

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.543

MSC: 20F99

doi: 10.17223/19988621/81/1

Множество K_p в некоторых конечных группах**Анна Ивановна Забарина¹, Елена Анатольевна Фомина²**^{1,2} *Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия*¹ *aizabarina@gmail.com*² *ef254@mail.ru*

Аннотация. Продолжено исследование свойств множества K_p , состоящего из элементов неабелевой группы, коммутирующих ровно с p элементами группы G . В частности, этот вопрос рассмотрен для групп порядка $p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$, и $p^2 q$, где p_i, q – простые числа.

Также доказано, что множество K_5 непусто в трехмерной проективной специальной линейной группе. Эта группа имеет такой же порядок, что и знакопеременная группа A_8 , в которой множество K_5 пусто.

Ключевые слова: группа, централизатор элемента, инволюция, силовские и холловы подгруппы

Для цитирования: Забарина А.И., Фомина Е.А. Множество K_p в некоторых конечных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/81/1

Original article

The set K_p in some finite groups**Anna I. Zabarina¹, Elena A. Fomina²**^{1,2} *Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation*¹ *aizabarina@gmail.com*² *ef254@mail.ru*

Abstract. This article continues the study of the properties of a set K_p for groups of order $p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$, and $p^2 q$, where p_i and q are prime numbers.

Let G be an arbitrary finite multiplicative group, $|G| = n$. We define the sets $X_p(G)$ and $K_p(G)$ as follows:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$
$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

We write X_p, K_p instead of $X_p(G), K_p(G)$, respectively, in the case when it is clear which group G we talk about.

It follows from this definition K_p that if $x \in K_p$, then $\{x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset X_p$ and $\{x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset K_p$.

The following properties of the set K_p have been proved.

Proposition 1. If $K_p(G) \neq \emptyset$, then $|G| : p$ and $|G| \nmid p^2$.

Proposition 2. If $x \in K_p(G)$, then $x^g \in K_p(G)$ for each $g \in G$.

Proposition 3. Let $|G| = n$. Then $|K_p| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \dots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.

We consider the question of the set K_p in the group G , where $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$.

Lemma. Let $|G| \neq p$, $|G| : p$ and $K_p \neq \emptyset$. Then $Z(G) = \{e\}$.

Theorem. Let G be a non-Abelian group with a trivial center $Z(G) = \{e\}$, $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Then, if $a \in K_{p_i}$, we have $i \in \{1, k\}$.

Now, let G be a non-Abelian group, $|G| = p^2 q$, p and q be prime numbers, and $Z(G) = e$. Since $|G| : p^2$, then $K_p = \emptyset$. We consider the set K_q .

I. If $p > q$, then $|K_q| = p^2(q-1)$.

II. If $p < q$, then there are two cases. Let H_q and H_{p^2} be Hall subgroups of the group G .

Then:

– If $H_q \triangleleft G$, then $K_q = H_q \setminus \{e\}$, $|K_q| = q-1$.

– If $H_{p^2} \triangleleft G$, then $|K_q| = p^2(q-1)$.

It is also proved that the set K_5 is not empty in the three-dimensional projective special linear group $L_3(4)$. This group has the same order as the group A_8 in which the set K_5 is empty.

Keywords: group, centralizer of an element, involution, Sylow and Hall subgroups

For citation: Zabarina, A.I., Fomina, E.A. (2023) The set K_p in some finite groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/81/1

В [1–3] изучались некоторые свойства конечных групп, содержащих элементы порядка p , порядок централизатора которых равен порядку элемента. Множества таких элементов мы обозначали K_p , где p – произвольное простое число. В настоящей работе рассмотрено множество K_p в группе G , порядок которой – составное число, имеющее каноническое разложение: $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$.

1. Множество K_p в группе G , где $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$

Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ – конечная неабелева группа, $|G| = n$, p – простой делитель n . Введем следующие обозначения:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$

$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

В том случае, когда понятно, о какой группе G идет речь, вместо $X_p(G)$, $K_p(G)$ будем писать X_p , K_p соответственно.

