ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2023 Управление, вычислительная техника и информатика № 62

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.2
doi: 10.17223/19988605/62/7

Применение метода моментов для оценки длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем

Людмила Алексеевна Нежельская[1], Илья Денисович Степаненко[2]

[1, 2] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] ludne@mail.ru
[2] 97step@mail.ru

Аннотация. Исследуется обобщенный полусинхронный поток событий с двумя состояниями, относящийся к классу дважды стохастических потоков. Его функционирование происходит в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Разработан алгоритм оценивания длительности мертвого времени. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: дважды стохастический обобщенный полусинхронный поток событий; продлевающееся мертвое время фиксированной длительности; плотность вероятности; совместная плотность вероятности; условия рекуррентности; рекуррентный поток; преобразование Лапласа; уравнение моментов; оценка длительности мертвого времени.

***Для цитирования*:** Нежельская Л.А., Степаненко И.Д. Применение метода моментов для оценки длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 65–75. doi: 10.17223/19988605/62/7

Original article
doi: 10.17223/19988605/62/7

An application of the method of moments to estimation of the dead time duration in recurrent generalized semi-synchronous flow of events with prolonged dead time

Lyudmila A. Nezhel'skaya[1], Ilya D. Stepanenko[2]

[1, 2] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] ludne@mail.ru
[2] 97step@mail.ru

Abstract. In this article we investigate a generalized semi-synchronous flow of events with two states and which is related to the class of double stochastic flows. The functioning of flow occurs in conditions of the prolonged dead time of fixed duration. An algorithm for estimating the duration of dead time has been developed. The results of statistical experiments are presented.

Keywords: generalized semi-synchronous double stochastic flow of events; prolonged dead time of fixed duration; probability density; joint probability density; flow recurrence conditions; recurrent flow; Laplace transform; equation of moments; estimation of the dead time duration.

***For citation*:** Nezhel'skaya, L.A., Stepanenko, I.D. (2023) An application of the method of moments to estimation of the dead time duration in recurrent generalized semi-synchronous flow of events with prolonged dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 65–75. doi: 10.17223/19988605/62/7

Введение

Теория массового обслуживания (ТМО) является составной частью исследования операций. С развитием информационных и телекоммуникационных технологий появились важные прикладные задачи ТМО − проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, спутниковых сетей связи, телекоммуникационных сетей и т.п., что повлекло, в свою очередь, появление задач, связанных с исследованием и оптимизацией протекающих в разного рода сетях процессов [1, 2].

Первым потоком для исследования и применения был простейший поток событий. Однако в настоящее время в той или иной степени данная модель является непригодной для описания реальных информационных потоков сообщений (запросов, заявок, событий) в телекоммуникационных сетях из-за разнородности передаваемых данных и их взаимной коррелированности [2]. Таким образом, требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков (коррелированных потоков) [2–6], которые являются широко используемой математической моделью реальных потоков сообщений в телекоммуникационных системах и сетях, глобальных компьютерных сетях, спутниковых сетях связи.

Большинством авторов работ по ТМО исследуются математические модели потоков событий, когда все события потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие может создать период мертвого времени для регистрирующего прибора (период ненаблюдаемости) [7], в течение которого другие события потока становятся недоступными для регистрирующего прибора (теряются).

Можно считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении задач оценивания как состояний потока, так и его параметров.

В данной работе рассматривается обобщенный полусинхронный поток, функционирующий в условиях продевающегося мертвого времени фиксированной длительности (далее – поток). Получены условия рекуррентности, после чего решается уравнение моментов для нахождения оценки длительности мертвого времени в рекуррентном потоке. Приведены результаты статистических экспериментов по оцениванию длительности мертвого времени, поставленных на имитационной модели рассматриваемого потока.

1. Математическая модель потока. Постановка задачи

Рассматривается дважды стохастический обобщенный полусинхронный поток событий, сопровождающий процесс которого есть кусочно-постоянный принципиально ненаблюдаемый случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями [8]: если $\lambda(t)=\lambda_1$, будем говорить, что имеет место первое состояние (S_1) процесса $\lambda(t)$ (потока), если $\lambda(t)=\lambda_2$, то второе состояние (S_2) процесса $\lambda(t)$ (потока), где $\lambda_1>\lambda_2\geq 0$. В течение временного интервала, когда $\lambda(t)=\lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_i, $i=1,2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе $(S_1\to S_2)$ возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0<p\leq 1$), с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность временного интервала, на котором значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ – участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии – есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(t)=1-e^{-p\lambda_1 t}$, $t\geq 0$ [6]. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону $F_2(t)=1-e^{-\alpha_2 t}$, $t\geq 0$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние $(S_2\to S_1)$ осуществляется в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события потока. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0\leq\delta\leq 1$) дополнительное событие в первом состоянии

