ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Управление, вычислительная техника и информатика № 61
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Научная статья
УДК 519.233.22
doi: 10.17223/19988605/61/10

Перечисление симметричных ожерелий

Юрий Дмитриевич Григорьев

Государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Россия, yuri_grigoriev@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача перечисления симметричных ожерелий. С помощью разработанного алгоритма множество ожерелий с заданными распределениями бусин и заданной длины расщепляется на множества симметричных и несимметричных ожерелий. Рассматриваются зеркальная симметрия и ее модификации – ахиральная и хиральная. Вводится классификация ожерелий по типам и классам симметрии. Уточняются результаты Яковенко для подсчета мощности классов симметрии. Рассматриваются приложения полученной классификации к анализу восьмистиший – ожерелий длины 8, среди которых выделяются твердые формы – триолет, сицилиана, октава и другие, а также иные симметричные восьмистишные строфы, встречающиеся в практике стихосложения.

Ключевые слова: ожерелье; перечисление симметричных ожерелий; группа симметрий; строфа

***Для цитирования*:** Григорьев Ю.Д. Перечисление симметричных ожерелий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 97–107. doi: 10.17223/19988605/61/10

Original article
doi: 10.17223/19988605/61/10

Enumeration of symmetrical necklaces

Yury D. Grigoriev

Electrotechnical University "LETI", St. Petersburg, Russian Federation, yuri_grigoriev@mail.ru

Abstract. The problem of the symmetrical stanzas enumeration, whose models are necklaces or simple cycles of a given length, is considered. The automorphisms of the necklace symmetry group form a dihedral group, whose action on the set of necklaces allows us to distribute them over orbits. With help of a specially developed algorithm, the orbits are divided into sets of symmetric and asymmetric necklaces, while the symmetrical necklaces are classified into types and classes of symmetry. Mirror or axial symmetry, as well as its variants, achiral and chiral symmetries, are considered. Analytical results are given for calculating the cardinality of symmetry classes (of representative graphs) belonging to the same type of symmetry.

Applications of the resulting classification to the analysis of octets, for which various rhyming schemes are used as a attribute of symmetry, are considered. The analysis of the applicability of symmetrical stanzas in the practice of versification has been carried out. It is shown that within the framework of the proposed approach, all known hard forms of versification for octets, such as the triolet, siciliane, octave, and others, are symmetrical; examples of rarely used symmetrical stanzas are listed, indicating the possible reasons for this phenomenon. The possibility of using the proposed approach in the problem of choosing the rhythmic profile of a stanza, which generates the symmetry of the rhythm, is shown.

Keywords: necklace; symmetry of necklaces; groups of necklaces symmetries; enumeration of necklaces; stanza

For citation: Grigoriev Yu.D. (2022) Enumeration of symmetrical necklaces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988605/61/10

Задача об ожерелье является одной из хорошо известных в дискретной математике [1. С. 246; 2. С. 212]. На ее примере наглядно демонстрируется один из таких конструктивных методов теории групп, как действие некоторой группы симметрий $G = \langle X, * \rangle$ на заданное множество ожерелий [3. С. 301]. Основной вопрос, который встает при исследовании симметрий ожерелий, заключается не столько в их *подсчете* в некотором множестве, сколько в их реальном *перечислении* – построении алгоритма получения ожерелий в явном виде [4]. В рассматриваемом случае мы сталкиваемся с феноменом так называемой хиральности – разновидностью симметрии, не совпадающей с осевой симметрией. Хиральность как атрибут многих сложных систем является объектом изучения в общей теории симметрии [5–7], органической химии [8, 9], кристаллографии [10] и многих других научных дисциплинах.

Цель статьи – рассмотрение алгоритмического подхода к решению задачи перечисления симметричных ожерелий и перенесение ее на теорию поэтических структур – строф, моделями которых служат ожерелья. Такое моделирование позволяет не только выявить симметрии поэтических строф, но и расширить их классификацию за счет внесения в нее различных признаков симметрии типа правила альтернанса или правила скрещения рифмических цепей [11. С. 195]. Эта задача является тем более актуальной, что проблема аналитического перечисления симметричных ожерелий в явном виде на сегодняшний день остается в полном объеме нерешенной.

1. Постановка задачи

В [12. С. 14, 18] была предложена модель строфических структур в виде кольцевых диаграмм, или *ожерелий* [1. С. 246]. Такое представление позволяет эффективно исследовать свойства поэтической строфы с позиций симметрии при условии, что в качестве признаков симметрии строфы рассматриваются только такие, которые допускают строгую формализацию, – системы рифмовок, слоговый объем стихов, ритмический профиль и т.д.

Рассмотрим стихотворение А. Блока «На зов метелей» [13. С. 165]. Система рифмовки его строфы IV соответствует симметричному ожерелью abcb adcd (см. ниже: рис. 3, ожерелье 2 в табл. 2), где одинаковыми буквами обозначены звенья соответствующих рифмических цепей:

На зов метелей

IV’

И мгла заломила руки,
Заломила руки ввысь.
Ты опустила очи,
И мы понеслись.
И навстречу вставали новые звуки:
Летели снега,
Налетающей ночи
Звенели рога.