Очевидно:

$$x \in K_p \Rightarrow x \in X_p \wedge \{x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset K_p.$$

Напомним некоторые результаты о множествах K_p в конечных группах [1–3].

1. Пусть $|G| = n$. Тогда, если K_p не пусто, то n делится на p и не делится на p^2 .

2. Множество K_p является инвариантным подмножеством G .

3. Пусть $|G| = n$. Тогда $|K_p| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \dots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.

Рассмотрим вопрос о множестве K_p в группе G , где $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Предварительно докажем лемму.

Лемма. Пусть $|G| \neq p$, $|G| \not\vdash p$ и $K_p \neq \emptyset$. Тогда $Z(G) = \{e\}$.

Доказательство. Пусть $K_p \neq \emptyset$ и $a \in K_p$. Тогда:

1) если $a \in Z(G)$, то $|C(a)| > p$, что противоречит тому, что $a \in K_p$;

2) пусть $a \notin Z(G)$. Так как $\{a, a^2, \dots, a^{p-1}\} \subset K_p$ и $C_G(a^i) = \langle a \rangle$, то $Z(G) = \{e\}$. #

Теорема. Пусть G – неабелева группа с тривиальным центром $Z(G) = \{e\}$, $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Тогда, если $a \in K_{p_i}$, то $i \in \{1, k\}$.

Доказательство. Согласно [4. Т. 9.4.3 и 9.4.1], из того, что $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$, следует:

1) G – разрешимая;

2) $G = \langle a, b \rangle$, коммутант $G' = \langle a \rangle$, $o(a) = m$, $o(b) = n$, $|G| = mn$, $(m, n) = 1$. Кроме того, $b^{-1}ab = a^r$, $(r-1, m) = 1$, $r^n \equiv 1 \pmod{m}$. Операция в G задается следующим образом:

$$b^j a^i b^k a^t = b^{j+k} a^{ir^k + t};$$

3) Холловы подгруппы $H_{p_2 p_3 \dots p_k}$, $H_{p_3 \dots p_k}$, ..., H_{p_k} являются нормальными делителями G .

Так как $|G/H_{p_2 p_3 \dots p_k}| = p_1$, то $G' \subset H_{p_2 p_3 \dots p_k}$. Так как $H_{p_k} \triangleleft G$ и H_{p_k} – минимальный нормальный делитель G , то $H_{p_k} \subset G'$. Следовательно, возможны три случая: $G' = H_{p_2 p_3 \dots p_k}$, $G' = H_{p_1 p_2 \dots p_k}$, $G' = H_{p_k}$. Рассмотрим каждый из них.

➤ $G' = H_{p_2 p_3 \dots p_k} = \langle a \rangle$, $o(a) = p_2 p_3 \dots p_k$, $o(b) = p_1$.

Рассмотрим $C_G(b)$.

$$b^i a^j \in C(b) \Leftrightarrow b^i a^j \cdot b = b \cdot b^i a^j \Rightarrow a^{i(r-1)} = e.$$

Так как $(r-1, p_2 p_3 \dots p_k) = 1$, то $i = 0$.

Следовательно, $C_G(b) = \langle b \rangle$, т.е. $\langle b \rangle \setminus \{e\} \subset K_{p_1}$, $b^G \subset K_{p_1}$. Таким образом,

$K_{p_1} \neq \emptyset$.

Пусть $o(g) \in \{p_2, p_3, \dots, p_k\}$. Согласно свойству холловых подгрупп $\langle g \rangle \subset H_{p_2 p_3 \dots p_k}$; $H_{p_2 p_3 \dots p_k} = \langle a \rangle$. Следовательно, так как $C_G(g) \neq \langle g \rangle$, то $K_{p_2} = K_{p_3} = \dots = K_{p_k} = \emptyset$.

➤ Пусть $G' = H_{p_1 p_2 \dots p_k}$, где $\{i_1, \dots, i_s\} \neq \{2, 3, \dots, k-1\}$, $\{i_1, \dots, i_s\} \neq \emptyset$.

