

Научная статья

УДК 517.98

MSC: 46E35; 35J60

doi: 10.17223/19988621/81/2

Линейный финитный функционал в весовом пространстве Соболева

Игорь Витальевич Корытов

Томский политехнический университет, Томск, Россия, korytov@tpu.ru

Аннотация. Получено представление линейного функционала через элемент весового пространства Соболева. Пространство Соболева нормируется без привлечения псевдодифференциальных операторов. Норма включает в себя частные производные всех промежуточных порядков основной функции. Пространство Соболева рассматривается как негильбертово. Элемент, представляющий функционал, является решением нелинейного дифференциального уравнения в обобщенных функциях, которое порождается вводимой нормой.

Ключевые слова: весовое пространство Соболева, линейный финитный функционал, интегральное представление функционала, норма функционала, экстремальная функция, неравенства Кларксона

Для цитирования: Корытов И.В. Линейный финитный функционал в весовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 14–30. doi: 10.17223/19988621/81/2

Original article

Linear finite functional in the weighted Sobolev space

Igor K. Vitalievich

Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation, korytov@tpu.ru

Abstract. In this paper, a representation of a linear functional in the weighted Sobolev space is obtained. The space is normed without use of pseudodifferential operators. The norm contains partial derivatives of all intermediate orders of the test function. The Sobolev space is considered to be of non-Hilbert type.

First, we deduce the representation of linear functional via a boundary element of the test space. The boundary element corresponds to the given functional. This way, referring to Clarkson's inequalities, we prove the uniqueness of the boundary element. Then, to obtain a condition for the boundary element, we differentiate the function built based on the norm. The result leads to a representation of an arbitrary linear functional via the boundary element. When considering the boundary element as unknown, the representation performs as a nonlinear differential equation.

Second, we consider a finite linear functional. The extreme function of such a functional was built in our earlier papers. The extreme function is expressed via convolution of the fundamental solution of a linear partial differential equation with a given functional. The functional performs as a distribution in the convolution. Convolution exists if the linear functional is finite. Using this fact, we prove that the representation of a finite linear functional via the boundary element is identical to the representation via the extreme function.

Keywords: weighted Sobolev space, linear finite functional, integral representation of a functional, norm of a functional, extreme function, Clarkson inequalities

For citation: Korytov, I.V. (2023) Linear finite functional in the weighted Sobolev space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 14–30. doi: 10.17223/19988621/81/2

Введение

Статья является продолжением работ автора [1, 2], связанных с представлением линейного функционала в весовом пространстве Соболева. В ней рассматриваются вопросы представления линейного функционала через элемент того же пространства, на котором данный функционал задан. В гильбертовом пространстве такое представление реализуется через скалярное произведение. Для пространства $W_p^{(m)}$ ($p \neq 2$) конструкция представления выглядит сложнее. К искомому выражению мы приходим через постановку и решение экстремальной задачи, в которой задействовано дифференцирование нормы. Норма в нашей работе в таком контексте рассматривается не как выпуклый нелинейный функционал, а как выражение, содержащее кратный интеграл, допускающий дифференцирование по параметру. Идея состоит в том, что если норма допускает существование производной, а экстремальная задача имеет единственное решение, то эта норма порождает некоторое функциональное уравнение, которое и приводит к представлению функционала. Например, в [3] такое функциональное уравнение, выведенное для пространства L_p , не является дифференциальным. Мы же здесь приходим именно к дифференциальному уравнению, причем нелинейному и с частными производными. Норму при этом рассматриваем, отличную от норм, вводимых для пространств Соболева, например в [4–7].

Представления функционала через свертку фундаментального решения некоторого линейного дифференциального оператора с рассматриваемым функционалом получены автором ранее в работах [1, 8, 9] для пространств Соболева с весовыми и невесовыми нормами. В одних случаях рассматривались функционалы погрешности кубатурных формул [8, 9], в других – более общие конструкции – линейные финитные функционалы. Базовые утверждения данной статьи доказаны для произвольных линейных функционалов. В финальном пункте, соединяющем представление функционала через предельный элемент и представление функционала через упомянутую свертку, утверждения приведены для финитных функционалов. Условие финитности требуется для существования свертки.

Результаты, полученные в данной статье, являются основой для построения оценочных неравенств конкретных функционалов на весовых пространствах Соболева. Далее, если есть возможность найти фундаментальное решение порожденного нормой уравнения или, более того, его свертку с функционалом, то можно найти и оценивающую константу.

Начало направлению исследований положил С.Л. Соболев построением теории оценивания асимптотически оптимальных кубатурных формул для функций из пространства $L_2^{(m)}$ [10–22]. Это пространство гильбертово, вследствие чего уравнение для экстремальной функции является линейным. Работу с пространством $L_2^{(m)}$ продолжил В.И. Половинкин [23, 24]. Обобщение в направлении $L_2^{(m)} \rightarrow W_2^{(m)}$ выполнил Ц.Б. Шойнжуров [25–27]. Уравнение здесь сохраняло линейность, но решение его получено путем, отличным от примененного С.Л. Соболевым [21]. Далее на пути обобщения $W_2^{(m)} \rightarrow W_p^{(m)}$ ($p > 1$) Ц.Б. Шойнжуров применил для нормирования пространства псевдодифференциальный оператор [28, 29]. Уравнение в этом пространстве было уже нелинейным, но фундаментальное решение благодаря такой норме получалось явным. Обобщение в направлении $L_2^{(m)} \rightarrow L_p^{(m)}$ ($p > 1$) выполнил В.И. Половинкин [31–33]. В этих работах построены представления функционалов погрешности кубатурных формул с исследованием условий на существование свертки фундаментального решения полигармонического уравнения с функционалом. Ц.Б. Шойнжуров развил свои предшествующие результаты с применением новых норм [34, 35].

