

Научная статья

УДК 533.6.621.4

doi: 10.17223/19988621/81/7

К вопросу о принципе наименьшего действия при течении несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения

Геннадий Иванович Афонин

Томский государственный университет, Томск, Россия, agi@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Предлагается формулировка принципа наименьшего действия применительно к стационарному движению невязкой, нетеплопроводной, несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения. В результате решения соответствующей этому принципу вариационной задачи обнаружена связь между составляющими вектора скорости, что позволило определить форму канала, в котором обеспечивается выполнение принципа наименьшего действия, и параметры потока как в самом канале, так и в начальной области истечения – области, которая формирует течение в некотором условном сечении входа в канал.

Ключевые слова: идеальная жидкость, элемент жидкости, уравнение Бернулли, принцип наименьшего действия, вариационная задача, условие оптимальности (уравнение Эйлера), закон сохранения энергии

Благодарности: Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 0721-2020-0032.

Для цитирования: Афонин Г.И. К вопросу о принципе наименьшего действия при течении несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7

Original article

On the principle of least action in terms of incompressible fluid flow in a channel of variable cross-section

Gennadiy I. Afonin

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, agi@niipmm.tsu.ru

Abstract. In this paper, the formulation of the principle of least action as applied to a steady flow of an inviscid incompressible non-heat-conducting fluid in an axisymmetric channel of variable cross-section is proposed. After solving the variational problem cor-

responding to the principle, the optimal condition correlating the velocity vector components is obtained. As a result, an efficient marching method is developed for designing the channel shape and calculating the flow parameters. An important element of the variational problem is the concept of a conditional section introduced within the moving flow, or in other words, the inlet section of the channel. In this section, specifying the function $y' = v/u$ allows one to determine the fluid flow parameters, which are necessary for calculating both in the initial outflow region (before entering the channel) and in the region downstream. The calculated results show two edge extrema and their effect on the flow pattern. In the initial outflow region, which is adjacent to a stationary region with constant pressure $p = 1$, the edge extremum $u = 0$ determines the vertical motion of the fluid. In the region of the channel outlet, the edge extremum $p = 0$ induces a parallel flow in the outlet section.

Keywords: ideal fluid, fluid element, Bernoulli equation, principle of least action, variational problem, optimal condition (Euler equation), energy conservation law

Acknowledgments: The results were obtained in fulfilment of the Ministry of Education and Science task, project No. 0721-2020-0032.

For citation: Afonin, G.I. (2023) On the principle of least action in terms of incompressible fluid flow in a channel of variable cross-section. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7

Принципу наименьшего действия (ПНД) и его различным формам в механике посвящено значительное количество работ, подробный обзор большинства основных из них содержится в [1]. Наиболее простое изложение сути ПНД можно найти в [2]. ПНД наряду с законом сохранения энергии является важной составляющей энергетической теории механики. Сравнение ее с классической теорией, что сделано, например, в [3], показывает преимущества этой теории, одним из которых является то, что она рассматривает только реализуемые в природе движения. Важно заметить, что основной трудностью для использования ПНД является отсутствие в большинстве случаев возможности определения кинетической и потенциальной энергии, на что в [3] обращается особое внимание.

Ниже, основываясь на точке зрения Эйлера при изучении движения сплошной среды [4], вводится понятие кинетической и потенциальной энергии потока жидкости в канале переменного сечения (КПС). Это позволяет ввести действие S в сечении канала как разницу кинетической и потенциальной энергии потока. Из рассмотрения стационарного течения массы жидкости в КПС вдоль оси симметрии следует, что минимальное суммарное значение действия

$$I = \int_{t_0}^{t_k} S(t) dt$$

от начального сечения в момент времени t_0 до сечения выхода из канала в момент времени t_k реализуется, когда при движении S в каждом сечении имеет минимальное значение.

Важно отметить, что такое рассмотрение возможно лишь тогда, когда кинетическая энергия элемента жидкости зависит только от скорости, а потенциальная – от его положения в пространстве [3]. То есть когда мы имеем дело с консервативными силами, как в данной модели движения жидкости.

Предлагаемый подход к построению действия S позволяет в итоге сформулировать вариационную задачу о минимуме S . Полученное условие оптимальности совместно с уравнениями движения решает задачу определения параметров потока и формы КПС.

1. Рассмотрим стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения; x, y – прямоугольные координаты в меридиональной плоскости, ось x направлена по оси симметрии слева направо. Поток жидкости характеризуется плотностью ρ_0 , давлением p и вектором скорости $\mathbf{V} = (u, v)$.