Эта восьмистишная строфа симметрична, и все бы хорошо, но дело в том, что здесь я осуществляю подлог – на самом деле у Блока два последних стиха переставлены местами. В результате этого симметрия нарушается, и все наши красивые рассуждения рушатся. Возникает вопрос: может, Блок на подсознательном уровне стремился к симметрии и просто ошибся в чередовании двух последних стихов? О приведении строф к симметрии говорится в [14], где, в частности, анализируется отклонение от симметрии в стихотворении Д. Мережковского «Март» и высказывается предположение, что в этом стихотворении вообще пропущен один стих, нарушающий симметрию.

В статье решается вопрос, сколько симметричных (m_1, m_2, … , m_r)-ожерелий длины n, $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$, существует при заданном распределении его *бусин* (m_i – число бусин i-го цвета). Цвета бусин применительно к стихосложению определяют систему рифмовки и рассматриваются как признак симметрии строфы. Так, варианту Блока соответствует несимметричное (2, 2, 2, 2)-ожерелье, а после его реконструкции (второй вариант) – симметричное, хотя в обоих случаях распределение бусин одно и то же. Задача алгоритмического подсчета, перечисления и анализа симметричных ожерелий длины n иллюстрируется в статье на примере 8-стишных строф.

2. Симметричные ожерелья

Пусть T – множество ожерелий $x \in T$, в котором определено отношение эквивалентности ~, G – множество операторов $g \in G$, $g: T \to T$, т.е. $gx \in T$, $G \times G \to G$ – композиция операторов, относительно которой G является группой, в общем случае неабелевой.

2.1. Симметрия

Пусть G действует на $x \in T$, при этом $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$, $ex = x$. Ожерелье $x \in T$ называется *симметричным*, если существует оператор $g \neq e$ такой, что $gx \sim x$. Метризуем множество T. Пусть $d(x, y)$ – число несовпадающих бусин ожерелий $x, y \in T$, взятых в порядке следования. Это известное расстояние Хемминга [15. С. 52], используемое для строк одинаковой длины любых r-ичных алфавитов. Очевидно, ожерелье $x \in T$ симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $g \neq e$ такой, что $d(gx, x) = 0$. В связи с этим такие операторы g называются *изометриями*. Это определение симметричности эквивалентно предыдущему.

Вопрос о количестве $N(m_1, \dots, m_r)$ орбит, индуцируемых действием на множество T какой-либо группы G, решается с помощью леммы Бернсайда. Однако на вопрос о том, сколько существует симметричных орбит (орбит, содержащих симметричные ожерелья), лемма Бернсайда ответа не дает.

2.2. Представительные графы

Расстояние $\rho(a, b)$ между двумя бусинами a и b ожерелья x определим как цепь наименьшей длины, связывающую a и b. Кроме того, ясно что для $\forall\ a, b$: $\rho(a, b) \in \{1, 2, \dots, [n/2]\}$. Например, для соседних узлов a и b имеем $\rho(a, b) = 1$. Легко проверить что $\rho(a, b)$ – метрика [16. С. 42].

Сопоставим (m_1, m_2, … , m_r)-ожерелью $x \in T$ длины n следующую (n, $n - q$)-диаграмму H с n вершинами и $n - q$ ребрами – отрезками прямых линий: (а) вершины диаграммы H определим как вершины правильного n-угольника; (б) ребра H – как звенья r компонент связности длины m_i, образующие цепи наименьшей длины (если $m_i = 2$, то полагаем, что цепь состоит из одного звена); (в) q – количество координат m_i, равных 2. Так, если рассматривается (3, 3, 2)-ожерелье, то $n = 8$, $r = 3$, $q = 1$. Следовательно, ожерелью x сопоставляется (8, 7)-диаграмма H, содержащая 8 вершин и 7 ребер, образующих 3 компоненты связности. Ребра диаграммы H при их изображении на плоскости могут пересекаться, но точки их пересечения вершинами H не являются. Описанная (n, $n - q$)-диаграмма однозначно определяет ожерелье $x \in T$ и отличается от обычного определения (n, $n - q$)-графа лишь дополнительным требованием (а). Такая диаграмма названа в [12. С. 21] *представительным графом* симметричного ожерелья x. Этот граф будем считать непомеченным.

