

Научная статья

УДК 514.7

MSC: 51F15; 14L24

doi: 10.17223/19988621/81/4

О базисных инвариантах некоторых конечных подгрупп в $SL_3(\mathbb{C})$

Олег Иванович Рудницкий

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия,
oirud58@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена изучению алгебр инвариантов конечных унитарных групп $G' = G \cap SL_3(\mathbb{C})$, где G – конечная унитарная неприводимая примитивная группа, порожденная отражениями в унитарном пространстве U^3 . Известно, что система образующих алгебры инвариантов группы G' получается из системы образующих алгебры инвариантов группы G присоединением всех полуинвариантов группы G специального вида. В статье построены образующие алгебры инвариантов всех указанных групп G' .

Ключевые слова: унитарное пространство, отражение, группа отражений, инвариант, полуинвариант, алгебра инвариантов, базисные инварианты

Для цитирования: Рудницкий О.И. О базисных инвариантах некоторых конечных подгрупп в $SL_3(\mathbb{C})$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 39–48. doi: 10.17223/19988621/81/4

Original article

On basic invariants of some finite subgroups in $SL_3(\mathbb{C})$

Oleg I. Rudnitskii

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation,
oirud58@gmail.com

Abstract. In an n -dimensional unitary space U^n we introduce an orthogonal coordinate system: $\mathbf{e}_i, i = \overline{1, n}$ is the orthonormal basis, any vector $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. Let G be a finite irreducible unitary group generated by reflections σ with respect to hyperplanes h_σ with a common point in the origin of the coordinate system.

A polynomial $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ is called a semi-invariant of the group G if

$$g \cdot f(\mathbf{x}) = f(g^{-1} \mathbf{x}) = \chi(g) f(\mathbf{x}) \text{ for all } g \in G,$$

where $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ is the character of G . If $\chi = 1$, then $f(\mathbf{x})$ is called an invariant of G . It is known that algebra I^G of all invariants of G is generated by n algebraically independent polynomials (Shephard G.C. and Todd J.A.).

T.A. Springer proposed a method for finding the generators of the algebra of invariants of the group G' not generated by reflections: if G' is a subgroup of G such that each homogeneous invariant of G' is a semi-invariant of G and vice versa, then the system of generators for algebra $I^{G'}$ consists of the system of generators for algebra I^G and of all semi-invariants of G of the form

$$f_O = \prod_{h_O \in O} l_O,$$

where O is an orbit of group G in a set of all hyperplanes h_O ; $l_O \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ is the linear function for which h_O is the set of its zeros. Using this method and the theory of invariants of finite groups G generated by reflections, Springer constructed the algebras of invariants of the two groups $G' = G \cap SL_3(\mathbb{C})$.

In this paper, using the abovementioned method, generators of the algebras of invariants of all groups $G' = G \cap SL_3(\mathbb{C})$ were constructed, where G is a finite irreducible unitary group generated by reflections in the space U^3 . Also, all the relations between these generators are established.

Keywords: unitary space, reflection, reflection groups, invariant, semi-invariant, algebra of invariants, basic invariants

For citation: Rudnitskii, O.I. (2023) On basic invariants of some finite subgroups in $SL_3(\mathbb{C})$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 39–48. doi: 10.17223/19988621/81/4

Введение. Постановка задачи

Введем в n -мерном унитарном пространстве U^n ортогональную систему координат: $\{\mathbf{e}_i, i = \overline{1, n}\}$ – ортонормированный базис, вектор $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. Отражением

σ порядка l в пространстве U^n называется унитарное преобразование порядка l , множество неподвижных точек которого является плоскостью h_σ размерности $n - 1$. Эту плоскость называют гиперплоскостью отражения или симметрии.

Пусть G – конечная неприводимая унитарная группа, порожденная отражениями σ относительно гиперплоскостей отражения h_σ с общей точкой в начале координат. Обозначим через $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ кольцо многочленов от n переменных над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Действие группы G на кольце R определим с помощью равенства

$$g \cdot f = g \cdot f(\mathbf{x}) = f(g^{-1} \mathbf{x}),$$

где $g \in G, f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \in R$.

Многочлен $f \in R$ называется **полуинвариантом** (относительным инвариантом) группы G , если существует такая функция $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ (характер группы G), что

$$g \cdot f = \chi(g) f$$

для всех $g \in G$.