Укажем круг работ с задачами, аналогичными по постановке, этапам и направлениям, выполняемыми в настоящее время. Равномерная выпуклость негильбертовых пространств Соболева периодических функций как обоснование утверждений для функционалов погрешности кубатурных формул рассмотрена в наших работах [36, 37]. Экстремальные функции и представления функционалов с последующим получением явных норм используются в [38–40] для оценки погрешности оптимальных кубатурных формул. В указанных работах пространства являются гильбертовыми. Для других классов кубатурных формул экстремальные функции и свойства равномерной выпуклости пространств использованы в работах [41, 42].

1. Исходные положения

Норма функции в весовом пространстве Соболева $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, как и в [1, 2], задается следующим образом:

$$\left\| \varphi \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)} = \left[\int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^p dx \right]^{1/p}, \quad (1)$$

$1 < p < \infty$, $pm > n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_j \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, $|\alpha| \leq m$, $\omega(x) > 0$, $\omega^{1/p}(x) |D^\alpha \varphi(x)| \in L_p(\mathbf{R}_n)$.

Неравенства Кларксона, полученные в [3], послужат основой дальнейших выкладок. Приведем их в виде следующей леммы.

Лемма 1 [3]. Для весового пространства Соболева справедливы первое (2) и второе (3) неравенства Кларксона:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\varphi + \psi}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^p + \left\| \frac{\varphi - \psi}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^p \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\left\| \varphi \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^p + \left\| \psi \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^p \right), \quad 2 \leq p < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left\| \frac{\Phi + \Psi}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^{p/(p-1)} + \left\| \frac{\Phi - \Psi}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^{p/(p-1)} \leq \left(\frac{1}{2} \|\Phi\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^p + \frac{1}{2} \|\Psi\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)}^p \right)^{1/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2. \quad (3)$$

2. Предельный элемент основного пространства для линейного функционала

Лемма 2. Для любого линейного функционала существует единственный предельный элемент φ_0 пространства $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, такой что $\|\varphi_0\| = 1$, и для любой функции $\varphi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ с единичной нормой справедливо равенство $\sup_{\|\varphi\|=1} |\langle l, \varphi \rangle| = \langle l, \varphi_0 \rangle$.

Доказательство. Для удобства сократим запись нормы $\|\varphi\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)} = \|\varphi\|$. Обозначим $\sup_{\|\varphi\|=1} |\langle l, \varphi \rangle| = g$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность $\{\varphi_k\}$, $\|\varphi_k\| = 1$, такая что $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle l, \varphi_k \rangle = g$. Члены последовательности принадлежат основному пространству. Докажем, что сходимость является сильной. Предположим противное, пусть $\{\varphi_k\}$ расходится. Тогда должно быть нарушено условие Коши, т.е. можно указать такое $\varepsilon > 0$, что найдутся пары чисел n_k и m_k , такие что $\|\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}\| > \varepsilon$, $n_k \rightarrow \infty$, $m_k \rightarrow \infty$. Индекс k у чисел n_k и m_k означает, что функции φ_{m_k} и φ_{n_k} взяты из последовательности $\{\varphi_k\}$, но сами номера n_k и m_k не зависят от номера со значением k . Применяя к функциям φ_{m_k} , φ_{n_k} неравенства Кларксона (2), (3) и учитывая единичность норм этих функций, получим

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p + \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p \leq 1, \quad 2 \leq p < \infty.$$

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)} + \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)} \leq 1, \quad 1 < p \leq 2.$$

Оценим норму суммы φ_{m_k} и φ_{n_k} при любом p :

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p \leq 1 - \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p, \quad 2 \leq p < \infty,$$

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)} \leq 1 - \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2.$$

Далее,

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| \leq \left(1 - \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p \right)^{1/p}, \quad 2 \leq p < \infty,$$

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| \leq \left(1 - \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p}, \quad 1 < p \leq 2.$$

Для равномерно выпуклой единичной сферы норма полуразности равна единице $\left(\left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\| = 1 \right)$ только для пар функций, лежащих на диаметре, так что $\varphi_{n_k} = -\varphi_{m_k}$:

$$\left\| \frac{\varphi_{n_k} - (-\varphi_{n_k})}{2} \right\| = \left\| \frac{\varphi_{n_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| = \left\| \frac{2\varphi_{n_k}}{2} \right\| = \|\varphi_{n_k}\| = 1.$$

Для всех остальных пар функций норма полуразности строго меньше единицы:

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\| < 1 \quad \forall \varphi_{m_k}, \varphi_{n_k} : \varphi_{m_k} \neq -\varphi_{n_k}.$$

Поэтому правомерно разложение в сходящиеся ряды (отметим, что $1/p < 1$, $(p-1)/p < 1$):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| &\leq 1 - \frac{1}{p} \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p + \dots, \quad 2 \leq p < \infty, \\ \left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| &\leq 1 - \frac{p-1}{p} \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)} + \dots, \quad 1 < p \leq 2. \\ \left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| &\leq 1 - \left(\frac{1}{p} \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p - \dots \right), \quad 2 \leq p < \infty, \\ \left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| &\leq 1 - \left(\frac{p-1}{p} \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)} - \dots \right), \quad 1 < p \leq 2. \end{aligned}$$