Зададим в сечении x с ординатой контура КПС y_1 кинетическую и потенциальную энергию потока жидкости, соответственно обозначив их как T и U , следующим образом:

$$2T = 2 \int_0^{y_1} \left(\rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} \right) uy dy, \quad U = 2 \int_0^{y_1} pu y dy. \quad (1)$$

По аналогии с принципом Гамильтона, который является одной из форм принципа наименьшего действия, введем понятие действия для потока жидкости I :

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (T - U) dt. \quad (2)$$

Важно отметить, что принцип Гамильтона опирается на точку зрения Лагранжа при изучении движения сплошной среды.

Из (2) следует, что минимальное суммарное значение действия I реализуется, когда при движении в каждом сечении x имеет минимум значение $S = T - U$, т.е. согласно (1)

$$S = 2 \int_0^{y_1} (u^2 + v^2 - p) uy dy. \quad (3)$$

Именно S в дальнейшем будем называть действием. В (3) S представлено в безразмерном виде: давление p отнесено к давлению заторможенной жидкости p_0 , ордината y – к ординате некоторого условного начального сечения канала, которое будем называть сечением входа КПС, продольная составляющая вектора

скорости u и поперечная скорость v отнесены к скорости $u_0 = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho_0}}$.

Таким образом, поиск минимума S представляет собой вариационную задачу для функционала (3) с тремя неизвестными функциями одной переменной $u(y)$, $v(y)$ и $p(y)$.

2. Рассмотрим вариационную задачу для входного сечения КПС $y_1 = 1$. Воспользуемся выражением для закона сохранения энергии в безразмерном виде

$$u^2 + v^2 + p = 1 \quad (4)$$

и упростим (3) путем исключения из него функции давления $p(y)$. В результате получим

$$S = 2 \int_0^1 [2(u^2 + v^2) - 1] uy dy. \quad (5)$$

Подынтегральная функция этого функционала имеет вид:

$$F(y, u, v) = [2(u^2 + v^2) - 1] uy.$$

Отсюда для функций $u(y)$ и $v(y)$ следуют следующие уравнения Эйлера [5]:

$$F_u(y, u, v) = 6u^2 + 2v^2 - 1 = 0, \quad F_v(y, u, v) = uv = 0. \quad (6)$$

Из первого получим

$$u^2 = \frac{1}{6} + \frac{v^2}{3}. \quad (7)$$

Из второго уравнения Эйлера следует $v = 0$. Таким образом, минимум действия в начальном сечении реализуется при

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082 \quad \text{и} \quad v = 0. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), получим

$$\min S = -\frac{2}{3\sqrt{6}} \approx -0.27217. \quad (9)$$

Коэффициент расхода

$$\mu = 2 \int_0^1 uy \, dy \quad (10)$$

для КПС с параметрами в начальном сечении согласно (8)

$$\mu = u_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь для произвольного сечения с ординатой y_1 вариационную задачу нахождения минимума функционала (5) при

$$\mu = 2 \int_0^{y_1} uy \, dy \quad (12)$$

Вспомогательный функционал имеет для этой задачи следующий вид:

$$\tilde{S} = 2 \int_0^{y_1} (2(u^2 + v^2) - 1 - \lambda) uy \, dy. \quad (13)$$

Здесь $\lambda = \text{const}$ – множитель Лагранжа. Уравнения Эйлера для функционала S имеют вид:

$$F_u(y, u, v) = 6u^2 + 2v^2 - 1 - \lambda = 0, \quad F_v(y, u, v) = uv = 0. \quad (14)$$

Отсюда следует

$$u^2 = \frac{1+\lambda}{6} - \frac{v^2}{3}, \quad v = 0. \quad (15)$$

Соотношения (8) и (15) показывают, что наименьшее действие при движении жидкости реализуется в канале с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения.

Таким образом, минимум действия в произвольном сечении канала реализуется при

$$u = \sqrt{\frac{1+\lambda}{6}}, \quad v = 0. \quad (16)$$

Из (16) следует $0 \leq \lambda \leq 5$, и при этом скорость изменяется в диапазоне $u_0 \leq u \leq 1$. Важно отметить, результаты (16) справедливы и в канале вверх по потоку как следствие решения в этой области вариационной задачи для того же

функционала (13). Эту область назовем начальной областью истечения. Здесь из (16) следует $-1 \leq \lambda \leq 0$ и, соответственно, для скорости имеем $0 \leq u \leq u_0$.

Соотношение (12) позволяет определить ординату предельного контура, контура с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения $y_1 = \sqrt{u_0/u}$. Подставляя (16) в (13), получим минимальное значение S в сечении канала для заданного коэффициента расхода (11):

$$S = -\frac{4}{\sqrt{6}} u^2. \quad (17)$$

Полученные соотношения (8)–(11) определяют характеристики контура на входе в канал при задании $\lambda = 0$. Соотношение (16) позволяет определить форму канала как функцию скорости u при изменении λ в диапазоне $-1 \leq \lambda \leq 5$.