Если $\chi = 1$, то f называется **инвариантом группы** G . Известно [1], что множество всех инвариантов группы G образует алгебру I^G , которая порождается n алгебраически независимыми многочленами f_{m_i} (базисные инварианты) степеней $m_i, i = 1, 2, \dots, n$ (показатели группы).

Описание полуинвариантов группы G дано в работе [2]. Приведем его здесь.

Пусть H – множество всех гиперплоскостей h_σ и O – орбита группы G в H . Положим

$$f_O = \prod_{h_\sigma \in O} l_\sigma,$$

где $l_\sigma \in R$ – линейная функция, для которой h_σ – множество ее нулей.

Многочлен f_O определяется орбитой O с точностью до скалярного множителя. Если $l = e(h_\sigma)$ – порядок отражения σ , то положим $e(O) = e(h_\sigma)$, где h_σ – некоторый элемент из орбиты O . Справедлива следующая теорема [2. С. 100].

Теорема. (i) *Функции f_O являются полуинвариантами группы G . Точнее, если $\sigma \in G$ – отражение, то $\sigma \cdot f_O = f_O$ при $h_\sigma \notin O$ и $\sigma \cdot f_O = \xi_\sigma^{-1} f_O$ при $h_\sigma \in O$, где ξ_σ – собственное значение отражения σ , отличное от 1.*

(ii) *Любой однородный полуинвариант f группы G может быть записан в виде $f = (\prod_O f_O^{a(O)}) f_1$, где $0 \leq a(O) < e(O)$, $f_1 \in I^G$. Такая запись единственна.*

В [2] эта теорема применяется для нахождения образующих алгебр инвариантов двух групп $G' = G \cap SL_3(\mathbb{C})$, не порожденных отражениями. Идея такого применения состоит в следующем.

Пусть G – конечная неприводимая унитарная группа, порожденная отражениями, и G' – такая ее подгруппа, что всякий однородный инвариант группы G' является полуинвариантом группы G , и наоборот. Тогда ввиду приведенной теоремы система образующих алгебры $I^{G'}$ получается из системы образующих алгебры I^G присоединением всех полуинвариантов группы G вида f_O .

В настоящей статье продолжены начатые в [2] исследования и построены образующие алгебр инвариантов для всех конечных унитарных групп $G' = G \cap SL_3(\mathbb{C})$.

Для вычислений был использован программный пакет – система компьютерной алгебры Maple.

Образующие алгебр инвариантов унитарных групп $G' = G \cap SL_3(\mathbb{C})$

В пространстве U^3 существуют четыре конечные примитивные унитарные группы G [3]. Это группы $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$, $W(L_3)$ и $W(M_3)$. Рассмотрим соответствующую каждой из них группу G' и ее алгебру инвариантов.

1. Группа $W(J_3(4))$ порядка 336 порождается отражениями второго порядка относительно 21 плоскости с уравнениями [4]

$$x_i = 0, x_i \pm x_j = 0, i, j = \overline{1, 3} (i < j), x_i \pm x_j \pm \alpha x_k = 0, \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{1 - \varepsilon \sqrt{7}}{2}$ – корень уравнения $z^2 - z + 2 = 0$, $\varepsilon = \sqrt{-1}$, $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ – циклически.

Группа содержит скалярное умножение на -1 , показатели группы равны $m_i = 4, 6, 14$ [1]. Образующие алгебры $I^{W(J_3(4))}$ имеют вид [4]:

$$f_4 = \sum x_i^4 - 3\bar{\alpha} \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2,$$

$$f_6 = 2 \sum x_i^6 + 5\bar{\alpha} \sum x_i^4 x_j^2 + 20\alpha^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

$$f_{14} = 382 \sum x_i^{14} - 793 \bar{\alpha} \sum x_i^{12} x_j^2 + 143(16 - 21\bar{\alpha}) \sum x_i^{10} x_j^4 - \\ - 143(16 + 95\bar{\alpha}) \sum x_i^8 x_j^6 + 572(21 + 9\bar{\alpha}) \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 - \\ - 4290(19 - 5\bar{\alpha}) \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 + 8008(13 - 11\bar{\alpha}) \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 + 20020(5 + \bar{\alpha}) \sum_{j < k} x_i^6 x_j^4 x_k^4,$$

здесь и далее, если не оговорено иное, индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3 и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

Пусть S – множество, состоящее из 42 единичных нормальных векторов плоскостей (1):

$$\pm \mathbf{e}_i, \pm \frac{\alpha}{2}(\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j), \pm \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j \pm \bar{\alpha} \mathbf{e}_k).$$

Нетрудно убедиться в том, что множество S инвариантно относительно действия группы $W(J_3(4))$ и $S = W(J_3(4)) \cdot \mathbf{e}_2$.