Оба ряда в скобках знакопеременные, поэтому согласно теореме Лейбница

$$\begin{aligned} 0 < S^* &\leq \frac{1}{p} \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^p, \quad 2 \leq p < \infty, \\ 0 < S^{**} &\leq 1 - \frac{p-1}{p} \left\| \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2} \right\|^{p/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2. \end{aligned}$$

Возьмем далее $S = \min(S^*, S^{**})$. Тогда найдется такое η : $0 < \eta < S$, что

$$\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\| < 1 - \eta, \quad 1 < p < \infty. \quad (4)$$

Построим из указанных членов последовательности функцию с единичной нормой

$$\chi_k = \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{\|\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}\|}, \quad \|\chi_k\| = 1.$$

Линейный функционал на данной функции с учетом (4) будет удовлетворять неравенству

$$\begin{aligned}
 \langle l, \chi_k \rangle &= \left\langle l, \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{\|\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}\|} \right\rangle = \left\langle l, \frac{\frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2}}{\frac{\|\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}\|}{2}} \right\rangle = \\
 &= \left\langle l, \frac{\frac{1}{2}(\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k})}{\frac{\|\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}\|}{2}} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle l, \frac{(\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k})}{\|\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}\|} \right\rangle = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(\langle l, \varphi_{m_k} \rangle + \langle l, \varphi_{n_k} \rangle)}{\frac{\|\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}\|}{2}} > \frac{1}{2} \frac{(\langle l, \varphi_{m_k} \rangle + \langle l, \varphi_{n_k} \rangle)}{1 - \eta}.
 \end{aligned}$$

Вследствие сходимости $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle l, \varphi_{m_k} \rangle = g$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle l, \varphi_{n_k} \rangle = g$ при достаточно большом k будет верным неравенство

$$\langle l, \chi_k \rangle > \frac{1}{2} \frac{(\lim_{k \rightarrow \infty} \langle l, \varphi_{m_k} \rangle + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle l, \varphi_{n_k} \rangle)}{1 - \eta} = \frac{1}{2} \frac{(g + g)}{1 - \eta} = \frac{g}{1 - \eta} > g.$$

Полученное неравенство противоречит тому, что $\sup_{\|\varphi\|=1} |\langle l, \varphi \rangle| = g$. Следовательно, $\{\varphi_k\}$ сходится сильно, и вследствие полноты $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ существует предельный элемент φ_0 из $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$. Очевидно $\|\varphi_0\| = 1$.

3. Вариационная задача для линейного функционала

Лемма 3. Если для некоторой функции $\psi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$

$$\int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \psi dx = 0, \quad (5)$$

то $\langle l, \psi \rangle = 0$.

Доказательство. Рассмотрим $y(\lambda) = \langle l, (\varphi_0 + \lambda\psi)/\|\varphi_0 + \lambda\psi\| \rangle$, где функции линейно независимы: $\psi \neq c\varphi_0$. Так как $\|(\varphi_0 + \lambda\psi)/\|\varphi_0 + \lambda\psi\|\| = 1$ и $(\varphi_0 + \lambda\psi)/\|\varphi_0 + \lambda\psi\| \neq \varphi_0$ при $\lambda \neq 0$, то $y(\lambda) \leq g$, причем равенство достигается при $\lambda = 0$. Следовательно, при $\lambda = 0$ функция одной переменной $y(\lambda)$ имеет максимум. Если существует $y'(0)$, то $y'(0) = 0$. Покажем, что производная существует. Дифференцируя формально, имеем

$$\begin{aligned}
 y'_\lambda &= \frac{d}{d\lambda} \left[\left\langle l, \frac{\varphi_0 + \lambda\psi}{\|\varphi_0 + \lambda\psi\|} \right\rangle \right] = \left\langle l, \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\varphi_0 + \lambda\psi}{\|\varphi_0 + \lambda\psi\|} \right] \right\rangle = \\
 &= \left\langle l, \frac{\frac{d}{d\lambda} [\varphi_0 + \lambda\psi] \cdot \|\varphi_0 + \lambda\psi\| - (\varphi_0 + \lambda\psi) \cdot \frac{d}{d\lambda} [\|\varphi_0 + \lambda\psi\|]}{\|\varphi_0 + \lambda\psi\|^2} \right\rangle =
 \end{aligned}$$

$$= \left\langle l, \frac{\psi \|\varphi_0 + \lambda \psi\| - (\varphi_0 + \lambda \psi) \cdot \frac{d}{d\lambda} [\|\varphi_0 + \lambda \psi\|]}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|^2} \right\rangle.$$