Рассматривая (16) для различных λ в сечении $y_1 = 1$, тем самым задавая коэффициент расхода μ , можно построить КПС для любого μ из промежутка $0 < \mu < 1$.

На рисунке 1 представлены ординаты контура канала y_1 для $\lambda = 0$ ($\mu = \sqrt{1/6}$) – кривая 1, $\lambda = 1$ ($\mu = \sqrt{1/3}$) – кривая 2, $\lambda = 2$ ($\mu = \sqrt{1/2}$) – кривая 3. Для иллюстрации минимума функционала (13) представлены функции $S = (2u^2 - 1 - \lambda)u$ для этих же λ . Кривая 4 показывает минимальные значения (13) ($S_m = -4u^3$) в сечении $y_1 = 1$, кривая 5 представляет ординаты выходного сечения y_b при изменении коэффициент расхода $y_b = \sqrt{\mu}$. Пунктирные линии показывают сечения входа в канал для соответствующих λ .

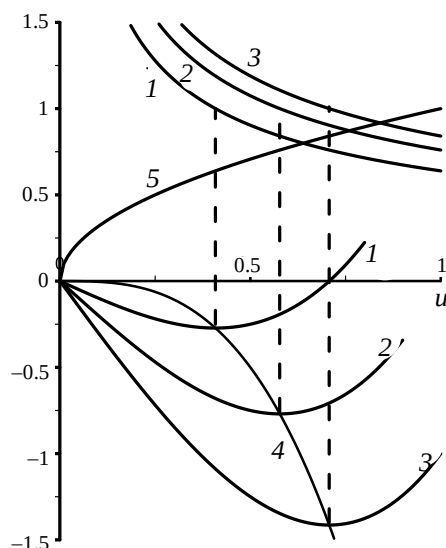


Рис. 1. Ординаты контура канала y_1 : 1 – $\lambda = 0$, 2 – $\lambda = 1$, 3 – $\lambda = 2$; 4 – минимальные значения (13) ($S_m = -4u^3$) в сечении $y_1 = 1$; 5 – ординаты выходного сечения каналов $y_b = \sqrt{\mu}$

Fig. 1. Channel contour ordinates y_1 : (1) 0, (2) 1, and (3) 2; (4) minimum values of (13) ($S_m = -4u^3$) in the cross-section $y_1 = 1$; (5) output section ordinates $y_b = \sqrt{\mu}$

3. Рассмотрим эту же вариационную задачу о минимуме функционала (13) при условии (12), но будем считать $v(y)$ известной функцией в сечении входа в канал.

В произвольном сечении имеем соотношение (15) для скорости u , которое с учетом того, что на оси симметрии $v = 0$, а $u = u_0$, запишем в виде:

$$u^2 = u_0^2 - \frac{v^2}{3}. \quad (18)$$

В начальном сечении $y_1 = 1$, считая известным наклон контура y'_1 , зададим функцию $v(y)$ в виде:

$$v = y'_1 y u. \quad (19)$$

Скорость u согласно (18) будет иметь вид:

$$u = \frac{u_0 \sqrt{3}}{\sqrt{3 + (y')^2}}. \quad (20)$$

При (19) продольная скорость u согласно (20) монотонно падает. Поскольку на стенке контура модуль скорости ограничен условием $p_1 = 0$, при котором $u_1^2 + v_1^2 = 1$, то отсюда следует максимально возможное значение u_0 и, соответственно, λ :

$$u_{om} = \sqrt{\frac{3 + (y'_1)^2}{3(1 + (y'_1)^2)}}, \quad \lambda_m = \frac{5 + (y'_1)^2}{1 + (y'_1)^2}. \quad (21)$$

Таким образом, при заданном y'_1 возможны различные течения λ ($-1 < \lambda < \lambda_m$) и, соответственно, скорости u_0 ($0 < u_0 < u_{om}$). Предельное значение скорости u_{om} при $y'_1 \rightarrow \infty$ $u_{om} = 1/\sqrt{3}$ ($u_{om} \approx 0.57735$). Эта скорость достигается при $\lambda_m = 1$.