Каждый граф H имеет группу автоморфизмов Γ = Γ(H), состоящую из изоморфизмов H на себя [16. С. 311]. Среди n! перестановок n узлов H только 2n перестановок являются изометриями в смысле метрики $\rho(\cdot,\cdot)$. Данные изометрии сохраняют инвариантными $n(n-1)/2$ расстояний между узлами графа *H*. Очевидно, это вращения и зеркальные отражения, которые в совокупности образуют группу диэдра

$$D_n = \{s, t : s^n = t^2 = (st)^2 = e\},$$

где s – вращение на угол $2\pi/n$, t – отражение. Поскольку далее предметом нашего интереса будут восьмистишия, кратко охарактеризуем свойства симметрий группы D_8 [7]. Для этого выделим в ней подгруппу G^+ и ее дополнение $G^- = G \setminus G^+$:

$$G^+ = \{s^{8-2i} : i = 0, ..., 3\}, \quad G^- = \{s^{9-2i}, ts^{8-j} : i = 0,...,3,\ j = 0,...,7\}.$$

Группа $G^+ = G'$ – коммутант D_8, при этом $G/G' \cong D_2$. Изометрии $g \in G^+$ – это вращения. Дополнение $G^- = G \setminus G^+$ группой не является, но, как и G^+, состоит из объединения классов сопряженности группы D_8, из них два множества – $S_1, S_2 \in G^-$ – представляют особый интерес:

$$S_1 = \{t, ts^2, ts^4, ts^6\}, \quad S_2 = \{ts, ts^3, ts^5, ts^7\}.$$

Множество S_1 содержит отражения относительно диагоналей правильного 8-угольника. Их можно представить в виде композиций отражений относительно осей симметрии, проходящих через середины сторон 8-угольника, и вращений. Множество S_2 – это отражения относительно осей симметрии, проходящих через середины противоположных сторон 8-угольника. Эти отражения нельзя получить с помощью композиций отражений, принадлежащих S_1, и последующих вращений. Оба множества при любом $n = 2m$ содержат одинаковое число элементов. Существование множеств S_1 и S_2 – источник ахиральной и хиральной симметрии ожерелий.

2.3. Хиральность

С понятием симметрии тесно связан феномен хиральности. Согласно лорду Кельвину, классическое определение хиральности звучит так: «Я называю любую геометрическую фигуру или группу точек *хиральной* и говорю, что она обладает *хиральностью*, если ее отражение в идеально плоском зеркале не может быть перенесено так, чтобы оно совпало с нею самой» [7]. Применительно к нашим обозначениям это определение формулируется следующим образом: ожерелье $x \in T$ *хирально*, если оно неэквивалентно (относительно вращений) своему зеркальному отражению $y = \varphi(x)$. В противном случае ожерелье *x ахирально*, т.е. $x \sim \varphi(x)$. Исходя из этого определения ахиральность трактуется как искаженная зеркальная симметрия, а хиральность означает отсутствие зеркальной симметрии. Таким образом, ахиральность и хиральность являются характеристическими свойствами множеств $S_1, S_2 \in D_8$.

Комбинаторная проблема перечисления хиральных объектов в R^2 связана с проблемой перечисления автоморфизмов 2-го порядка группы симметрий *G* [5. С. 278]. Поскольку группой автоморфизмов ожерелья как простого (n, n)-цикла [2. С. 26] является группа диэдра D_n, содержащая отражения, т.е. автоморфизмы порядка 2, то в множестве *T* каждое ожерелье *a* сопровождает двойственный ему элемент *b*, образующий с ним *энантиомерную пару* (a, b), при этом энантиомеры *a* и *b* принадлежат разным орбитам. В приложениях этот факт хорошо известен [8. С. 63]. Очевидно также, что если ожерелье *a* ахирально, т.е. $a \sim \varphi(a)$, то энантиомеры *a* и $b = \varphi(a)$ принадлежат одной орбите.

Перечисленные виды симметрии могут иметь разный порядок, т.е. представительные графы *H* могут иметь несколько осей симметрии того или иного порядка. В связи с этим возможны следующие *типы* симметрий $[k, l]$:

$$[k,0],\ [k,k],\ [0,l],\ [0,0],\ k,l \geq 1,$$

где $k > 0$ – порядок зеркальной или ахиральной симметрии, $l > 0$ – порядок хиральной симметрии. Ахиральная симметрия может встречаться только в сочетании с осевой, при этом всегда $k = l > 0$. Если $k = l = 0$, то ожерелье по определению несимметрично. К этому случаю из чисто алгоритмических соображений будем относить и центральную симметрию – вращение вокруг точки, которое можно представить как композицию двух зеркальных симметрий [16. С. 52–56].

Одному и тому же типу симметрии может соответствовать несколько классов симметрии. Под ожерельями разных классов, принадлежащими одному типу симметрии, понимаются ожерелья, графы H которых изоморфны [2. С. 24], но не могут быть переведены друг в друга никаким движением (сдвигом, вращением, отражением или их композициями), т.е. каким-либо изометрическим преобразованием [18. С. 278]. Ожерелья, которые могут быть переведены одно в другое некоторым движением, назовем *конгруэнтными*. Такие ожерелья принадлежат одному классу симметрии.