Далее рассмотрим отдельно формальную производную нормы

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} [\|\varphi_0 + \lambda \psi\|] &= \frac{d}{d\lambda} \left[\int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p dx \right]^{1/p} = \\ &= \frac{1}{p} \left[\int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p dx \right]^{(1/p)-1} \frac{d}{d\lambda} \left[\int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p dx \right] = \\ &= \frac{1}{p} \left[\int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p dx \right]^{(1-p)/p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{d}{d\lambda} [|D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p] dx = \\ &= \frac{1}{p} \|\varphi_0 + \lambda \psi\|^{1-p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} p |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \frac{d}{d\lambda} [D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)] dx = \\ &= \frac{p}{p} \|\varphi_0 + \lambda \psi\|^{1-p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) \frac{d}{d\lambda} [D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)] dx = \\ &= \|\varphi_0 + \lambda \psi\|^{1-p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) \frac{d}{d\lambda} [(D^\alpha \varphi_0 + \lambda D^\alpha \psi)] dx = \\ &= \|\varphi_0 + \lambda \psi\|^{1-p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) D^\alpha \psi dx. \end{aligned}$$

Для доказательства существования производной интеграла по параметру выделим выражение, подлежащее оценке:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) D^\alpha \psi dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}_n} \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{(1/q)+(1/p)} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) D^\alpha \psi \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |\omega^{1/q} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) \omega^{1/p} D^\alpha \psi| dx. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) учтено соотношение $1/p + 1/q = 1$, связывающее сопряженные показатели. К сумме, стоящей под знаком интеграла крайней правой части (6), применим неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |\omega^{1/q} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) \omega^{1/p} D^\alpha \psi| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}_n} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |\omega^{1/q} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \text{sign } D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |\omega^{1/p} D^\alpha \psi|^p \right)^{1/p} dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{R}_n} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha \psi|^p \right)^{1/p} dx. \quad (7)$$

Теперь неравенство Гёльдера применим к интегралу (7):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}_n} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{1/q} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha \psi|^p \right)^{1/p} dx \leq \\ & \leq \left(\int_{\mathbf{R}_n} \left| \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p \right)^{1/q} \right|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbf{R}_n} \left| \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha \psi|^p \right)^{1/p} \right|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Упрощая показатели степеней и переходя к нормам, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbf{R}_n} \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p \right| dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbf{R}_n} \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha \psi|^p \right| dx \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha \psi|^p dx \right)^{1/p} = \\ & = \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega |D^\alpha \psi|^p dx \right)^{1/p} = \\ & = \|\varphi_0 + \lambda \psi\|^{p-1} \|\psi\|. \end{aligned}$$

Оценивающие нормы по условию существуют, что доказывает законность дифференцирования интеграла по параметру. Таким образом, производная исходной функции существует и равна

$$\begin{aligned} y'_\lambda &= \left\langle l, \frac{\psi \|\varphi_0 + \lambda \psi\| - (\varphi_0 + \lambda \psi) \cdot \frac{d}{d\lambda} [\|\varphi_0 + \lambda \psi\|]}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|^2} \right\rangle = \\ &= \left\langle l, \frac{\psi \|\varphi_0 + \lambda \psi\|}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|^2} \right\rangle - \left\langle l, \frac{(\varphi_0 + \lambda \psi) \cdot \frac{d}{d\lambda} [\|\varphi_0 + \lambda \psi\|]}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|^2} \right\rangle = \\ &= \frac{\langle l, \psi \rangle}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|} - \frac{\langle l, (\varphi_0 + \lambda \psi) \rangle}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|^2} \cdot \frac{d}{d\lambda} [\|\varphi_0 + \lambda \psi\|] = \frac{\langle l, \psi \rangle}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|} - \frac{\langle l, (\varphi_0 + \lambda \psi) \rangle}{\|\varphi_0 + \lambda \psi\|^2} \|\varphi_0 + \lambda \psi\|^{1-p} \times \\ & \quad \times \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi)|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha (\varphi_0 + \lambda \psi) D^\alpha \psi dx. \end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ имеем

$$y'_\lambda(0) = \frac{\langle l, \psi \rangle}{\|\varphi_0\|} - \frac{\langle l, \varphi_0 \rangle}{\|\varphi_0\|^2} \|\varphi_0\|^{1-p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \psi dx.$$

С учетом того, что $y'(0) = 0$,

$$\frac{\langle l, \psi \rangle}{\|\varphi_0\|} = \frac{\langle l, \varphi_0 \rangle}{\|\varphi_0\|^2} \|\varphi_0\|^{1-p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \psi dx,$$

или

$$\langle l, \psi \rangle = \frac{\langle l, \varphi_0 \rangle}{\|\varphi_0\|^p} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \psi dx.$$

Для ненулевой функции норма $\|\varphi_0\| \neq 0$ и функционал $\langle l, \varphi_0 \rangle \neq 0$. Более того, по условию $\|\varphi_0\| = 1$. Отсюда если

$$\int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \psi dx = 0,$$

то $\langle l, \psi \rangle = 0$. Таким образом, лемма доказана.

4. Представление линейного функционала через предельный элемент

Теорема 1. Всякий линейный функционал в $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ с нормой (1) представим в виде:

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \psi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \psi_0 D^\alpha \varphi dx,$$

где $\psi_0 = \varphi_0 \|l\|^{1/(p-1)}$, $\psi_0 \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$.