Подставляя (20) в (13) и проведя интегрирование, получим

$$S = \frac{2\sqrt{3} u_0}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + (y'_1)^2}} \left(6u_0^2 \frac{\sqrt{3(3 + (y'_1)^2)} - 2}{\sqrt{3(3 + (y'_1)^2)}} - 1 - \lambda \right). \quad (22)$$

Отсюда минимум S реализуется при

$$u_0 = \sqrt{\frac{(1 + \lambda)\sqrt{3(3 + (y'_1)^2)}}{18(\sqrt{3(3 + (y'_1)^2)} - 2)}}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) получим

$$S = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{(1 + \lambda) u_0}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + (y'_1)^2}}.$$

В результате интегрирования (10) для коэффициента расхода в начальном сечении следует зависимость

$$\mu = \frac{2\sqrt{3} u_0}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + (y'_1)^2}}. \quad (24)$$

Для $\lambda = 0$ на рис. 2 в сечении входа КПС сплошными линиями показаны зависимости от угла наклона y'_1 S , u_0 , μ и ординаты канала $y_b = \mu^{0.5}$. Здесь же для ил-

люстрации неравномерности потока показаны давление на оси p_0 , давление на стенке канала p_1 , поперечная составляющая скорости на стенке v_1 и изменения μ , y_b . Видно, что если для контура с наклоном $y'_1 = -0.5$ коэффициент расхода μ , y_b по отношению к μ_0 , y_{0b} для канала с наклоном $y'_1 = 0$ уменьшаются незначительно, на величину $\approx 2\%$, а y_b на $\approx 1\%$, то для канала с наклоном $y'_1 = -1$ эти величины изменяются значительно: на 7.2 и 3.7% соответственно.

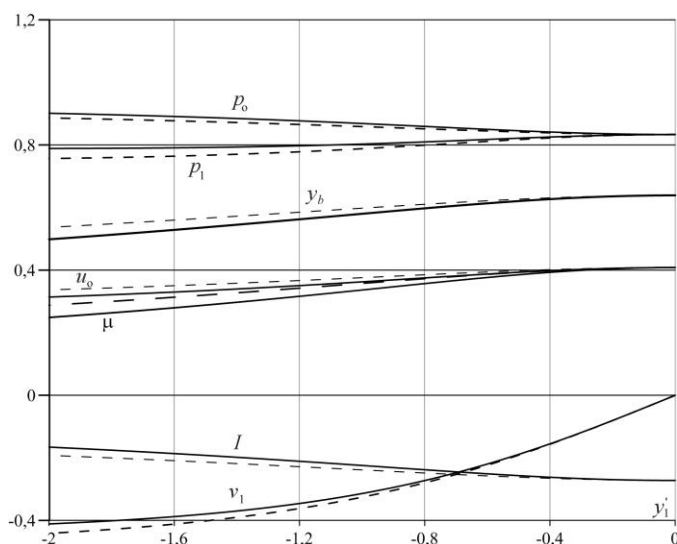


Рис. 2. Параметры потока и ординаты y_b в сечении входа в канал
Fig. 2. Flow parameters and ordinates y_b in the inlet section of a channel

Для определения параметров течения в КПС при известных и удовлетворяющих принципу наименьшего действия S параметрах во входном сечении система уравнений включает соотношение (18) для продольной составляющей скорости u , уравнение неразрывности в виде:

$$u y' - v = 0, \quad (25)$$

и уравнение движения для определения скорости v

$$u v' + 0.5 p_y = 0. \quad (26)$$

Здесь $v' = v_x + \frac{v}{u} v_y$ – полная производная скорости v , $p = 1 - u^2 - v^2$.

Для удобства уравнение (26), используя соотношение (18), можно преобразовать к виду:

$$v' = -2u_y. \quad (27)$$

В сечении входа в КПС согласно (18) имеем

$$u_y = -\frac{y'_1 y' u}{3 + (y')^2}.$$

Численная реализация со вторым порядком точности данных уравнений состоит из двух этапов. Сначала осуществлялся расчет вниз по потоку от сечения

входа в канал, где параметры задаются соотношениями (19), (20) и (22), а коэффициент расхода μ находится из (24). Далее с помощью (25) в следующем сечении находятся положения линий тока i , используя (27) определяются значения скорости v . Для определения скорости u строится итерационная процедура, с помощью которой находится значение u_0 , удовлетворяющее условию выполнения полученного в сечении входа в канал расхода.

На втором этапе аналогично ведется расчет течения жидкости вверх по потоку. Последовательность выполнения этапов не имеет значения. Следует заметить, что при решении данной вариационной задачи имеют место два крайних экстремума – вниз по потоку $p = 0$, а вверх по потоку $u = 0$.

На рис. 3 показаны линии тока для канала, у которого в сечении входа $y'_1 = -1$. Пунктирные линии показывают границы начала области крайних экстремумов и наиболее близкую к оси симметрии линию тока, которая отделяет движущийся поток от неподвижной области постоянного давления. Из рисунка видим, что крайний экстремум $u = 0$ определяет вертикальное прямолинейное движение потока конечной ширины. Следует отметить, что здесь и ниже все расчеты проводились для $\lambda = 0$.