Таким образом, есть только одна орбита O группы $W(J_3(4))$ в множестве плоскостей (1) и, следовательно, лишь один полином

$$f_O = f_{21} = 16 \sum (-1)^p x_i^{17} x_j^3 x_k^3 + 24 \bar{\alpha} \sum (-1)^p x_i^{15} x_j^5 x_k^3 - \\ - (46 + 27 \bar{\alpha}) \sum (-1)^p x_i^{13} x_j^7 x_k^3 + 13(2 - 3 \bar{\alpha}) \sum (-1)^p x_i^{11} x_j^9 x_k^3 + \\ + 7(22 + 39 \bar{\alpha}) \sum (-1)^p x_i^{13} x_j^5 x_k^3 - 26(10 - 7 \bar{\alpha}) \sum (-1)^p x_i^{11} x_j^7 x_k^3 - 143(2 - 3 \bar{\alpha}) \sum (-1)^p x_i^9 x_j^7 x_k^5,$$

здесь $p = 2$ или 1, если индексы (i, j, k) принимают значения соответственно четных (циклических) или нечетных перестановок чисел (1, 2, 3).

Следовательно, любой полуинвариант группы $W(J_3(4))$ представим в виде $(f_{21})^{\alpha(O)} f_1$, где $0 \leq \alpha(O) < 2$, $f_1 \in I^{W(J_3(4))}$.

Пусть $G' = W(J_3(4)) \cap SL_3(\mathbb{C})$. Это группа порядка 168. Любой однородный инвариант группы G' является полуинвариантом группы $W(J_3(4))$, и наоборот. Таким образом, алгебра $I^{G'}$ инвариантов группы G' порождается многочленами f_4, f_6, f_{14} и f_{21} .

При этом, так как $(f_{21})^2$ – инвариант степени 42 группы $W(J_3(4))$, то его можно представить так:

$$(f_{21})^2 = \beta(f_{14})^3 + \delta(f_6)^7 + f_4 F,$$

где $F \in I^{W(J_3(4))}$ – полином степени 38; β, δ – неопределенные коэффициенты.

Для определения коэффициента δ возьмем вектор

$$\mathbf{x}_0 = 2\sqrt{3}\varepsilon\bar{\alpha}\mathbf{e}_1 + (2\sqrt{3}\varepsilon\alpha - 6)\mathbf{e}_2 + (2\sqrt{3}\varepsilon\alpha + 6)\mathbf{e}_3,$$

такой что $f_4(\mathbf{x}_0) = f_{14}(\mathbf{x}_0) = 0$. Тогда $(f_{21}(\mathbf{x}_0))^2 = \delta(f_6(\mathbf{x}_0))^7$ и $\delta = \frac{27\alpha^4}{13176688}$.

Далее, возьмем вектор $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \varepsilon\mathbf{e}_2 + (\varepsilon\sqrt[8]{7}\sqrt{\bar{\alpha}})\mathbf{e}_3$, такой что $f_4(\mathbf{x}_1) = 0$. Здесь и далее рассматриваются арифметические корни из вещественных чисел, ζ – первообразный корень 16-й степени из единицы.

Тогда с помощью явных вычислений можно найти коэффициент

$$\beta = \frac{\alpha^4}{1509902464}.$$

Если обозначить

$$\tilde{f}_4 = \frac{\bar{\alpha}^4}{16} f_4, \tilde{f}_6 = \frac{1}{14} f_6, \tilde{f}_{14} = \frac{1}{6664} f_{14}, \tilde{f}_{21} = \frac{\bar{\alpha}^2}{4} f_{21},$$

то справедливо следующее соотношение:

$$(\tilde{f}_{21})^2 = 196(\tilde{f}_{14})^3 + 216(\tilde{f}_6)^7 + \tilde{f}_4 \tilde{F}. \quad (2)$$

Итак, $I^G = \mathbb{C}[\tilde{f}_4, \tilde{f}_6, \tilde{f}_{14}, \tilde{f}_{21}]$ с соотношением (2) для образующих.