(т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие; отметим, что переход и наступление события происходят мгновенно). Матрицы интенсивностей переходов (инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$) принимают вид [6]:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha_2 & -(\lambda_2+\alpha_2) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha_2 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы $\mathbf{D}_1$ являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления событий. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

Будем рассматривать обобщенный полусинхронный поток при его неполной наблюдаемости, т.е. когда не все события потока доступны наблюдению. Каждое зарегистрированное в потоке событие порождает период ненаблюдаемости фиксированной длительности *T* (мертвое время), другие события, произошедшие в этот период, недоступны наблюдению (теряются). Хотя события и не наблюдаются в течение периода мертвого времени, каждое из них вызывает продление периода ненаблюдаемости на ту же величину *T*. Следующее наблюдаемое событие регистрируется после окончания последнего периода ненаблюдаемости и снова порождает период мертвого времени длительности *T*. Таким образом, общий период ненаблюдаемости является случайной величиной.

На рис. 1 представлена одна из возможных реализаций процесса $\lambda(t)$ и наблюдаемого потока, где *1, 2* – состояния случайного процесса $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$; $\alpha=\alpha_2$; черные кружки – ненаблюдаемые события; ξ – значения периодов ненаблюдаемости потока; t_1, t_2,... – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

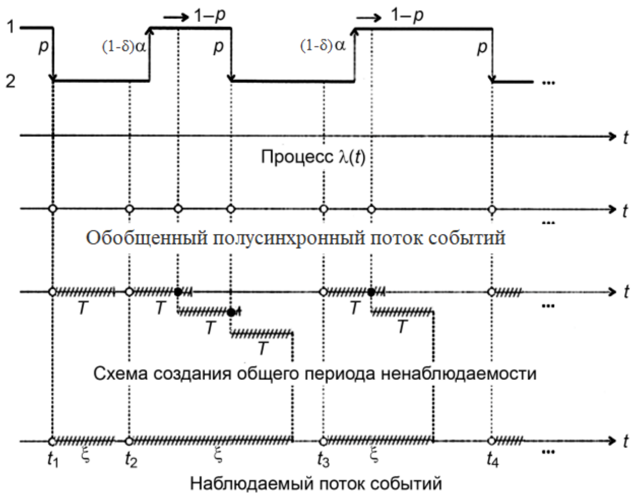

Рис. 1. Реализация обобщенного полусинхронного потока с продлевающимся мертвым временем фиксированной длительности *T*

Fig. 1. Realization of Generalized semi-synchronous flow with an extended dead time of fixed duration *T*

Утверждение 1.1. Для обобщенного полусинхронного потока событий сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ является марковским.

Утверждение 1.2. Моменты наступления событий t_1, t_2,...,t_k,... в наблюдаемом потоке порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$.

Цель работы – вывод уравнения моментов для оценки длительности мертвого времен и проведение ряда статистических экспериментов для установления качества полученных результатов. Настоящая статья является продолжением [9].

2. Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке

В данном разделе приводится явная формула плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в обобщенном полусинхронном потоке в условиях полной наблюдаемости за потоком [8].

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий в условиях полной наблюдаемости, $T=0$, математическое описание которого приведено в разд. 1.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2...$, – значение длительности k-го интервала между соседними событиями потока, $p(\tau_k)$ – плотность вероятности длительности k-го интервала между соседними событиями в рассматриваемом потоке. Так как рассматривается стационарный режим функционирования потока, то $p(\tau_k) = p(\tau)$ для всех k = 1, 2…, $\tau \geq 0$. Поэтому без ограничения общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$.

Теорема 2.1. Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в обобщенном полусинхронном потоке событий в случае $\lambda_1 - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид [8]:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2\tau}, \ \ \tau \geq 0, \ \ \gamma = 1 - \pi_2(0) \frac{\lambda_1 - (\lambda_2 + \delta\alpha_2)}{\lambda_1 - (\lambda_2 + \alpha_2)}, \tag{1}$$

где $z_1 = \lambda_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$, $\pi_2(0) = \dfrac{p(\lambda_2 + \alpha_2)}{p(\lambda_2 + \delta\alpha_2) + \alpha_2}$.