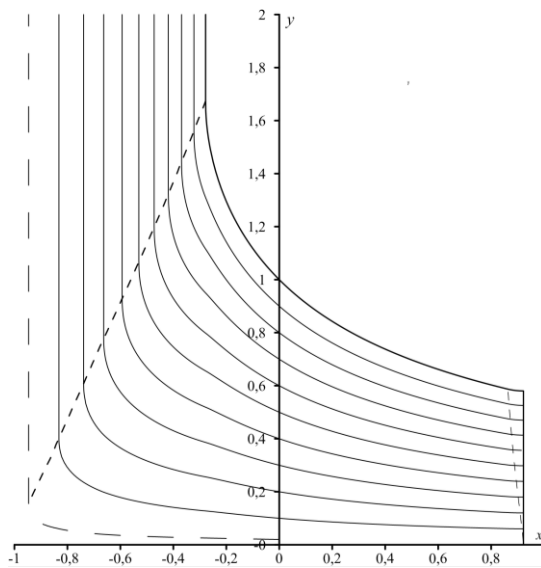


Рис. 3. Линии тока для канала $y'_1 = -1$

Fig. 3. Streamlines in a channel with $y'_1 = -1$

Важно отметить: при достижении первого крайнего экстремума, когда $\psi_N = \mu$,

$$\psi_i = \frac{2\sqrt{3}u_0y_i^2}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + (y'_1y_i)^2}}.$$

Дальше решается вариационная задача для линии тока $i - 1$ при условии выполнения для нее коэффициента расхода, равного ψ_{i-1} , и так продолжается расчет до линии тока $i = 1$.

В области краевого экстремума $p = 0$ происходит изменение угла наклона y' линий тока до нуля, т.е. в выходном сечении формируется поток жидкости, движущийся параллельно оси симметрии с максимальной скоростью $u = 1$. Видим, что наибольший по длине краевой экстремум реализуется на стенке канала.

На рис. 4 для некоторых выбранных линий тока представлены параметры течения – скорости u , v и давление p . Вертикальные прямолинейные участки соответствуют краевому экстремуму $u = 0$. На этих участках параметры течения определяются из соотношений

$$U = 0, v = \tilde{v}y/y, p = 1 - v^2. \quad (28)$$

Здесь $\tilde{v}$ и $\tilde{y}$ – скорость и ордината в начальной точке краевого экстремума. Из (18) следует, что $\tilde{v} = u_0\sqrt{3}$. Выражение для определения скорости v следует из условия сохранения расхода.

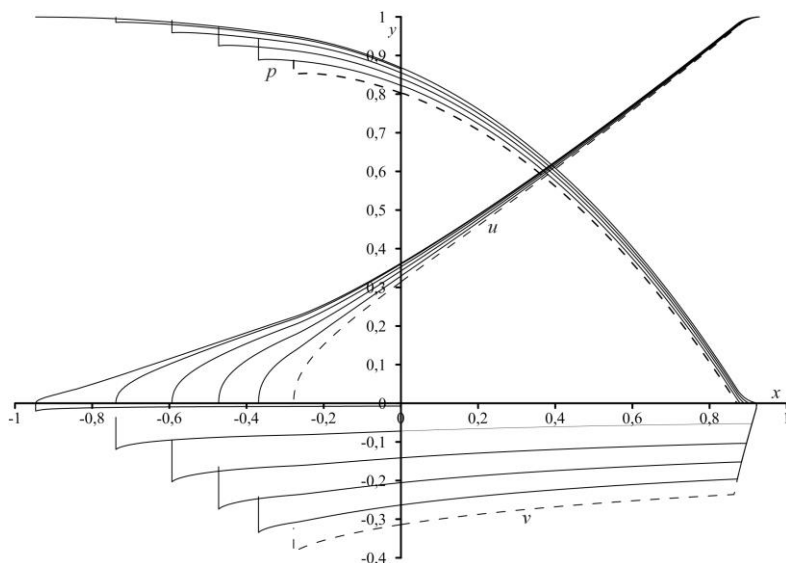


Рис. 4. Скорости u , v и давление p вдоль линий тока
Fig. 4. Velocities u , v and pressure p along the streamlines

Из рис. 4 видим, что наибольшее влияние краевой экстремум $p = 0$ оказывает на поперечную составляющую скорости v , так на граничной линии тока она изменяется от -0.3 до нуля. В сечениях в зоне действия краевого экстремума параметры течения на линиях тока постоянны и определяются из соотношений

$$P = 0, v = -\sqrt{1.5(1 - u_0^2)}, u = \sqrt{0.5(3u_0^2 - 1)}.$$

На рис. 5 для различных степеней расширения контура канала представлены скорости u , v . Верхняя пунктирная линия показывает изменение скорости u вдоль контура КПС. Нижняя пунктирная линия показывает изменение u в сечении первого краевого экстремума $u = 0$. Ниже этой линии показаны изменения u в сечениях вверх по потоку, где также часть сечения соответствует краевому экстремуму $u = 0$.