$o(a) = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s} p_k$, $o(b) = p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_t}$, $\{i_1, i_2, \dots, i_s\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_t\} = \emptyset$.

Заметим, что существуют $u, v \in G$, такие что $a = uv = vu$. Рассмотрим случай, когда $o(u) = p_{i_1}$, $o(v) = p_{i_2} \cdots p_{i_s} p_k$, то $u \notin K_{p_{i_1}}$. Пусть $o(u^*) = p_{i_1}$.

Так как $\langle u^* \rangle = g^{-1} \langle u \rangle g$, то $u^* = g^{-1} u^l g$. Но $u^l \notin K_{p_{i_1}}$. Следовательно, $|C(u^*)| = |C(u)| \neq p_{i_1}$.

Поэтому $K_{p_{i_1}} = \emptyset$. Аналогично $K_{p_{i_2}} = K_{p_{i_3}} = \dots = K_{p_{i_s}} = K_{p_k} = \emptyset$.

Из аналогичных рассуждений для элемента b , получаем

$$K_{p_{j_1}} = K_{p_{j_2}} = \dots = K_{p_{j_t}} = \emptyset.$$

➤ $G' = H_{p_k} = \langle a \rangle$. Следовательно, $o(a) = p_k$, $o(b) = p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$. Рассмотрим холлову подгруппу $H_{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$ – максимальную подгруппу G . Пусть $S \triangleleft G$, $S \neq \{e\}$, и $S \subset H_{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$.

Так как $S \cap G' = \{e\}$, то $S \subset Z(G)$ [5. С. 59, 5.49a].

Следовательно, максимальная подгруппа $H_{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$ не содержит неединичных нормальных делителей группы G .

Так как $H_{p_k} \triangleleft G$, то $C_G(H_{p_k}) = H_{p_k}$ [6. С. 42–43, 4.52_1]. Следовательно, $C_G(a) = \langle a \rangle$, т.е. $K_{p_k} = \langle a \rangle \setminus \{e\}$.

Заметим, что так как $o(b) = p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$, то? повторяя рассуждения из предыдущего пункта для элемента b , получим, что $K_{p_2} = K_{p_3} = \dots = K_{p_k} = \emptyset$. Теорема доказана.

2. Множества K_p, K_q в группе G , где $|G| = p^2 q$

Пусть G – неабелева группа, $|G| = p^2 q$, p и q – простые числа, $Z(G) = e$. Так как $|G| : p^2$, то $K_p = \emptyset$. Рассмотрим множество K_q . Возможны два случая:

I. $p > q$. Так как количество силовских p -подгрупп N_p сравнимо с 1 по модулю p (т.е. $N_p = 1 + pk$) и $q \nmid (1 + pk)$, то $k = 0$. В этом случае, $N_p = 1$ и $H_{p^2} \triangleleft G$. С другой стороны, $N_q = 1 + qt$, т.е. $N_q \in \{1, p, p^2\}$.

➤ Так как G – неабелева, то $N_q \neq 1$.

➤ Пусть $N_q = p$. Подсчитаем $|G|$. Группа G содержит p подгрупп по q элементов, пересекающихся только по единичному элементу, и одну подгруппу порядка p^2 . Тогда $|G| = p(q - 1) + p^2 = p^2 q$.

Отсюда: $p(q - 1) = p^2(q - 1)$, чего быть не может.

➤ Следовательно, $N_q = p^2$ и $\forall_G g (g \neq e \Rightarrow o(g) \in \{p, p^2, q\})$ (*).

Пусть $o(g) = q$. Так как $\langle g \rangle \subset C_G(g)$, то $|C_G(g)| \geq q$. Если $|C_G(g)| = pq$, то в $C_G(g)$ существует элемент x , такой что $o(x) = p$. Так как $xg = gx$, то $o(xg) = pq$, что противоречит (*).

Если $|C_G(g)| = p^2 q$, то $g \in Z(G)$, что противоречит условию.

Таким образом, $\forall_G g (o(g) = q \Rightarrow C_G(g) = \langle g \rangle)$. То есть $|K_q| = p^2(q - 1)$.