Отметим, что данный результат также получен в [2], но в системе координат, где базисные векторы – собственные векторы преобразования Коксетера–Киллинга группы $W(J_3(4))$.

2. Рассмотрим группу $W(J_3(5))$. Она имеет порядок 2 160 и порождается отражениями второго порядка относительно 45 плоскостей с уравнениями [4]

$$\begin{aligned} x_i &= 0, x_i \pm x_j = 0 \ (i < j), i, j = \overline{1, 3}, \\ x_i \pm (\omega - \gamma)x_j \pm x_k &= 0, \omega x_i \pm \gamma \omega^2 x_m \pm r x_l = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $r = \gamma^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{5}$, $\omega = \frac{-1 + \varepsilon \sqrt{3}}{2}$ – первообразный корень третьей степени из единицы, индексы $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ – циклически; $l, m, t = 1, 2, 3$.

Образующие алгебры $I^{W(J_3(5))}$ степеней $m_i = 6, 12, 30$ [1] имеют следующий развернутый вид [4]:

$$\begin{aligned} f_6 &= 4 \sum x_i^6 - 3(5 + \varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^4 x_j^2 + 12(5 - \varepsilon \sqrt{15}) x_1^2 x_2^2 x_3^2, \\ f_{12} &= 148 \sum x_i^{12} - 66(5 + \varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{10} x_j^2 - \\ &\quad - 165(7 - 5\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^8 x_j^4 + 308(7 + 3\varepsilon \sqrt{15}) \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + \\ &\quad + 660(19 + \varepsilon \sqrt{15}) \sum_{j < k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 - 18480 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 - 4620(3 + \varepsilon \sqrt{15}) x_1^4 x_2^4 x_3^4, \\ f_{30} &= 24195204 \sum x_i^{30} - 3603975(5 + \varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{28} x_j^2 - \\ &\quad - 9135(39147 - 15281\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{26} x_j^4 + 13195(461197 + 13953\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{24} x_j^6 - \\ &\quad - 130065(44261 + 23105\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{22} x_j^8 + 10015005(821 + \\ &\quad + 1745\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{20} x_j^{10} + 5766215(21871 + 4587\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{18} x_j^{12} + \\ &\quad + 3231615(32539 + 12479\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{16} x_j^{14} + \\ &\quad + 109620(27493 + 279\varepsilon \sqrt{15}) \sum_{j < k} x_i^{26} x_j^2 x_k^2 - 791700(31441 + 5358\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{24} x_j^4 x_k^2 - \\ &\quad - 101970960(1343 - 342\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{22} x_j^6 x_k^2 + 60090030(13927 - 299\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{20} x_j^8 x_k^2 - \\ &\quad - 1522280760(243 + 130\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{18} x_j^{10} x_k^2 - 1176307860(601 - 202\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{16} x_j^{12} x_k^2 + \\ &\quad + 775587600(791 - 27\varepsilon \sqrt{15}) \sum_{i < j} x_i^{14} x_j^{14} x_k^2 + 18209100(21651 - \\ &\quad - 991\varepsilon \sqrt{15}) \sum_{j < k} x_i^{22} x_j^4 x_k^4 - 1682520840(233 + 152\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{20} x_j^6 x_k^4 - \\ &\quad - 3805701900(91 - 248\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{18} x_j^8 x_k^4 + \\ &\quad + 6469693230(547 + 113\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{16} x_j^{10} x_k^4 - \\ &\quad - 23526157200(219 + 40\varepsilon \sqrt{15}) \sum x_i^{14} x_j^{12} x_k^4 + 3551988440(2051 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +177\varepsilon\sqrt{15})\sum_{j<k}x_i^{18}x_j^6x_k^6-116454478140(65-16\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{16}x_j^8x_k^6- \\
 & -13560477010080\sum x_i^{14}x_j^{10}x_k^6+214088030520(17-21\varepsilon\sqrt{15})\sum_{i<j}x_i^{12}x_j^{12}x_k^6- \\
 & -83181770100(141-\varepsilon\sqrt{15})\sum_{j<k}x_i^{14}x_j^8x_k^8+336424047960(29- \\
 & -16\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{12}x_j^{10}x_k^8+3700664527560(13-\varepsilon\sqrt{15})x_1^{10}x_2^{10}x_3^{10}.
 \end{aligned}$$