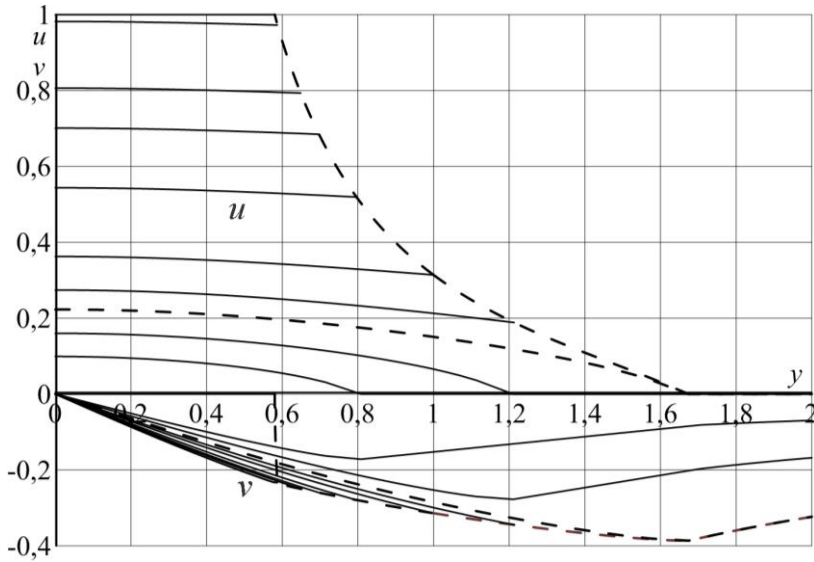


Рис. 5. Скорости u , v в различных сечениях канала
Fig. 5. Velocities u , v in different sections of the channel

Рассмотрим изменение скорости v . Пунктирные линии, так же как и для скорости u , показывают изменение скорости v вдоль контура КПС и изменение v в сечении первого краевого экстремума $u = 0$. Практически вертикальный участок кривой v вдоль контура – это зона действия краевого экстремума $p = 0$. Линии с изломом показывают изменение v в сечениях вверх по потоку, где также часть сечения соответствует крайнему экстремуму $u = 0$, в начальной точке которого $v = -\sqrt{3}u_0$. После излома v возрастает вдоль краевого экстремума и – как итог – в бесконечно удаленной точке согласно (28) достигает нуля.

На рис. 6 для тех же степеней расширения контура канала, что и на рис. 5, представлены зависимости давления p .

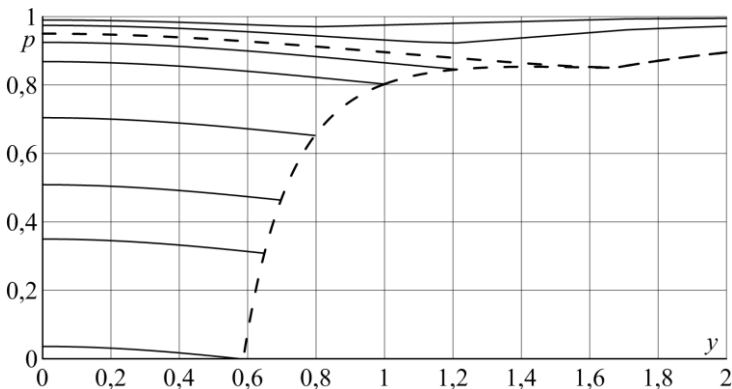


Рис. 6. Давления p в различных сечениях канала
Fig. 6. Pressure p in different sections of the channel

На рис. 7 представлены КПС для различных y'_1 в сечении входа в канал и соответствующие этим каналам области движущейся жидкости. Пунктирные линии отделяют области краевых экстремумов от области двухстороннего экстремума. На рисунке кривая 1 соответствует каналу, у которого $y'_1 = -0.5$ ($\mu \approx 0.38525$, $y_b \approx 0.6207$), кривая 2 – $y'_1 = -0.75$ ($\mu \approx 0.3620$, $y_b \approx 0.6017$), кривая 3 – $y'_1 = -1$ ($\mu \approx 0.3365$, $y_b \approx 0.5801$). Видим, что когда $y'_1 \rightarrow 0$, область краевого экстремума $p = 0$ уменьшается, в свою очередь, форма канала стремится к предельному КПС, каналу с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения по длине канала, движение жидкости в котором рассмотрено выше.