II. $p < q$. Заметим, что в группе A_4 ($|A_4| = 2^2 \cdot 3$) нормальным делителем является группа V_4 , а в группе порядка $2^2 \cdot 5$ нормальной является подгруппа H_5 . Покажем, что одна из силовских подгрупп группы G является ее нормальным делителем.

Так как $N_q = 1 + kq$, то $N_q = 1$ при $k = 0$. Таким образом, $H_q \triangleleft G$.

Если $k \neq 0$, то $N_q = p^2$ (так как $1 + q > p$ и $p^2 \nmid (1 + kq)$). Тогда во всех q -подгруппах группы G содержится $p^2(q - 1)$ неединичных элементов. Так как $|G| = p^2q$, то $|G| = p^2(q - 1) + p^2$. Следовательно, $N_p = 1$, $H_{p^2} \triangleleft G$.

Рассмотрим множество K_q в обоих случаях. Заметим, что порядок каждого неединичного элемента $g \in G$ принадлежит множеству $\{q, p, p^2\}$. Следовательно, если:

➤ $H_q \triangleleft G$, то $K_q = H_q \setminus \{e\}$, $|K_q| = q - 1$;

➤ $H_{p^2} \triangleleft G$, то $|K_q| = p^2(q - 1)$.

Вопрос о строении множеств K_p , K_q в группе G , где $|G| = p^2q$, полностью рассмотрен.

3. Множество K_5 в группе $L_3(4)$

Обратимся теперь к двум простым группам одинакового порядка: знакопеременной группе подстановок A_8 и трехмерной проективной специальной линейной группе, имеющей два обозначения: $L_3(4)$ [7] и $PSL_3(4)$ [8]. Вторая группа построена факторизацией $SL_3(4)$ по подгруппе скалярных матриц над полем $P = \{0, 1, a, a^{-1}\}$.

Известно, что $|A_8| = |PSL_3(4)| = 2^6 3^2 5 \cdot 7$. Последняя группа участвует в доказательстве простоты спорадической группы – группы Матье M_{22} . В отличие от A_8 [3. С. 34–35] множество K_5 в группе $PSL_3(4)$ непусто. Убедимся в этом.

Приведем таблицы сложения и умножения в поле P :

+	1	a	a^{-1}
1	0	a^{-1}	a
a	a^{-1}	0	1
a^{-1}	a	1	0

·	a	a^{-1}
a	a^{-1}	1
a^{-1}	1	a

Отметим, что в данном поле каждый элемент противоположен самому себе.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in SL(3, 4)$. Непосредственные вычисления

показывают, что $o(A) = 5$, причем

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = \{E, aE, a^{-1}E\}$. Остается убедиться, что $C_{L_3(4)}(AH) = \langle \bar{A} \rangle$, где $\bar{A} = AH$.

Пусть $BH \in C_{L_3(4)}(AH)$, т.е. $BH \cdot AH = AH \cdot BH$, где $B \in SL(3, 4)$. Отсюда следует, что $AB = BAU$, где $U \in H$. Покажем, что $B = A^i U^*$, где $U^* \in H$. Рассмотрим всевозможные значения U .

1) $U = E$. Тогда

$$AB = BA \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y & x \\ 0 & x & y+ax \end{pmatrix},$$

где $b_{11}(y^2 - x^2 + axy) = b_{11}(y^2 + x^2 + axy) = 1$.

Исследуем вид матрицы B в зависимости от значения элементов.

a) $b_{11} = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 + axy = 1$.