Так как группа содержит подгруппу скалярных умножений на 1, ω , ω^2 , то инвариантное относительно группы $W(J_3(5))$ множество S единичных нормальных векторов плоскостей (3) состоит из 270 векторов

$$\pm\omega^p\mathbf{e}_i, \pm\frac{\omega^p}{2}(\gamma-\omega)(\mathbf{e}_i\pm\mathbf{e}_j), \pm\frac{\omega^p}{2}(\mathbf{e}_i\pm(\omega^2-\gamma)\mathbf{e}_j\pm\mathbf{e}_k), \pm\frac{\omega^p}{2}(\mathbf{e}_i\pm\gamma\omega^2\mathbf{e}_m\pm r\omega\mathbf{e}_i), p=\overline{1,3},$$

и $S=W(J_3(5))\cdot\mathbf{e}_1$ [4].

Следовательно, как и ранее, существует только одна орбита O группы $W(J_3(5))$ в множестве плоскостей (3) и единственный многочлен f_O степени 45. С точностью до постоянного множителя, он имеет вид:

$$\begin{aligned}
 f_O = f_{45} = & 32\sum(-1)^p x_i^{41}x_j^3x_k^3 + 56(5+\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{39}x_j^5x_k^3 + \\
 & + 53(29+5\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{37}x_j^7x_k^3 + (4659+1547\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{35}x_j^9x_k^3 + \\
 & + 2(4239+871\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{33}x_j^{11}x_k^3 - 4(3797 - \\
 & - 2563\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{31}x_j^{13}x_k^3 + (43981-1387\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^{15}x_k^3 - \\
 & - 29(5699+507\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{17}x_k^3 + 87(2257+121\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{19}x_k^3 - \\
 & - 1305(89+65\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{21}x_k^3 - 53(151-17\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{37}x_j^5x_k^3 - \\
 & - 6(6589+389\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{35}x_j^7x_k^3 - 5(13049+1089\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{33}x_j^9x_k^3 - \\
 & - 8(26281+6481\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{31}x_j^{11}x_k^3 + 5(88045+37173\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^{13}x_k^3 - \\
 & - 58(8051+4907\varepsilon\sqrt{15})\times\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{15}x_k^3 - 1044(2447 - \\
 & - 745\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{17}x_k^3 - 4350(419+219\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{19}x_k^3 + \\
 & + 3(44651-12285\varepsilon\sqrt{15})\times\sum(-1)^p x_i^{33}x_j^7x_k^5 + 44(9697-2327\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{31}x_j^9x_k^5 - \\
 & - 3(85197+33301\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^{11}x_k^5 + 406(19963 - \\
 & - 1165\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{13}x_k^5 - 8091(439-113\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{15}x_k^5 + \\
 & + 3915(1263+2119\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{17}x_k^5 - 110055(127+23\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{21}x_j^{19}x_k^5 - \\
 & - 55(40717-1835\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^9x_k^7 - 58(77483 - \\
 & - 6877\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{11}x_k^7 + 2349(1895-2881\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{13}x_k^7 + \\
 & + 5220(6239+1015\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{15}x_k^7 + 660330(107+3\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{21}x_j^{17}x_k^7 - \\
 & - 1131(9521+281\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{11}x_k^9 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4350(9283 + 2235\varepsilon\sqrt{15})\sum (-1)^p x_i^{23} x_j^{13} x_k^9 + 110055(329 - \\
 & -143\varepsilon\sqrt{15})\sum (-1)^p x_i^{21} x_j^{15} x_k^9 + 550275(55 - 49\varepsilon\sqrt{15})\sum (-1)^p x_i^{19} x_j^{17} x_k^9 - \\
 & -10005(7411 - 85\varepsilon\sqrt{15})\sum (-1)^p x_i^{21} x_j^{13} x_k^{11} - 340170(271 + \\
 & + 39\varepsilon\sqrt{15})\sum (-1)^p x_i^{19} x_j^{15} x_k^{11} - 570285(67 - 5\varepsilon\sqrt{15})\sum (-1)^p x_i^{17} x_j^{15} x_k^{13},
 \end{aligned}$$

здесь, как и ранее, $p = 2$ или 1 , если индексы (i, j, k) принимают значения соответственно четных (циклических) или нечетных перестановок чисел $(1, 2, 3)$.