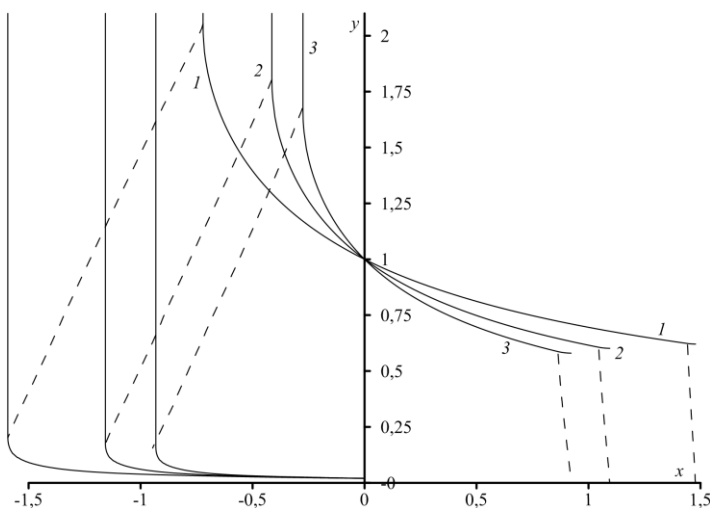


Рис. 7. Области движущейся жидкости: 1 – $y'_1 = -0.5$, 2 – $y'_1 = -0.75$, 3 – $y'_1 = -1$

Fig. 7. Areas with a moving fluid: $y'_1 = (1) -0.5$, $(2) -0.75$, and $(3) -1$

Рисунок 7 показывает, что при проектировании канала, кроме задания формы канала, необходимо учитывать и длину по x начальной области истечения жидкости, т.е. от начала области краевого экстремума $u = 0$ до сечения с ординатой $y_1 = 1$ – сечения входа в канал.

На рис. 8 для сравнения представлены две области истечения жидкости. В канале 1 наклон линий тока в сечении входа изменяется по линейному закону и, соответственно, скорость v определяется соотношением (17). В канале 2 реализуется течение жидкости, в котором наклон линий тока в этом же сечении задается в виде квадратичной функции, в результате для скорости v имеем соотношение

$$v = y'_1 y^2 u. \quad (29)$$

Тогда для скорости u в этом сечении согласно (20) получим уравнение, аналогичное (18):

$$u = \frac{\sqrt{3} u_0}{\sqrt{3 + (y'_1 y^2)^2}}. \quad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (10), получим в результате интегрирования

$$S = \frac{\sqrt{3} u_0}{y'_1} \left((6u_0^2 - 1 - \lambda) \ln \left| \frac{y'_1 + \sqrt{3 + (y'_1)^2}}{\sqrt{3}} \right| - \frac{4y'_1 u_0^2}{\sqrt{3 + (y'_1)^2}} \right). \quad (31)$$

Минимум S реализуется при

$$u_0 = \sqrt{\frac{(1 + \lambda) \sqrt{3 + (y'_1)^2} \left(\ln \left| \frac{y'_1 + \sqrt{3 + (y'_1)^2}}{\sqrt{3}} \right| - \ln \sqrt{3} \right)}{6 \left(3 \sqrt{3 + (y'_1)^2} \left(\ln \left| \frac{y'_1 + \sqrt{3 + (y'_1)^2}}{\sqrt{3}} \right| - \ln \sqrt{3} \right) - 2y'_1 \right)}}. \quad (32)$$

В результате интегрирования (10) в начальном сечении при (30) для коэффициента расхода μ получим

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{y'_1} u_0 \ln \left(\frac{y'_1 + \sqrt{3 + (y'_1)^2}}{\sqrt{3}} \right). \quad (33)$$

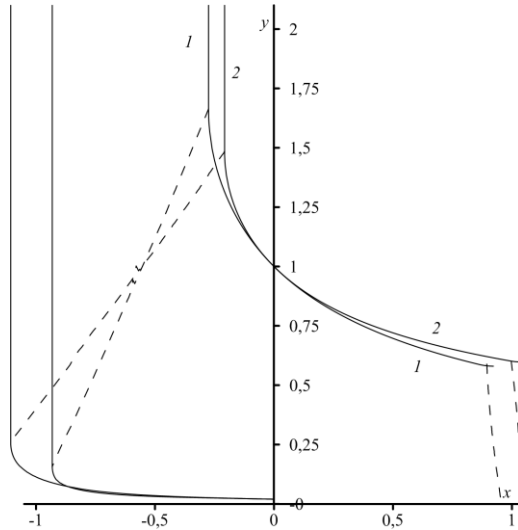


Рис. 8. Области движущейся жидкости для $y'_1 = -0.5$: 1 – $y' = y'_1 y$, 2 – $y' = y'_1 y^2$

Fig. 8. Areas with a moving fluid for $y'_1 = -0.5$: $y' = (1) y'_1 y$ and $(2) y'_1 y^2$

На рис. 2 пунктирными линиями показаны зависимости (29), (31), (32), (33) и ордината выходного сечения $y_b = \sqrt{\mu}$.

