4. Значения длительности моделирования T_m изменяются в диапазоне $T_m \in \{100; 200; \dots; 1\,500\}$.

Результаты третьего статистического эксперимента представлены в табл. 5 и на рис. 4.

Таблица 4

Значения переходных вероятностей рекуррентного обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями в рамках 3-го статистического эксперимента

$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,05$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,05$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,05$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,05$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,45$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,45$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,45$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,45$

Таблица 5

Результаты 3-го статистического эксперимента

T_m	100	200	300	400	500
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9451	0,9504	0,9521	0,9529	0,9535
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	29,1964	23,7264	22,0135	21,2357	20,7416
T_m	600	700	800	900	1 000
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9538	0,9541	0,9543	0,9544	0,9545
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	20,3976	20,1648	19,9875	19,8844	19,7622
T_m	1100	1200	1300	1400	1500
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9546	0,9547	0,9548	0,9548	0,9549
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$	19,6881	19,5981	19,5555	19,4938	19,4513

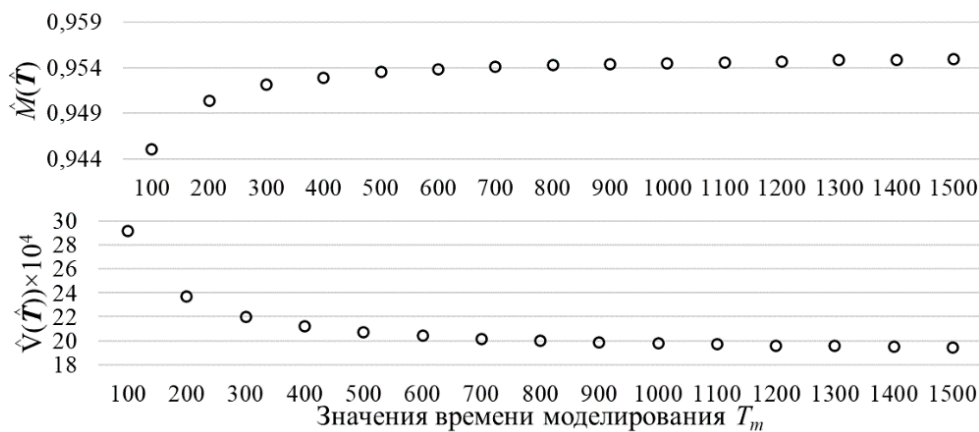


Рис. 4. График зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$ от значения T_m

Fig. 4. $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T}) \times 10^4$ as functions of T_m

Из графика, приведенного на рис. 4, следует, что стационарный режим функционирования наблюдаемого потока устанавливается при $T_m \geq 500$. Полученные оценки параметра T являются смещенными.

Замечание 3. В случае рекуррентного задания обобщенного МАР-потока событий оценки являются состоятельными, так как последовательность $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ представляет собой взаимно независимые случайные величины, конечный теоретический момент $M_T \tau$ существует, и уравнение моментов (6) имеет единственное решение [25].

Заключение

В данной статье рассмотрен коррелированный и рекуррентный обобщенный МАР-поток событий с двумя состояниями в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T . Приведены явные виды плотностей вероятности значений длительности интервала между

соседними событиями обобщенного MAP-потока событий для коррелированного (1) и рекуррентного (5) случаев задания потоков. Методом моментов найдена оценка параметра $\hat{T}$. Алгоритм вычисления оценки реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2015. Проведены статистические эксперименты, указывающие на работоспособность алгоритма оценки параметра T и приемлемое качество получаемых оценок.

Список источников

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
2. Cox D.R., Miller H.D. The theory of stochastic processes. New York : Wiley, 1965. 398 p.
3. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1976. 240 p.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // *Journal of Applied Probability*. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применения в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
8. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
9. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 269. С. 95–98.
10. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 1 (10). С. 33–47.
11. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event of flow of the second order under its complete observability // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 912. P. 93–105.
12. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Оценка параметров мультипликативных распределений сетей массового обслуживания // *Проблемы передачи информации*. 2009. Т. 45, № 4. С. 115–120.
13. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 2009. V. 17 (4). P. 1326–1339.
14. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1993. V. 48 (10). P. 40–45.
15. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1992. V. 47 (1). P. 33–38.
16. Normey-Rico J.E. Control of dead-time processes // *Advanced textbooks in control and signal processing*. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
17. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 2. 752 с.
19. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // *Вестник Томского государственного университета*. 2004. № 284. С. 137–145.
20. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени // *Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы XIII Междунар. конф., 7 – 9 сентября 2020. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та*, 2020. С. 85–86.
21. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2021. № 56. С. 68–80.
22. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятности длительностей интервалов обобщенного MAP-потока событий при его неполной наблюдаемости и условия рекуррентности потока // *Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая*. 2022. Т. 307. С. 27–33.
23. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.
24. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
25. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГТУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.

References

1. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
2. Cox, D.R. & Miller, H.D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*. New York: Wiley.
3. Grandell, J. (1976) *Doubly Stochastic Poisson Processes*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
7. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic Systems with Correlated Flows. Theory and Application in Telecommunication Networks]. Moscow: Tekhnosfera.
8. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
9. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal state estimation of the semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
10. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) The optimal evaluation of states of the integrated asynchronous doubly stochastic event flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33–47.
11. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_8
12. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2009) Parameter estimation for product-form distributions of queueing networks. *Problemy Peredachi Informatsii – Problems of Information Transmission*. 45(4). pp. 115–120.
13. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750
14. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45.
15. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
16. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of Dead-Time Processes*. London: Springer-Verlag.
17. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54–63.
18. Feller, V. (1967) *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [Introduction to the Theory of Probability and its Applications]. Vol. 2. Translated from English. Moscow: Mir.
19. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Estimating dead time and parameters of an asynchronous elternating event flow with triggering an extra event. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137–145.
20. Keba, A.V. & Nezhelskaya, L.A. (2020) Statisticheskie eksperimenty na imitatsionnoy modeli obobshchennogo MAP-potoka sobytiy s proizvol'nym chislom sostoyaniy v usloviyakh neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni [Statistical experiments on a simulation model of a generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendable dead time]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur* [New information technologies in the study of complex structures]. Proc. of the 13th International Conference. Tomsk: Tomsk State University. pp. 85–86.
21. Keba, A.V. & Nezhelskaya, L.A. (2021) Optimal state estimation of generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendable dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 56. pp. 68–80. DOI: 10.17223/19988605/56/8
22. Keba, A.V. & Nezhelskaya, L.A. (2022) Sovmestnaya plotnost' veroyatnosti dlitel'nostey intervalov obobshchennogo MAP-potoka sobytiy pri ego nepolnoy nablyudaemosti i usloviya rekurrentnosti potoka [The joint probability density of interval durations of a generalized MAP with its incomplete observability and flow recurrence conditions]. In: Smyrin, I.S. (ed.) *Mathematical and software informational, technical and economic systems*. Vol. 307. Tomsk: Tomsk State University. pp. 27–33.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical Methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.
24. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Vol. 1. Tomsk: NTL.
25. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.

Информация об авторах:

Кеба Анастасия Владимировна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

Нежелская Людмила Алексеевна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ludne@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Keba Anastasia V. (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

Nezheľ'skaya Lyudmila A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ludne@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 05.07.2022; принята к публикации 29.11.2022

Received 05.07.2022; accepted for publication 29.11.2022