Пример 1. На рис. 1, 2 представлена энантиомерная пара хиральных ожерелий, представляющая строфы I и II стихотворения А. Пушкина «Осень». Строфы отличаются тем, что в них А. Пушкин меняет местами мужские и женские рифмы. Аналогично построены и последующие пары строф. Сами же строфы представляют знаменитую твердую форму – октаву [11. С. 172]. Ей соответствует симметрия [0, 1].

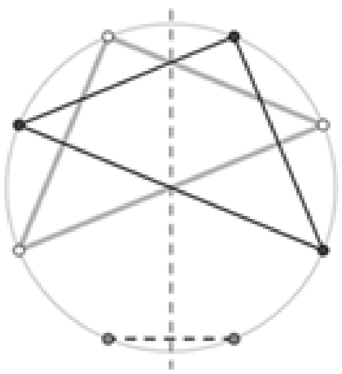

Рис. 1. А. Пушкин. Осень («Октябрь уж наступил…»).
Строфа I: abab abcc (ожерелье 11 в табл. 1)
Fig. 1. A. Pushkin. Autumn («October has already come…».
The stanza I: abcb adcd (necklace 11 in the table 1)

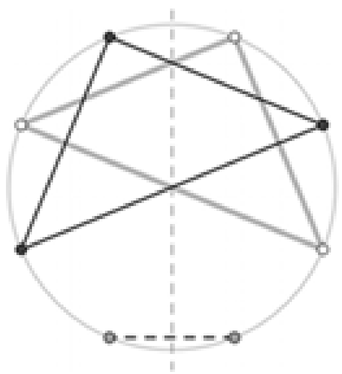

Рис. 2. А. Пушкин. Осень («Теперь моя пора…»).
Строфа II: baba bacc (ожерелье 11 в табл. 1)
Fig. 2. A. Pushkin. Autumn («Now is my time…».
The stanza II: abcd cabd (necklace 11 in the table 1)

3. Перечисление ожерелий

Аналитический подсчет числа представительных графов является нерешенной в общем случае задачей. Некоторое продвижение в ее решении можно получить в частных случаях, используя лемму Бернсайда.

Теорема 1. Количество $N_C\ (2, n-2)$ представительных графов (2, n – 2)-ожерелий равно

$$N_C(2, n-2) = [n/2]. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ – функция Эйлера [19. С. 28], $P(k, l) = (k+l)!/k!l!$ – биномиальный коэффициент, НОД (k, l) – наибольший общий делитель целых чисел k и l. Согласно лемме Бернсайда количество орбит (2, n – 2)-ожерелий равно

$$N_O(2, n-2) = n^{-1} \sum_{d|\text{НОД}(2,\, n\text{-}2)} \varphi(d) P(2/d, (n-2)/d), \tag{2}$$

где d = 1, 2 или d = 1 в случаях четного и нечетного n соответственно. Рассматривая эти случаи отдельно, а затем объединяя полученный результат в один, получаем $N_O(2, n-2) = [n/2]$. С другой стороны, очевидно, что конгруэнтными являются только те ожерелья, расстояния $\rho(a,b) = 1, 2, ..., [n/2]$ между бусинами a и b которых одного цвета совпадают. Из геометрических соображений следует, что для любых этих значений $\rho(a,b)$ данные ожерелья симметричны. Поскольку все (2, n – 2)-ожерелья независимо от их длины являются зеркально симметричными, это означает, что $N_C(2, n-2) = N_O(2, n-2)$, т.е. справедливо равенство (1).

Задача перечисления представительных графов как задача о $(m_1, m_2, \dots, m_r)$-ожерельях в общем виде рассматривалась Д.И. Яковенко [20]. В этой работе с опорой на лемму Бернсайда сформулировано несколько результатов для случаев четного и нечетного n. Однако проверка показала, что не все они являются верными. После уточнения некоторых ее утверждений может быть сформулирована следующая

Теорема 2. Пусть x – $(m_1, m_2, \dots, m_r)$-ожерелье длины n, $P(m_1, m_2, \dots, m_r)$ – полиномиальный коэффициент, $N_C(m_1, m_2, \dots, m_r)$ – количество представительных графов ожерелья x. Имеют место следующие утверждения:

$P1$. Пусть n нечетно. Тогда если среди чисел $m_1, m_2, \dots, m_r$ только одно нечетно, а все остальные попарно различны и четны, то

$$N_C\ (m_1, m_2, \dots, m_r) = P\ ([m_1/2], [m_2/2], \dots, [m_r/2])\ . \tag{3}$$

$P2$. Пусть n четно. Тогда если все числа $m_1, m_2, \dots, m_r$ четны и попарно различны, то имеет место (3).

Доказательство теоремы 2 по аналогии с [20].

Задачу перечисления ожерелий в общем виде теорема 2 не решает. В связи с этим в [12] разработан универсальный алгоритм перечисления представительных графов, на основе которого составлены обширные таблицы симметричных ожерелий [12. Табл. 2.6–2.15]. К сожалению, описание алгоритма перечисления в [12. С. 23–25] недостаточно конструктивно для возможности его программной реализации, что фактически означает утрату этого алгоритма.