Для контура 2 на рис. 8 согласно (32) и (33) $\mu \approx 0.3576$, $y_b \approx 0.5980$.

Для иллюстрации степени различия течений жидкости с угловыми наклонами линий тока $y' = y'_1 y$ и $y' = y'_1 y^2$ на рис. 9 показаны в начальном сечении распределения скоростей u и v , угловые наклоны линий тока y' и разница угловых наклонов $\Delta = y'_1 y(y - 1)$. Пунктирные линии соответствуют квадратичному распределению y' .

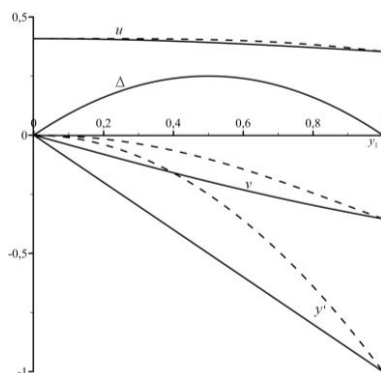


Рис. 9. Распределения в начальном сечении u , v , y' и $\Delta = y'_1 y(y-1)$.

Пунктирные линии соответствуют $y' = y'_1 y^2$

Fig. 9. Distributions of u , v , y' , and $\Delta = y'_1 y(y-1)$ in the initial section.

The dotted lines correspond to $y' = y'_1 y^2$

Из рис. 9 видим, что при существенном различии по скорости v и, соответственно, наклону y' продольная скорость u практически не изменяется.

Проведенные расчеты показали закономерности движения в КПС, особенно в начальной его области, что имеет важное практическое значение при проектировании каналов с заданными характеристиками, например по длине, коэффициенту расхода и т.п.

Заключение

Предложенная формулировка ПНД дала возможность создать эффективный маршевый метод построения формы канала при одновременном расчете параметров течения в нем. Важным элементом вариационной задачи, которая лежит в основе метода, является введенное внутри движущего потока понятие условного сечения, или сечения входа в КПС. Именно это позволило здесь при заданной функции $y' = v/u$ определить параметры течения жидкости, необходимые для проведения их расчета, как в начальной области истечения, так и в области ниже по потоку. Проведенные расчеты показали наличие двух краевых экстремумов и их влияние на качественную картину течения. В начальной области истечения (до входа в КПС), которая примыкает к неподвижной области постоянного давления $p = 1$, краевой экстремум $u = 0$ определяет вертикальное движение жидкости. В области выхода из канала краевой экстремум $p = 0$ формирует параллельный поток в выходном сечении канала.

Список источников

1. Полак Л.С. Вариационные принципы механики. Их развитие и применение в физике. М. : ЛИБРОКОМ, 2010. 600 с.
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М. : Едиториал УРСС, 2004. Т. 6: Электродинамика. 352 с.

3. Пуанкаре А. Наука и гипотеза. М. : ЛИБРОКОМ, 2010. 235 с.
4. Седов А.И. Механика сплошной среды. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
5. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. СПб. : Лань, 2009. 320 с.

References

1. Polak L.S. (2010) *Variatsionnye printsipy mekhaniki. Ikh razvitie i primeneniye v fizike* [Variational principles of mechanics. Their development and application in physics]. Moscow: LIBROKOM.
2. Feynman R., Leighton R., Sands M. (2010) *The Feynman Lectures on Physics. Volume II. Chapter 19*. New York: Basic Books, A Member of the Perseus Books Group.
3. Poincare A. (1905) *Science and Hypothesis*. London: Walter Scott Publishing.
4. Sedov A.I. (1976) *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 1* [Continuum Mechanics. Volume 1]. Moscow: Nauka.
5. Günther N.M. (2009) *Kurs variatsionnogo ischisleniya* [Course in the calculus of variations]. Saint Petersburg: Lan'.

Сведения об авторе:

Афонин Геннадий Иванович – кандидат физико-математических наук, сотрудник отдела математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: agi@niipmm.tsu.ru

Information about the author:

Afonin Gennadiy I. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: agi@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 14.03.2022; принята к публикации 03.02.2023

The article was submitted 14.03.2022; accepted for publication 03.02.2023