Рассмотрим группу $G' = W(J_3(5)) \cap SL_3(\mathbf{C})$ порядка $1\,080$. Как и ранее, любой однородный инвариант группы G' является полуинвариантом группы $W(J_3(5))$, и наоборот, а любой полуинвариант f группы $W(J_3(5))$ представим в виде $f = (f_{45})^k f_1$, где $k = 0, 1$ и $f_1 \in I^{W(J_3(5))}$. Следовательно, $I^{G'} = \mathbf{C}[f_6, f_{12}, f_{30}, f_{45}]$.

Более того, $(f_{45})^2$ – инвариант группы $W(J_3(5))$ степени 90 , и его можно однозначно представить в виде:

$$(f_{45})^2 = \beta(f_{30})^3 + \delta f_{30}(f_{12})^5 + f_6 F,$$

где $F \in I^{W(J_3(5))}$ – полином степени 84 ; β, δ – неопределенные коэффициенты.

Для определения коэффициентов β и δ возьмем два вектора

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \sqrt{24(15 - \varepsilon\sqrt{15})} \mathbf{e}_3 \text{ и } \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2 + \frac{1}{4} \sqrt{38 + 6\varepsilon\sqrt{15} + \sqrt{162 + 114\varepsilon\sqrt{15}}} \mathbf{e}_3.$$

Здесь при нахождении корня из комплексного числа берем первообразный корень соответствующей степени из единицы. Имеем

$$f_6(\mathbf{x}_1) = 0, f_{12}(\mathbf{x}_1) \neq 0, f_{30}(\mathbf{x}_1) \neq 0, (i = 1, 2), f_{45}(\mathbf{x}_1) \neq 0, f_{45}(\mathbf{x}_2) = 0.$$

Из системы $(f_{45}(\mathbf{x}_i))^2 = \beta(f_{30}(\mathbf{x}_i))^3 + \delta f_{30}(\mathbf{x}_i)(f_{12}(\mathbf{x}_i))^5$, получим

$$\beta = -\frac{7 + \varepsilon\sqrt{15}}{99625166806274298995200}, \quad \delta = -\frac{7 + \varepsilon\sqrt{15}}{25429834044875520000}.$$

Если ввести обозначения $\tilde{f}_{12} = \frac{1}{780} f_{12}$ и $\tilde{f}_{30} = -\frac{1}{79270760} f_{30}$, то справедливо следующее равенство:

$$\tilde{f}_{45}^2 = 5(7 + \varepsilon\sqrt{15}) \tilde{f}_{30}^3 + 900(7 + \varepsilon\sqrt{15}) \tilde{f}_{30} \tilde{f}_{12}^5 + f_6 \tilde{F}. \quad (4)$$

Таким образом, алгебра инвариантов группы $G' = W(J_3(5)) \cap SL_3(\mathbf{C})$ порождается многочленами $f_6, \tilde{f}_{12}, \tilde{f}_{30}$ и f_{45} , для которых справедливо соотношение (4).

3. Группа $W(L_3)$ порядка 648 порождается отражениями третьего порядка относительно 12 плоскостей с уравнениями [5]

$$x_i = 0, x_1 + \omega^j x_2 + \omega^k x_3 = 0, i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Базисные инварианты группы $W(L_3)$ имеют степени $m_i = 6, 9, 12$ [1] и могут быть заданы следующим образом [5]:

$$f_6 = \sum x_i^6 - 10 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3, \quad (6)$$

$$f_9 = (x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 - x_3^3)(x_2^3 - x_3^3), \quad (7)$$

$$f_{12} = \sum x_i^{12} - 110 \sum x_i^9 x_j^3 + 462 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6. \quad (8)$$