Разработанный нами в среде MAPLE алгоритм перечисления относится к переборному типу. Вследствие этого он требует больших затрат машинного времени и на данный момент не дает возможности решать задачи большой размерности. Отметим, что результаты, полученные Л.Г.Портером и с помощью нашего алгоритма до n = 8 включительно, полностью совпадают.

4. Перечисление симметрий восьмистиший

Восьмистишие – одна из самых распространенных и семантически нейтральных строф [11. С. 172]. Разнообразие таких строф определяется широкой возможностью разбиения числа 8 на слагаемые, нетривиальные из которых имеют вид:

$$\begin{aligned} 8 &= 6+2 \\ &= 5+3 = 4+4 \\ &= 3+3+2 = 4+2+2 = 2+2+2+2 \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) следует, что существует 6 видов 8-стишных строф со схемами рифмовки на две, три и четыре рифмы. В табл. 1 представлены сводные данные о симметричных ожерельях длины 8 на две и три рифмы.

Таблица 1

Перечень симметрий (*k*, *l*)- и (*k*, *l*, *m*)-ожерелий

	Симметрии (*k*, *l*)-ожерелий					Симметрии (*k*, *l*, *m*)-ожерелий			
	(6, 2)		(5, 3)	(4, 4)		(3, 3, 2)		(4, 2, 2)	
1	[1, 0]	aaaa aabb	aaab bbbb	[1, 0]	aaab babb	[1, 0]	aaab cbcb	[1, 0]	aaaa bccb
2	[1, 0]	aaaa abab	abaa abab	[1, 1]	aaaa bbbb	[1, 0]	abab acbc	[1, 0]	aaab cacb
3	[1, 0]	aaaa abba	aaba abab	[1, 1]	aaba bbab	[1, 1]	aaac bbbc	[1, 0]	aaba acbc
4	[1, 0]	aaab aaab		[2, 2]	aabb aabb	[1, 1]	abac babc	[1, 0]	acca baab
5				[4, 4]	abab abab	[0, 1]	aaab bbcc	[1, 1]	aabb aacc
6				[0, 1]	aaab abbb	[0, 1]	aaba bbcc	[1, 1]	aabc aacb
7				[0, 1]	abba abab	[0, 1]	aabb accb	[1, 1]	abab acac
8						[0, 1]	aabb cabc	[2, 2]	abac abac
9						[0, 1]	aabb cbac	[0, 1]	aaaa bbcc
10						[0, 1]	aabc abbc	[0, 1]	aaaa bcbc
11						[0, 1]	abab abcc	[0, 1]	aaab bacc
12						[0, 1]	abab cabc	[0, 1]	aaab cabc

Окончание табл. 1

	Симметрии (*k*, *l*)-ожерелий			Симметрии (*k*, *l*, *m*)-ожерелий	
	(6, 2)	(5, 3)	(4, 4)	(3, 3, 2)	(4, 2, 2)
13				[0, 1] abab cbac	[0, 1] abab bcbc
14					[0, 1] aaba cbac
15					[0, 2] aabc aabc
N_C	4	3	7	13	15
N_O	4	7	10	70	54
P	28	56	70	560	420

Примечание. N_C – количество симметричных ожерелий, N_O – количество орбит, $P = P(k, l)$ – всего ожерелий.

Поясним последнюю строку в табл. 1, например число 420. Орбиты в зависимости от симметрии ожерелий содержат разное число ожерелий. В данном случае три (4, 2, 2)-орбиты содержат по 4 ожерелья, а остальные – по 8, что в итоге дает $(54-3)\times 8+3\times 4=420$ ожерелий. Симметрии (2, 2, 2, 2)-ожерелий приведены табл. 2 и табл. 3 соответственно.

Таблица 2

Перечень симметрий (2, 2, 2, 2)-ожерелий

	Тип	Класс			Тип	Класс	
		Ожерелье	Рифмовка			Ожерелье	Рифмовка
1	[1, 1]	abba cddc	CC	9	[0, 1]	aabc cdbd	
2	[1, 1]	abac dbdc		10	[0, 1]	abac dbcd	
3	[0, 1]	aabb cddc	AC	11	[0, 2]	aabc ddbc	
4	[0, 1]	abab cddc	BC – ноэль	12	[0, 2]	abcd acbd	
5	[0, 1]	abcd bdac		13	[0, 2]	abab cdcd	BB
6	[0, 1]	aabc bdcd		14	[0, 4]	aabb ccdd	AA
7	[0, 1]	aabc dbcd		15	[0, 4]	abca dcbd	
8	[0, 1]	aabb cdcd	AB	16	[0, 8]	abcd abcd	

Примечание. Рифмовки в катрене: *A* – смежная aabb, *B* – перекрестная abab, *C* – охватная abba.