Переберем все возможные варианты для элемента y :

➤ $y = x \Rightarrow ax^2 = 1 \Rightarrow y = x = a \Rightarrow B = A^3$;

➤ $y = 0 \Rightarrow -x^2 = x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B = A$;

➤ $y = 1 \Rightarrow 1 + x^2 + ax = 1 \Rightarrow x(x+a) = 0 \Rightarrow (x=0) \vee (x+a=0) \Rightarrow (B=E) \vee (x=a \Rightarrow B=A^2)$;

➤ $y = a \Rightarrow a^2 - x^2 + a^2x = 1 \Rightarrow a^2(1+x) = a^{-1}(1+x) = 1 + x^2 = 1 - x^2 = (1-x)(1+x) \Rightarrow (x=1) \vee (a^{-1} = 1-x) \Rightarrow (B=A^4) \vee (x=a \Rightarrow B=A^3)$ (см. случай $y=x$);

➤ $y = a^{-1} \Rightarrow a - x^2 + x = 1$. Несложно проверить, что при любом значении x данное равенство не имеет места. Значит, $y \neq a^{-1}$ при $b_{11} = 1$.

Вывод: если $b_{11} = 1$ и $AB = BA$, то $B = A^i$.

b) $b_{11} = a \Rightarrow y^2 - x^2 + axy = a^2 = a^{-1}$.

Переберем все возможные варианты для элемента y :

➤ $y = x \Rightarrow ax^2 = a^{-1} \Rightarrow y = x = a^{-1} \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 \\ 0 & a^2 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = aA^3 = aE \cdot A^3;$$

➤ $y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = aE \cdot A$;

➤ $y = a \Rightarrow a^2 - x^2 + a^2x = a^2 \Rightarrow x^2 + a^2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aE;$$

➤ $y = a^{-1} \Rightarrow a - x^2 + x = a^2 \Rightarrow x^2 + x = a^2 + a \Rightarrow (x=a \vee x=a^{-1}) \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = aE \cdot A^4 \vee B = aE \cdot A^3 \text{ (см. случай } y=x).$$

➤ $y = 1 \Rightarrow 1 - x^2 + ax = a^2$. Можно проверить, что при любом значении x данное равенство не имеет места. Значит, $y \neq 1$ при $b_{11} = a$.

Вывод: если $b_{11} = a$ и $AB = BA$, то $B = aE \cdot A^i$.

c) $b_{11} = a^2 \Rightarrow y^2 - x^2 + axy = a$.

Переберем все возможные варианты для элемента y :

➤ $y = x \Rightarrow axy = a \Rightarrow y = x = 1 \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = a^2 A^3 = a^2 E \cdot A^3;$$

➤ $y = 0 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = a^2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 0 & a^2 & 1 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = a^2 E \cdot A;$

➤ $y = 1 \Rightarrow 1 + x^2 + ax = a \Rightarrow (1-x)^2 = a(1-x) \Rightarrow (x=1) \vee (x=a^2) \Rightarrow B = a^2 E \cdot A^3$

(см. случай $y = x$) $\vee B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a^2 E \cdot A^4;$

➤ $y = a^{-1} \Rightarrow a - x^2 + x = a \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow (x=0 \vee x=1) \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2 E \vee B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = a^2 E \cdot A^2;$$

➤ $y = a \Rightarrow a^2 - x^2 + a^2 x = a \Rightarrow a^2(1+x) = x^2 + a$. При любом значении x данное равенство не имеет места. Значит, $y \neq a$ при $b_{11} = a^2$.

Вывод: если $b_{11} = a^2$ и $AB = BA$, то $B = a^2 E \cdot A^i$.

2) $U = aE$. Тогда $AB = BA \cdot aE \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & a^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{21} + ab_{31} & b_{22} + ab_{32} & b_{23} + ab_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{13} & ab_{12} + a^{-1}b_{13} \\ ab_{21} & ab_{23} & ab_{22} + a^{-1}b_{23} \\ ab_{31} & ab_{33} & ab_{32} + a^{-1}b_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{11} = ab_{11} \Rightarrow b_{11} = 0,$$

$$b_{12} = ab_{13} \Rightarrow ab_{12} = a^{-1}b_{13},$$

$$b_{13} = ab_{12} + a^{-1}b_{13} = 0 \Rightarrow b_{12} = 0 \Rightarrow \det B = 0.$$