Поскольку группа $W(L_3)$ содержит подгруппу скалярных умножений на $1, \omega, \omega^2$, то $W(L_3)$ -инвариантное множество S единичных нормальных векторов плоскостей (5) состоит из 72 векторов [5]:

$$\pm \omega^l \mathbf{e}_i, \quad \pm \frac{\omega^l \varepsilon}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1 + \omega^j \mathbf{e}_2 + \omega^k \mathbf{e}_3). \quad (9)$$

Существует одна орбита O группы $W(L_3)$ в множестве плоскостей (5) ($S = W(L_3) \cdot \mathbf{e}_1$). Значит, существует только один, с точностью до постоянного множителя, полуинвариант f_O группы $W(L_3)$. Он имеет степень 12 и следующий вид:

$$f_O = f'_{12} = \sum_{j < k} x_i^{10} x_j x_k + 3 \sum x_i^7 x_j^4 x_k - 21 x_1^4 x_2^4 x_3^4. \quad (10)$$

Таким образом, любой полуинвариант группы $W(L_3)$ представим в виде $f = (f'_{12})^k f_1$, где $k = 0, 1, 2$, $f_1 \in I^{W(L_3)}$.

Любой однородный инвариант группы $G' = W(L_3) \cap SL_3(\mathbf{C})$ является полуинвариантом группы $W(L_3)$, и наоборот. Значит $I^{G'} = \mathbf{C}[f_6, f_9, f_{12}, f'_{12}]$.

При этом, так как $(f'_{12})^3$ – инвариант группы $W(L_3)$, то

$$(f'_{12})^3 = \beta (f_{12})^3 + \delta (f_9)^4 + f_6 F,$$

где $F \in I^{W(L_3)}$ – полином степени 30; β, δ – неопределенные коэффициенты.

Для нахождения коэффициентов β и δ возьмем вектор

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (1 + \sqrt{3})\mathbf{e}_3, \quad (11)$$

удовлетворяющий условию $f_6(\mathbf{x}_0) = f_9(\mathbf{x}_0) = 0$, и вектор

$$\mathbf{x}_1 = \varepsilon \mathbf{e}_1 + (-\varepsilon)\mathbf{e}_2 + \sqrt[6]{12}\mathbf{e}_3. \quad (12)$$

Здесь, как и ранее, рассматривается арифметический корень 6-й степени из 12.

Имеем $\beta = \frac{(f'_{12}(\mathbf{x}_0))^3}{f_{12}^3(\mathbf{x}_0)} = -\frac{1}{91125}$, $\delta = -27$. Если ввести обозначение $\tilde{f}_{12} = -\frac{1}{45} f_{12}$,

то справедливо следующее соотношение:

$$(f'_{12})^3 = (\tilde{f}_{12})^3 - 27(f_9)^4 + f_6 \tilde{F}. \quad (13)$$

Итак, алгебра инвариантов группы $G' = W(L_3) \cap SL_3(\mathbf{C})$ порождается многочленами (6), (7), (8) и (10), для которых справедливо соотношение (13).

Отметим, что аналогичный результат получен в [2].

4. Рассмотрим группу $W(M_3)$ порядка 1 296, которая порождается отражениями второго порядка относительно 9 плоскостей с уравнениями

$$x_i - \omega^k x_j = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (i < j) \quad (14)$$

и отражениями третьего порядка относительно 12 плоскостей (5).

Алгебра инвариантов $I^{W(M_3)}$ группы $W(M_3)$ порождается многочленами степеней 6, 12, 18 [2]. В качестве базисных инвариантов можно взять многочлены (6), (8) [5] и многочлен

$$f_{18} = \sum x_i^{18} - 408 \sum x_i^{15} x_j^3 + 9282 \sum x_i^{12} x_j^6 - 24310 \sum_{i < j} x_i^9 x_j^9. \quad (15)$$

$W(M_3)$ -инвариантное множество S единичных нормальных векторов плоскостей (5) и (14) распадается на два $W(M_3)$ -инвариантных подмножества, состоящих соответственно из 54 векторов

$$\pm \frac{\omega^l \varepsilon}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_i - \omega^k \mathbf{e}_j), \quad l = 1, 2, 3,$$

и 72 векторов (9).

Следовательно, существует две орбиты группы $W(M_3)$ в множестве плоскостей (5) и (14), а значит, и два полуинварианта f_O группы $W(M_3)$ степеней 9 и 12.