Поясним табл. 2. Число (2, 2, 2, 2)-ожерелий и соответствующее им число орбит согласно лемме Бернсайда соответственно равны:

$$P(2, 2, 2, 2) = 2\,520, \quad N_O(2, 2, 2, 2) = 318.$$

Среди 318 орбит 312 состоят из 8 ожерелий, а 6 – из 4, т. е. $(318-6)\times 8+6\times 4=2\,520$ ожерелий. В рассматриваемом случае 48 ожерелий образуют класс [0, 0] несимметричных ожерелий, а оставшиеся в 16 классах $318-48=270$ симметричных ожерелий распределяются по пяти типам симметрии согласно табл. 3.

Таблица 3

Распределение симметрий (2, 2, 2, 2)-ожерелий по типам и классам

	Тип симметрии						Всего
	[1, 1]	[0, 1]	[0, 2]	[0, 4]	[0, 8]	[0, 0]	
Кол-во классов	2	8	3	2	1		
Мощность класса	12	24	12	6	6	48	
Кол-во ожерелий	2 × 12	8 × 24	3 × 12	2 × 6	1 × 6	48	318

5. Ожерелья, описывающие метрический профиль строфы

Будем рассматривать ритм как систему расположения ударений на сильных слоговых позициях метра [21. С. 109]. Пусть заданный размер строфы – 4-стопный ямб. Подсчитаем, сколько раз стоят ударения на сильных слогах каждого стиха, и какой процент это составляет от общего числа *n* стихов в строфе. Этот процентный ряд образует *ритмический профиль* данной строфы [11. С. 90]. Так как на последней стопе это всегда 100%, то 4-ю стопу далее вообще исключаем из рассмотрения и задаем ритмический профиль вектором $p \in R^3$. В соответствии с этим возможны шесть различных *ритмических форм* 4-стопного ямба:

$$2 = 010,\ 3 = 011,\ 4 = 100,\ 5 = 101,\ 6 = 110,\ 7 = 111 \qquad (5)$$

(форма $1 = 001$ никогда не встречается), где единицы – это стопы, несущие ударение.

Нас будет интересовать зависимость между p и распределением числа ритмических форм $x = (x_2, x_3, \ldots, x_7) \in R^6$, представляющих строфу. От взаимного расположения в строфе ритмических форм ритмический профиль p не зависит. Следовательно, один и тот же профиль может достигаться как на симметричных, так и на несимметричных ожерельях. Для однозначного определения распределения $(x_2, x_3, \ldots, x_7)$ шести ритмических форм, необходимо задать шесть независимых уравнений. Положим

$$A = F_1^2,\ B = F_2^2, C = F_3^2,\ D = F_1F_2,\ E = F_1F_3,\ F = F_2F_3, \qquad (6)$$

где $F_iF_j = \langle F_i, F_j \rangle$ – скалярные произведения в R^n, F_i. – вектор-столбец иктов на i-й стопе.

Теорема 3. Распределение $x = (x_2, x_3, \ldots, x_7)$ ритмических форм 4-стопного ямба имеет вид:

$$x_2 = B - C - D + E,\ x_3 = C - E,\quad x_4 = A - C - D + F,$$
$$x_5 = C - F,\ x_6 = C + D - E - F,\ x_7 = -C + E + F. \qquad (7)$$

Доказательство. Обозначим $y = (n, A, B, C, D, E, F) \in R^7$. Из (5), (6) и тождества $x_2 + x_3 + \ldots + x_7 = n$ приходим к равенству $Qx = y$, $Q \in R^{7\times6}$. Поскольку $A + B - D = n$, то, исключая координату n из y, можем записать $x = S\tilde{y}$, где $S \in R^{6\times6}$, $\tilde{y} = (A, B, C, D, E, F) \in R^6$, а x определяется согласно (7), при этом матрицы Q и S имеют вид:

$$Q = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad S = \begin{matrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Пример. 2. Рассмотрим два первых катрена стихотворения Блока «Я был смущенный и веселый… » [13. С. 188]:

I	II
Я был смущенный и веселый.	Живым огнем разъединило
Меня дразнил твой темный шелк,	Нас рампы светлое кольцо,
Когда твой занавес тяжелый	И музыка преобразила
Раздвинулся — театр умолк.	И обожгла твое лицо.

В совокупности будем рассматривать два этих четверостишия как 8-стишную строфу abcd caeb. Ритмическое поле $F_1F_2F_3$, распределение $x = (x_2, x_3, \ldots, x_7) \in R^6$ ритмических форм и ритмический профиль (6) имеют вид:

Стихи	Ожерелье	$F_1F_2F_3$	Форма	Профиль
1	a	110	$x_2 = 2$	$A = 4$
2	b	011	$x_3 = 2$	$B = 6$
3	c	010	$x_4 = 1$	$C = 3$
4	d	101	$x_5 = 1$	$D = 2$
5	c	010	$x_6 = 2$	$E = 1$
6	a	110	$x_7 = 0$	$F = 2$
7	e	100		
8	b	011		

Равенства (7) легко проверяются. (2, 2, 2, 1, 1)-ожерелье abcd caeb, описывающее данную строфу, несимметрично. Если, однако, выполнить несложную реконструкцию, а именно заменить ритмические формы стихов 7 и 8 на 3 = 011 и 5 = 101 соответственно, то профиль $p = (A, B, C)$ изменится с $(4, 6, 3)$, на $(4, 6, 4)$, а ожерелье x преобразуется к (2, 2, 2, 2)-виду abcd cabd и станет симметричным (рис. 4; ожерелье 10 в табл. 2). Таким образом, видим, как при изменении ритмического профиля изменяется симметрия ожерелья ритма.