Доказательство. Покажем, что

$$\langle l, \varphi \rangle = g \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \varphi dx.$$

Пусть $\varphi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ – любая функция. Обозначим

$$a = \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \varphi dx.$$

Тогда функция $\psi = \varphi - a\varphi_0$ удовлетворяет (5):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha (\varphi - a\varphi_0) dx &= \\ &= \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \varphi dx - \\ &- a \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \varphi_0 dx = \\ &= a - a \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} |D^\alpha \varphi_0| dx = \\ &= a - a \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^p dx = a - a \|\varphi_0\|^p = a - a = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 3

$$\langle l, \psi \rangle = \langle l, \varphi - a\varphi_0 \rangle = \langle l, \varphi \rangle - a \langle l, \varphi_0 \rangle = 0 \Rightarrow \langle l, \varphi \rangle = a \langle l, \varphi_0 \rangle.$$

По лемме 2 $g = \langle l, \varphi_0 \rangle$ и

$$\langle l, \varphi \rangle = g \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \varphi dx.$$

Далее, по определению нормы функционала $g = \|l\|$. Отсюда

$$\begin{aligned} \|l\| |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 &= \|l\|^{(p-1)/(p-1)} |D^\alpha \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 = \\ &= |D^\alpha \varphi_0| \|l\|^{1/(p-1)} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 \|l\|^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Обозначив $\psi_0 = \varphi_0 \|l\|^{1/(p-1)}$, получим

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \psi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \psi_0 D^\alpha \varphi dx. \quad (8)$$

Теорема доказана.

5. Нелинейное уравнение и равносильность представлений для финитных функционалов

В данном пункте результаты, полученные выше для любых линейных функционалов, соединяются с результатами работы [1] для линейного финитного функционала. Ограниченность носителя функционала здесь необходима для существования свертки фундаментального решения дифференциального оператора с рассматриваемым функционалом.

Интегрируя по частям (8), получим

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\omega |D^\alpha \psi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \psi_0 \right) \varphi dx.$$

Относительно неизвестной функции ψ_0 получается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных над функцией φ основного пространства:

$$l = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\omega |D^\alpha \psi_0|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \psi_0 \right). \quad (9)$$

Уравнение (9) связывает данный линейный финитный функционал l , заданную при нормировании пространства весовую функцию ω и неизвестную функцию ψ_0 . Выше показано, что ψ_0 является для данного функционала l единственным элементом в основном пространстве.

Частный случай такого уравнения в невесовом ($\omega = 1$) гильбертовом ($p = 2$) пространстве имеет вид:

$$l = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} \psi_0. \quad (10)$$

Структура решения этого уравнения описана в [1] на основе общего случая линейного оператора с постоянными коэффициентами [43]. Для получения явного вида искомой функции здесь требуется знание фундаментального решения E уравнения (10), так как $\psi_0 = E * l$. Однако к настоящему времени фундаментальное решение этого уравнения в явном виде не найдено. Оператор уравнения (10) может быть выражен через оператор Лапласа:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} &= \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2k} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \Delta^k. \end{aligned}$$

Уравнение вида (10) использовалось нами в [1] для установления представления линейного финитного функционала и нахождения соответствующей ему экстремальной функции, принадлежащей основному пространству в весовом негильбертовом случае. Представление и экстремальная функция выражались через свертку фундаментального решения с функционалом. Приведем формулировки соответствующих теорем.

Теорема 2 [1]. Для всякого линейного финитного функционала $l \in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)$, $\text{supp}(l) \subseteq \Omega$, при условии $pm > n$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, существует экстремальная функция $\psi_l \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, которая имеет вид:

$$\psi_l = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * \left(\left| \frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \text{sgn} \left(\frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right) \right).$$

Теорема 3 [1]. Экстремальная функция $\psi_l \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ линейного финитного функционала $l \in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)$, $\text{supp}(l) \subseteq \Omega$, при условии $pm > n$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, единственна.

На основании этих утверждений решение уравнения (9) может быть получено через решение уравнения (10), т.е. имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Решением уравнения (9) в условиях теорем 2 и 3 [1] является экстремальная функция $\psi_l \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ линейного финитного функционала $l \in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)$. Решение уравнения (9) единственно.

Доказательство. Из построения экстремальной функции в [1] следует

$$D^\alpha \psi_l = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * D^\alpha \psi_l,$$

где E – фундаментальное решение уравнения (10), и

$$D^\alpha \psi_l = \left| \frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \text{sign} \left(\frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right), \quad |\alpha| \leq m. \quad (11)$$

Подстановка $D^\alpha \psi_0 = D^\alpha \psi_l$ в уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} l = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\omega \left| \frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \text{sign} \left(\frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right) \right)^{p-1} \times \\ \times \text{sign} \left(\left| \frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \text{sign} \left(\frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\left| \text{sign} \left(\frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right) \right| = 1$$

и что в силу положительности ω

$$\operatorname{sign} \left(\left| \frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sign} \left(\frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right) \right) = \operatorname{sign} D^\alpha(E * l), \quad (12)$$

получаем

$$\begin{aligned} l &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\omega \left| \frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right|^{(p-1)/(p-1)} \operatorname{sign} D^\alpha(E * l) \right), \\ l &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(D^\alpha(E * l) \operatorname{sign} D^\alpha(E * l) \right), \\ l &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(D^\alpha(E * l) \right), \\ l &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}(E * l). \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение (13) представляет собой верное равенство [1]. Следовательно, экстремальная функция

$$\psi_l = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * \left(\left| \frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sign} \left(\frac{D^\alpha(E * l)}{\omega} \right) \right)$$

является решением уравнения (9).

Единственность решения уравнения (9) следует из единственности предельного элемента φ_0 , установленной в лемме 2.

Лемма доказана.