С точностью до постоянного множителя они имеют вид (7) и (10). Поэтому любой полуинвариант группы $W(M_3)$ представим в виде:

$$f = (f'_{12})^k (f_9)^m f_1,$$

где $k = 0, 1, 2, m = 0, 1, f_1 \in I^{W(M_3)}$.

Как и ранее, нетрудно убедиться, что любой однородный инвариант группы $G' = W(M_3) \cap SL_3(\mathbb{C})$ является полуинвариантом группы $W(M_3)$, и наоборот. Следовательно, алгебра инвариантов группы $G' = W(M_3) \cap SL_3(\mathbb{C})$ порождается членами (6), (7), (8), (10) и (15).

С помощью явных вычислений можно получить следующие соотношения:

$$18435(f_9)^2 = 16(f_6)^3 - 21f_6 f_{12} + 5f_{18} \quad (16)$$

и

$$(f'_{12})^3 = \beta(f_{18})^2 + \delta(f_{12})^3 + f_6 F,$$

где $F \in I^{W(M_3)}$ – полином степени 30, а β и δ , как и ранее, – неопределенные коэффициенты.

Для нахождения β и δ возьмем вектор (11), удовлетворяющий условиям $f_6(\mathbf{x}_0) = f_{18}(\mathbf{x}_0) = 0$, и вектор (12). Получим $\beta = -\frac{3}{1510441}$ и $\delta = -\frac{1}{91125}$. Следовательно, справедливо равенство

$$(f'_{12})^3 = -3(\tilde{f}_{18})^2 - (f_{12})^3 + f_6 \tilde{F}, \quad (17)$$

где $\tilde{f}_{12} = \frac{1}{45} f_{12}$, $\tilde{f}_{18} = \frac{1}{1229} f_{18}$.

Таким образом, алгебра инвариантов $I^{G'} = \mathbb{C}[f_6, f_9, f_{12}, f'_{12}, f_{18}]$ при выполнении соотношений (16) и (17) для образующих.

Заключение

В статье, построены в явном виде образующие всех алгебр инвариантов групп $G' = G \cap SL_3(\mathbb{C})$, где G – конечная унитарная неприводимая примитивная группа, порожденная отражениями в унитарном пространстве U^3 , а также установлены соотношения между образующими.

Список источников

1. Shephard G.C., Todd J.A. Finite unitary reflection groups // Can. J. Math. 1954. V. 6 (2). P. 274–304. doi: 10.4153/CJM-1954-028-3
2. Спрингер Т.А. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981. 191 с.
3. Cohen A.M. Finite complex reflection groups // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1976. Ser. 4. V. 9. P. 379–436. doi: 10.24033/ASENS.1313
4. Рудницкий О.И. Канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$ // Таврический вестник информатики и математики. 2018. № 1 (38). С. 89–96.
5. Рудницкий О.И. Канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе // Таврический вестник информатики и математики. 2017. № 3 (36). С. 73–78.

References

1. Shephard G.C., Todd J.A. (1954) Finite unitary reflection groups. *Canadian Journal of Mathematics*. 6(2), pp. 274–304. DOI: 10.4153/CJM-1954-028-3.

2. Springer T.A. (1977) *Invariant Theory. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BFb0095644.
3. Cohen A.M. (1976) Finite complex reflection groups. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Serie 4. 9. pp. 379–436. DOI: 10.24033/ASENS.1313.
4. Rudnitskii O.I. (2018) Kanonicheskiye sistemy bazisnykh invariantov dlya unitarnykh grupp $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$ [Canonical systems of basic invariants for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$]. *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 38(1). pp. 89–96.
5. Rudnitskii O.I. (2017) Kanonicheskiye sistemy bazisnykh invariantov dlya grupp simmetrii mnogogrannikov Gesse [Canonical systems of basic invariants for symmetry groups of Hessian polyhedrons]. *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 36(3). pp. 73–78.

Сведения об авторе:

Рудницкий Олег Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия. E-mail: oirud58@gmail.com

Information about the author:

Rudnitskii Oleg I. (Candidate of Physics and Mathematics, associate professor, associate professor of the department of mathematical analysis of Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation). E-mail: oirud58@gmail.com

Статья поступила в редакцию 26.01.2022; принята к публикации 03.02.2023

The article was submitted 26.01.2022; accepted for publication 03.02.2023