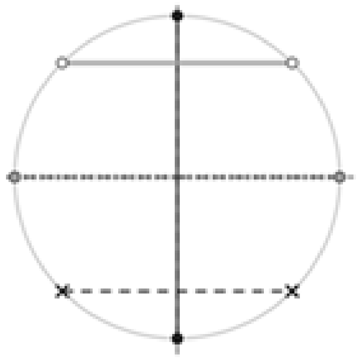

Рис. 3. А. Блок. На зов метелей (реконструкция).
Строфа abcb adcd (ожерелье 2 в табл. 2)
Fig. 3. A. Block. To the call of the blizzards (reconsruction).
The stanza abcb adcd (necklace 2 in the table 2)

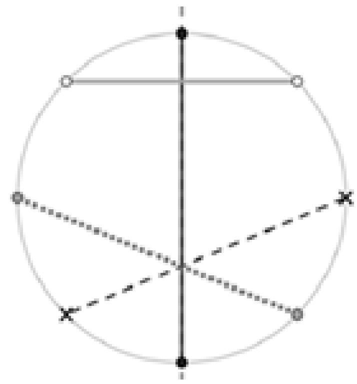

Рис. 4. А. Блок. «*Я был смущенный и веселый…* » (реконструкция).
Строфа abcd cabd (ожерелье 10 в табл. 2)
Fig. 4. A. Block. «*I was confused and cheerful…* » (reconsruction).
The stanza abcd cabd (necklace 10 in the table 2)

Несовпадение кодировок ожерелий в табл. 2 с указанными в тексте и на рис. 3, 4 не должно смущать. С точностью до обозначений и начальной точки отсчета на круговых диаграммах эти кодировки эквивалентны. Последнее связано с тем, что каждое ожерелье на самом деле представляет класс строф с одной и той же системой рифмовки, но с n разными точками отсчета. С математической точки зрения мы имеем здесь n эквивалентных ожерелий, а с точки зрения поэзии – n различных вариантов строфы, которые могут сильно отличаться в плане эстетического восприятия.

Заключение

В статье приведены некоторые результаты перечисления ожерелий с помощью разработанного алгоритма. На основе этих результатов предложены подходы к формальному анализу стихотворных текстов на основе стержневого принципа стихосложения – симметрии. Для принятого в качестве модели строфы понятия ожерелья предложена классификация симметричных ожерелий по типам и классам, которая увязана со свойствами группы автоморфизмов простого цикла. Получена более точная формулировка теоремы Яковенко для подсчета мощности классов симметрии. Перечислены симметричные ожерелья длины 8 с рифменными цепями длины 2, 3 и 4. На языке ожерелий найдена связь распределения ритмических форм 4-стопного ямба с ритмическим профилем строфы.

Список источников

1. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М. : Наука, 1982. 384 с.
2. Харари Ф. Теория графов. М. : Мир, 1973. 302 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М. : Наука, 1977. 496 с.
4. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М. : Мир, 1977. 324 с.
5. Petitjean M. Chirality and Symmetry Measures. A Transdisciplinary Review // Entropy. 2003. V. 5 (3), P. 217–312.
6. Petitjean M. Definition on Symmetry // Symmetry. Culture and Science. 2007. V. 18 (2-3). P. 99–119.
7. Petitjean M. Chirality in Metrix Spaces // Optim. Lett. 2020. V. 14. P. 329–338.
8. Зоркий П.М. Симметрия молекул и кристаллических структур. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. 232 с.
9. Марков В.М. Новые критерии степени симметрии и хиральности молекул : автореф. дис. ... канд. хим. наук : 92.00.04. Челябинск, 2001. 23 с.
10. Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве. М. : Наука, 1972. 340 с.
11. Гаспаров М.Л. Русский стих начала XX века в комментариях. М. : Фортуна Лимитед, 2001. 288 с.