Теорема 5. Представления линейного финитного функционала в $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha \psi_l|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \psi_l D^\alpha \varphi dx \quad (14)$$

и

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha(E * l) D^\alpha \varphi dx \quad (15)$$

в условиях теорем 2 и 3 [1] равносильны.

Доказательство выполняется, как и в теореме 4, подстановкой выражения для экстремальной функции в представление (14) с учетом (11) и (12), что приводит к представлению (15).

Теорема доказана.

Список источников

1. Корытов И.В. Экстремальная функция линейного функционала в весовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2 (14). С. 5–15.
2. Корытов И.В. Равномерная выпуклость весового пространства Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 6 (32). С. 25–34.

3. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988. 333 с.
4. *Агранович М.С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М. : Изд-во МЦНМО, 2013. 378 с.
5. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. 416 с.
6. *Шубин М.А.* Лекции об уравнениях математической физики. М. : Изд-во МЦНМО, 2003. 303 с.
7. *Шойнжуров Ц.Б.* О приближенном интегрировании функций в пространствах С.Л. Соболева с весом // Доклады Академии наук СССР. 1974. Т. 218, № 4. С. 775–778.
8. *Корытов И.В.* Представление функционала погрешности кубатурной формулы в весовом пространстве Соболева // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, спец. вып. С. 59–66.
9. *Корытов И.В.* Функция, представляющая функционал погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323, № 2. С. 21–25.
10. *Соболев С.Л.* О задаче интерполирования функций n переменных // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т. 137, № 4. С. 778–781.
11. *Соболев С.Л.* О формулах механических кубатур в n -мерном пространстве // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т. 137, № 3. С. 527–530.
12. *Соболев С.Л.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул. Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1963. 8 с.
13. *Соболев С.Л.* О кубатурных формулах // Studia Mathematica. 1963. Vol. 1. P. 117–118.
14. *Соболев С.Л.* Лекции по теории кубатурных формул : спецкурс, прочитанный в НГУ в 1963/64 учебном году. Новосибирск : Изд-во НГУ, 1964. 192 с.
15. *Соболев С.Л.* Лекции по теории кубатурных формул : курс, прочитанный в НГУ в 1964/65 учебном году. Новосибирск : Изд-во НГУ, 1965. 263 с.
16. *Бабушка И., Соболев С.Л.* Оптимизация численных методов // Aplikace Matematiky. 1965. V. 10 (2). P. 96–129.
17. *Соболев С.Л.* Сходимость формул приближенного интегрирования на функциях из $L_2^{(m)}$ // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 162, № 6. С. 1259–1261.
18. *Соболев С.Л.* Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 587–590.
19. *Соболев С.Л.* О порядке сходимости кубатурных формул // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 162, № 5. С. 1005–1008.
20. *Соболев С.Л.* О построении кубатурных формул с регулярным пограничным слоем // Доклады Академии наук СССР. 1966. Т. 166, № 2. С. 295–297.
21. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974. 808 с.
22. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск : Ин-т математики СО РАН, 1996. 483 с.
23. *Polovinkin V.I.* Some estimates of norms of functionals of cubature formula errors // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1969. V. 5 (3). P. 192–195. doi: 10.1007/BF01388625
24. *Polovinkin V.I.* On cubature formulas with regular boundary layer // Siberian Mathematical Journal. 1972. V. 13 (4). P. 663–665. doi: 10.1007/BF00971061
25. *Шойнжуров Ц.Б.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $W_2^{(m)}$ // Сибирский математический журнал. 1967. Т. 8, № 2. С. 433–446.
26. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка функционалов погрешности кубатурной формулы в пространствах с нормой, зависящей от младших производных : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1967. 83 с.
27. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка нормы функционала погрешности интерполяционных формул в пространстве Соболева $L^{(m)}_2$ // Труды МИАН СССР. 1987. Т. 180. С. 234–235.

28. Шойнжуров Ц.Б. Некоторые вопросы теории кубатурных формул в неизотропных пространствах С.Л. Соболева // Доклады Академии наук СССР. 1973. Т. 209, № 5. С. 1036–1038.
29. Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Улан-Удэ, 1977. 235 с.
30. Polovinkin V.I. Asymptotic optimality of sequences of formulas with a regular boundary layer for odd m // Siberian Mathematical Journal. 1975. V. 16 (2). P. 253–258. doi: 10.1007/BF00967509
31. Polovinkin V.I. Representation of linear functionals in $L_q^{(m*)}(\Omega)$ // Siberian Mathematical Journal. 1995. V. 36 (1). P. 140–142. doi: 10.1007/BF02113927
32. Polovinkin V.I. Representation of functionals on the spaces $L_p^m(E_n)$ // Siberian Mathematical Journal. 1997. V. 38 (1). P. 140–146. doi: 10.1007/BF02674910
33. Polovinkin V.I. A formula for the functions realizing functionals // Siberian Mathematical Journal. 2001. V. 42 (4). P. 774–778. doi: 10.1023/A:1010457817521.
34. Шойнжуров Ц.Б. Кубатурные формулы в пространстве С.Л. Соболева W_p^m . Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2002. 201 с.
35. Шойнжуров Ц.Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. науч. центра СО РАН, 2005. 247 с.
36. Корытов И.В. Неравенства Кларксона для пространства Соболева периодических функций // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2016. Т. 158, № 3. С. 336–349.
37. Korytov I.V. Clarkson's inequalities for periodic Sobolev space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38 (6). P. 1146–1155. doi: 10.1134/S1995080217060178
38. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}$ // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2013. V. 243 (1). P. 91–112. doi: 10.1016/j.cam.2012.11.010
39. Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formula in the sense of Sard in $K_2(P_3)$ space // Publications de l'Institut Mathématique. 2014. V. 95 (109). P. 29–47. doi: 10.2298/PIM1409029H
40. Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(M, m-1)}$ space // Journal of Applied Analysis and Computation. 2017. V. 7 (4). P. 1233–1266. doi: 10.11948/2017076
41. Vaskevich V.L. Extremal functions of cubature formulas on a multidimensional sphere and spherical splines // Siberian Advances in Mathematics, 2012. V. 22 (3). P. 217–226. doi: 10.3103/S1055134412030054
42. Vaskevich V.L. Errors, condition numbers, and guaranteed accuracy of higher dimensional spherical cubatures // Siberian Mathematical Journal. 2012. V. 53 (6). P. 996–1010. doi: 10.1134/S0037446612060043
43. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.