3) $U = a^{-1}E$. Тогда $AB = BA \cdot a^{-1}E \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{21} + ab_{31} & b_{22} + ab_{32} & b_{23} + ab_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}b_{11} & a^{-1}b_{13} & a^{-1}b_{12} + b_{13} \\ a^{-1}b_{21} & a^{-1}b_{23} & a^{-1}b_{22} + b_{23} \\ a^{-1}b_{31} & a^{-1}b_{33} & a^{-1}b_{32} + b_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{11} = a^{-1}b_{11} \Rightarrow b_{11} = 0,$$

$$b_{12} = a^{-1}b_{13},$$

$$b_{13} = a^{-1}b_{12} + b_{13} \Rightarrow a^{-1}b_{12} = 0 \Rightarrow b_{12} = 0 \Rightarrow b_{13} = 0 \Rightarrow \det B = 0.$$

Таким образом, $o(\bar{A}) = 5$ и $\forall BH \left(\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A} \Rightarrow \bar{B} = \bar{A}^i \right)$. $C_{L_3(4)}(AH) = \langle \bar{A} \rangle \Rightarrow$

$K_5(G) \neq \emptyset$

Замечание. Так как $|L_3(4)| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ и $K_5 \neq \emptyset$, то в $L_3(4)$ нет таких элементов g , что $o(g) = 5m$, где $(5, m) = 1$ и $m \nmid k$, $k \neq 1$.

Открытым остается вопрос о множестве K_7 в данной группе.

Список источников

1. Забарина А.И., Гусельникова У.А., Фомина Е.А. О коммутирующих элементах группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 27–32. doi: 10.17223/19988621/38/3
2. Забарина А.И., Фомина Е.А. О множестве $K_3(G)$ элементов конечных групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 5–11. doi: 10.17223/19988621/55/1
3. Забарина А.И., Фомина Е.А. О множестве K_p в конечных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 33–40. doi: 10.17223/19988621/68/3
4. Холл М. Теория групп. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 468 с.
5. Чехлов А.Р. Упражнения по основам теории групп. Томск : Том. гос. ун-т, 2004. 275 с.
6. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М. : Наука, 2000. 239 с.
7. Горенштейн Д. Конечные простые группы: введение в их классификацию. М. : Мир, 1985. 352 с.
8. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. М.–Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2002. 148 с.

References

1. Zabarina A.I., Guselnikova U.A., Fomina E.A. (2015) O kommutiruyushchikh elementakh gruppy [On commuting elements of a group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp. 27–32. DOI: 10.17223/19988621/38/3.
2. Zabarina A.I., Fomina E.A. (2018) O mnozhestve $K_3(G)$ elementov konechnykh grupp, kommutiruyushchikh rovno s tremya elementami gruppy [On the set $K_3(G)$ of finite groups' elements commuting exactly with three elements]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 5–11. DOI: 10.17223/19988621/55/1.
3. Zabarina A.I., Fomina E.A. (2020) O mnozhestve K_p v konechnykh gruppakh [On the set K_p in finite groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 33–40. DOI: 10.17223/19988621/68/3.
4. Hall M. (1959) *The Theory of Groups*. New York: The Macmillan Company.
5. Chekhlov A.R. (2004) *Uprazhneniya po osnovam teorii grupp* [Exercises in fundamentals of the theory of groups]. Tomsk: Tomsk State University.
6. Belonogov V.A. (2000) *Zadachnik po teorii grupp* [Problem book on the theory of groups]. Moscow: Nauka.
7. Gorenstein D. (1982) *Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification*. New York: Springer Science & Business Media.

8. Bogopol'skiy O.V. (2002) *Vvedeniye v teoriyu grupp* [An introduction to the theory of groups]. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Studies.

Сведения об авторах:

Забарина Анна Ивановна – доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике Томского государственного педагогического университета, Томск, Россия. E-mail: aizabarina@gmail.com

Фомина Елена Анатольевна – доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике Томского государственного педагогического университета, Томск, Россия. E-mail: ef254@mail.ru

Information about the authors:

Zabarina Anna I. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aizabarina@gmail.com

Fomina Elena A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ef254@mail.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2022; принята к публикации 03.02.2023

The article was submitted 11.09.2022; accepted for publication 03.02.2023