12. Портер Л.Г. Симметрия – владычица стихов : очерк начал общей теории поэтических структур. М. : Языки славянской культуры, 2003. 256 с.
13. Блок А.А. Покой нам только снится… : [сборник]. М. : АСТ, 2021. 480 с.
14. Владимирова О.В., Григорьев Ю.Д. Поэтические реконструкции, или приведение к симметрии (на примере «Персидских мотивов» С. Есенина) // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Лингвистика и межкультурная коммуникация. 2020. Т. 18, № 4. С. 16–31.
15. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М. : Мир, 1976. 600 с.
16. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. М. : Наука, 1966. 648 с.
17. Оре О. Теория графов. М. : Наука, 1968. 352 с.
18. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М. : Наука, 1968. 912 с.
19. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М. : Наука, 1965. 172 с.
20. Яковенко Д.И. Задача об ожерельях // Вестник Омского университета. 1998. № 2. С. 21–24.
21. Баевский В.С. Лингвистические, математические, семиотические и компьютерные модели в истории и теории литературы. М. : Языки славянской культуры, 2001. 336 с. (Studia philologica).

References

1. Sachkov, V.N. (1982) *Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoy matematiki* [Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematics]. Moscow: Nauka.
2. Harary, F. (1969) *Teoriya grafov* [Graph Theory]. Translated from English by V.P. Kozyreva. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
3. Kostrikin, A.I. (1977) *Vvedenie v algebru* [Introduction to Algebra]. Moscow: Nauka.
4. Harary, F. & Palmer, E.M. (1973*) Perechislenie grafov* [Graphical Enumeration]. Translated from English. Moscow: Mir.
5. Petitjean, M. (2003) Chirality and Symmetry Measures. A Transdisciplinary Review. *Entropy*. 5(3). pp. 217–312. DOI: 10.3390/e5030271
6. Petitjean, M. (2007) Definition on Symmetry. *Symmetry. Culture and Science.* 18(2-3). pp. 99–119.
7. Petitjean, M. (2020) Chirality in Metrix Spaces. *Optim. Lett.* 14. pp. 329–338.
8. Zorkiy, P.M. (1986) *Simmetriya molekul i kristallicheskikh struktur* [Symmetry of Molecules and Crystal Structures]. Moscow: Moscow State University.
9. Markov, V.M. (2001) *Novye kriterii stepeni simmetrii i khiral'nosti molekul* [New criteria for the degree of symmetry and chirality of molecules]. Abstract of Chemsitry Cand. Diss. South Ural State University. Chelyabinsk.
10. Shubnikov, A.V. & Koptsik, V.A. (1972) *Simmetriya v nauke i iskusstve* [Symmetry in Science and Art]. Moscow: Nauka.
11. Gasparov, M.L. (2001) *Russkiy stikh nachala XX veka v kommentariyakh* [Russian verse from the early 20th century in the comments]. Moscow: Fortuna Limited.
12. Porter, L.G. (2003) *Simmetriya – vladychitsa stikhov: ocherk nachal obshchey teorii poeticheskikh struktur* [Symmetry is the sovereign of poetry: An essay on the beginnings of a general theory of poetic structures]. Moscow: Yazyki slavyanskoy kul'tury.
13. Block, A.A. (2021) *Pokoy nam tol'ko snitsya* [We only dream of peace]. Moscow: AST.
14. Vladimirova, O.V. & Grigoriev, Yu.D. (2020) Poetic Reconstructions, or Reduction to Symmetry (Based on S. Esenin’s Cycle “Persian Motives”). *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Lingvistika i mezhkul'turnaya kommunikatsiya – NSU Vestnik. Series: Linguistics and Intercultural Communication.* 18(4). pp. 16–31. DOI: 10.25205/1818-7935-2020-18-4-16-31
15. Peterson, W.W. & Weldon, E.J. (1972) *Kody, ispravlyayushchie oshibki* [Error-Correcting Codes]. Translated from English. Cambridge, Massachsetts; London, England: The MIT Press.
16. Coxeter, H.S.M. (1961) *Vvedenie v geometriyu* [Introduction to Geometry]. Translated from English. New York; London: John Wiley & Sons, Inc.
17. Ore, O. (1968) *Teoriya grafov* [Theory of Graphs]. Translated from English. Moscow: Nauka.
18. Aleksandrov, P.S. (1968) *Lektsii po analiticheskoy geometrii* [Lectures on Analytic Geometry]. Moscow: Nauka.
19. Vinogradov, I.M. (1965*) Osnovy teorii chisel* [Principles of Number Theory]. Moscow: Nauka.
20. Yakovenko D.I. (1998*)* Zadacha ob ozherel'yakh [The necklaces problem]. *Vestnik Omskogo universiteta – Herald of Omsk University*. 2. pp. 21–24.
21. Baevsky, V.S. (2001) *Lingvisticheskie, matematicheskie, semioticheskie i komp'yuternye modeli v istorii i teorii literatury* [Linguistic, Mathematical, Semiotic, and Computer Models in the History and Theory of Literature]. Moscow: Yazyki slavyanskoy kul'tury.

***Информация об авторе*:**
Григорьев Юрий Дмитриевич – профессор, доктор технических наук, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the author*:**
Grigoriev Yury D. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Electrotechnical University “LETI”, St. Petersburg, Russian Federation). E-mail: yuri_grigoriev@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 19.05.2022; принята к публикации 29.11.2022

Received 19.05.2022; accepted for publication 29.11.2022