References

1. Korytov I.V. (2011) Ekstremal'naya funktsiya lineynogo funktsionala v vesovom prostranstve Soboleva [The extreme function of a linear functional in the weighted Sobolev space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(14). pp. 5–15.
2. Korytov I.V. (2014) Ravnomernaya vypuklost' vesovogo prostranstva Soboleva [Uniform convexity of weighted Sobolev space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*.

- Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 6(32). pp. 25–34.
3. Sobolev S.L. (1988) *Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
 4. Agranovich M.S. (2013) *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskiye zadachi v oblastiakh s gladoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, their generalizations and elliptical problems in regions with a smooth and Lipschitz boundary]. Moscow: MCNMO.
 5. Maz'ya V.G. (1985) *Prostranstva S.L. Soboleva* [Sobolev spaces]. Leningrad: Leningrad State University.
 6. Shubin M.A. (2003) *Lektsii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki*. [Lectures on equations of mathematical physics]. Moscow: MCNMO.
 7. Shoynzhuov Ts.B. (1974) O priblizhennom integririrovani funktsiy v prostranstvakh S.L. Soboleva s vesom [On the approximate integration of functions in S.L. Sobolev spaces with weight]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 218(4). pp. 775–778.
 8. Korytov I.V. (2006) Predstavleniye funktsionala pogreshnosti kubaturnoy formuly v vesovom prostranstve Soboleva [Representation of the error functional of a cubature formula in the weighted Sobolev space]. *Vychislitel'nyye tekhnologii – Computational Technologies*. 11. Special issue. pp. 59–66.
 9. Korytov I.V. (2013) Funktsiya, predstavlyayushchaya funktsional pogreshnosti kubaturnoy formuly v prostranstve Soboleva [A function representing the error functional of a cubature formula in the Sobolev space]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 323(2). pp. 21–25.
 10. Sobolev S.L. (1961) O zadache interpolirovaniya funktsiy n peremennykh [On the problem of interpolation of functions of n variables]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 137(4). pp. 778–781.
 11. Sobolev S.L. (1961) O formulakh mekhanicheskikh kubatur v n -mernom prostranstve [On formulas for mechanical cubatures in the n -dimensional space]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 137(3). pp. 527–530.
 12. Sobolev S.L. (1963) *Nekotoryye voprosy teorii kubaturnykh formul* [Some questions of the theory of cubature formulas]. Novosibirsk: SB AS USSR Publ.
 13. Sobolev S.L. (1963) O kubaturnykh formulakh [On cubature formulas]. *Studia Mathematica. Seria Specjalna*. 1. pp. 117–118.
 14. Sobolev S.L. (1964) *Lektsii po teorii kubaturnykh formul: kurs, prochitannyy v NGU v 1963/64 uchebnom godu* [Lectures on the theory of cubature formulas: a special course, given at Novosibirsk State University in the 1963/64 academic year]. Novosibirsk: Novosibirsk State University.
 15. Sobolev S.L. (1965) *Lektsii po teorii kubaturnykh formul: kurs, prochitannyy v NGU v 1964/65 uchebnom godu* [Lectures on the theory of cubature formulas: a course, given at NSU in the 1964/65 academic year]. Novosibirsk: Novosibirsk State University.
 16. Babuška I., Sobolev S.L. (1965) Optimizatsiya chislennykh metodov [Optimization of numerical methods]. *Aplikace Matematiky*. 10(2). pp. 96–129.
 17. Sobolev S.L. (1965) Skhodimost' formul priblizhennogo integririrovaniya na funktsiyakh iz $L_2^{(m)}$ [Convergence of approximate integration formulas on functions from $L_2^{(m)}$]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 162(6). pp. 1259–1261.
 18. Sobolev S.L. (1965) Kubaturnyye formuly s regul'yarnym pogranichnym slozem [Cubature formulas with a regular boundary layer]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 163(3). pp. 587–590.
 19. Sobolev S.L. (1965) O poryadke skhodimosti kubaturnykh formul [On the order of convergence of cubature formulas]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 162(5). pp. 1005–1008.
 20. Sobolev S.L. (1966) O postroyenii kubaturnykh formul s regul'yarnym pogranichnym slozem [On the construction of cubature formulas with a regular boundary layer]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 166(2). pp. 295–297.

21. Sobolev S.L. (1974) *Vvedeniye v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the theory of cubature formulas]. Moscow: Nauka.
22. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. (1996) *Kubaturnyye formuly* [Cubature formulas]. Novosibirsk: Institute of Mathematics SB RAS.
23. Polovinkin V.I. (1969) Some estimates of norms of functionals of cubature formula errors. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 5(3). pp. 192–195. DOI: 10.1007/BF01388625.
24. Polovinkin V.I. (1972) On cubature formulas with regular boundary layer. *Siberian Mathematical Journal*. 13(4). pp. 663–665. DOI: 10.1007/BF00971061.
25. Shoynzurov Ts.B. (1967) Nekotoryye voprosy teorii kubaturnykh formul v prostranstve $W_2^{(m)}$ [Some questions of the theory of cubature formulas in the space $W_2^{(m)}$]. *Sibirskiy matematicheskii zhurnal – Siberian Mathematical Journal*. 8(2). pp. 433–446.
26. Shoynzurov Ts.B. (1967) *Otsenka funktsionalov pogreshnosti kubaturnoy formuly v prostranstvakh s normoy, zavisyashchey ot mladshikh proizvodnykh* [Estimation of error functionals of the cubature formula in spaces with a norm dependent on junior derivatives]. Dissertation. Novosibirsk.
27. Shoynzurov Ts.B. (1987) Otsenka normy funktsionala pogreshnosti interpolatsionnykh formul v prostranstve Soboleva $L_2^{(m)}$ [Estimation of the norm of the error functional for interpolation formulas in the Sobolev space $L_2^{(m)}$]. *Trudy MIAN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 180. pp. 234–235.
28. Shoynzurov Ts.B. (1973) Nekotoryye voprosy teorii kubaturnykh formul v neizotropnykh prostranstvakh S.L. Soboleva [Some issues of the theory of cubature formulas in nonisotropic Sobolev spaces]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 209(5). pp. 1036–1038.
29. Shoynzurov Ts.B. (1977) *Teoriya kubaturnykh formul v funktsional'nykh prostranstvakh s normoy, zavisyashchey ot funktsii i eye proizvodnykh* [Theory of cubature formulas in functional spaces with a norm depending on a function and its derivatives]. Dissertation. Ulan-Ude.
30. Polovinkin V.I. (1975) Asymptotic optimality of sequences of formulas with a regular boundary layer for odd m . *Siberian Mathematical Journal*. 16(2). pp. 253–258. DOI: 10.1007/BF00967509.
31. Polovinkin V.I. (1995) Representation of linear functionals in $L_q^{(m*)}(\Omega)$. *Siberian Mathematical Journal*. 36(1). pp. 140–142. DOI: 10.1007/BF02113927.
32. Polovinkin V.I. (1997) Representation of functionals on the spaces $L_p^m(E_n)$. *Siberian Mathematical Journal*. 38(1). pp. 140–146. DOI: 10.1007/BF02674910.
33. Polovinkin V.I. (2001) A formula for the functions realizing functionals. *Siberian Mathematical Journal*. 42(4). pp. 774–778. DOI: 10.1023/A:1010457817521.
34. Shoynzurov Ts.B. (2002) *Kubaturnyye formuly v prostranstve S.L. Soboleva W_p^m* [Cubature formulas in S.L. Sobolev space W_p^m]. Ulan-Ude: VSGTU.
35. Shoynzurov Ts.B. (2005) *Otsenka normy funktsionala pogreshnosti kubaturnykh formul v razlichnykh funktsional'nykh prostranstvakh* [Estimation of the norm of the error functional of cubature formulas in different functional spaces]. Ulan-Ude: Buryat Scientific Center SB RAS.
36. Korytov I.B. (2016) Neravenstva Klarksona dlya prostranstva Soboleva periodicheskikh funktsiy [Clarkson's inequalities for periodic Sobolev space]. *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie Nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 158(3). pp. 336–349.
37. Korytov I.V. (2017) Clarkson's inequalities for periodic Sobolev space. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 38(6). pp. 1146–1155. DOI: 10.1134/S1995080217060178.

38. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. (2013) On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 243(1). pp. 91–112. DOI: 10.1016/j.cam.2012.11.010.
39. Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. (2014) Optimal quadrature formula in the sense of Sard in $K_2(P_3)$ space. *Publications de l'Institut Mathématique*. 95(109). pp. 29–47. DOI: 10.2298/PIM1409029H.
40. Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. (2017) Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(M,m-1)}$ space. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 7(4). pp. 1233–1266. DOI: 10.11948/2017076.
41. Vaskevich V.L. (2012) Extremal functions of cubature formulas on a multidimensional sphere and spherical splines. *Siberian Advances in Mathematics*. 22(3). pp. 217–226. DOI: 10.3103/S1055134412030054.
42. Vaskevich V.L. (2012) Errors, condition numbers, and guaranteed accuracy of higher dimensional spherical cubatures. *Siberian Mathematical Journal*. 53(6). pp. 996–1010. DOI: 10.1134/S0037446612060043.
43. Vladimirov V.S. (1981) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Корытов Игорь Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент отделения математики и информатики Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: korytov@tpu.ru

Information about the author:

Korytov Igor V. (Candidate of in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Division for Mathematics and Computer Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: korytov@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 07.12.2021; принята к публикации 03.02.2023

The article was submitted 07.12.2021; accepted for publication 03.02.2023