3. Совместная плотность вероятности длительностей двух смежных интервалов

В силу стационарности функционирования потока расположение одного интервала (t_k, t_{k+1}) либо двух смежных интервалов (t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}) между моментами наступления событий потока $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ на временной оси может быть произвольным. Поэтому рассмотрим два соседних временных интервала (t_1, t_2) и (t_2, t_3) со значениями длительностей интервалов $\tau_1 = t_2 - t_1$ и $\tau_2 = t_3 - t_2$ соответственно, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. Соответствующая совместная плотность вероятности при $T = 0$ есть $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Теорема 3.1. Обобщенный полусинхронный поток событий является коррелированным, и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая $\lambda_1 - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид [10]:

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2) + \gamma(1-\gamma) \frac{(\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha_2))}{\lambda_2 + \alpha_2} \left[z_1 e^{-z_1\tau_1} - z_2 e^{-z_2\tau_1} \right] \left[z_1 e^{-z_1\tau_2} - z_2 e^{-z_2\tau_2} \right], \tag{2}$$

где $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, γ, z_1, $z_2, p(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

3.1. Условие рекуррентности потока

Рассмотрим случай, когда поток становится рекуррентным [10]. Анализируя выражение (2), выпишем одно из условий факторизации совместной плотности $\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha_2) = 0$, $p \neq 1$, и соответствующий этому условию вид одномерной плотности (1):

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2\tau}, \ \ \tau \geq 0, \ \ \gamma = 1 - p \frac{\lambda_1 - (\lambda_2 + \delta\alpha_2)}{\lambda_1 - (\lambda_2 + \alpha_2)}, \ \ z_1 = \lambda_1, \ \ z_2 = \lambda_2 + \alpha_2.$$

При остальных условиях рекуррентности $(\gamma(1-\gamma) = 0)$ поток вырождается в простейший.

4. Оценивание длительности мертвого времени методом моментов

Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий в условиях продевающегося мертвого времени производится методом моментов [11]. Для получения уравнения моментов воспользуемся преобразованием Лапласа.

Пусть ξ – значение длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий. Последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, ...$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, и рекуррентность наблюдаемого потока сохранится.

Для нахождения преобразования Лапласа $g_\xi(s)$ плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости рекуррентного обобщенного полусинхронного потока событий воспользуемся теоремой о преобразовании Лапласа $g_\xi(s)$ плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости для произвольного рекуррентного дважды стохастического потока событий [12].

Теорема 4.1. Преобразование Лапласа $g_\xi(s)$ плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид:

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}}\left[1 - \int_0^T e^{-sx}\tilde{p}(x)dx\right]^{-1}, \tag{3}$$

где $\varphi_0(T) = \int_T^\infty \tilde{p}(x)dx = 1 - \int_0^T \tilde{p}(x)dx$ – функция Пальма – вероятность того, что на интервале $(0, T)$ событие потока не наступило; $\tilde{p}(x)$ – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном потоке.

Следствие теоремы 4.1. Математическое ожидание случайной величины ξ определяется в виде:

$$M\xi = -g'_\xi(s)|_{s=0} = T + \frac{1}{\varphi_0(T)}\int_0^T x\tilde{p}(x)dx. \tag{4}$$

В качестве условия рекуррентности в дальнейшем изложении используется только случай $\lambda_2 = p(\lambda_2 + \delta\alpha_2)$, $0 < p < 1$.

Теорема 4.2. Преобразование Лапласа $g_\xi(s)$ плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости рекуррентного обобщенного полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид:

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}}\left[1 - \frac{\gamma z_1(1 - e^{-(z_1+s)T})}{(z_1+s)} - \frac{(1-\gamma)z_2(1 - e^{-(z_2+s)T})}{(z_2+s)}\right]^{-1}, \tag{5}$$

где z_1, z_2, γ определены в разд. 3.1; $\varphi_0(T) = \gamma e^{-z_1T} + (1-\gamma)e^{-z_2T}$.

Доказательство. Применяя к плотности (1) условие рекуррентности $\lambda_2 = p(\lambda_2 + \delta\alpha_2)$, $0 < p < 1$, переобозначив в (3) $\tilde{p}(x)$ на $p(\tau)$, определенную в разд. 3.1, находим

$$\int_0^T e^{-s\tau}p(\tau)d\tau = \int_0^T e^{-s\tau}(\gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma)z_2 e^{-z_2\tau})d\tau = \frac{\gamma z_1}{z_1+s} + \frac{(1-\gamma)z_2}{z_2+s} - \frac{\gamma z_1 e^{-(z_1+s)T}}{z_1+s} - \frac{(1-\gamma)z_2 e^{-(z_2+s)T}}{z_2+s}. \tag{6}$$

Функция Пальма примет вид:

$$\begin{gathered}\varphi_0(T) = \int_T^\infty p(\tau)d\tau = 1 - \int_0^T p(\tau)d\tau = 1 - \int_0^T \gamma z_1 e^{-z_1\tau}d\tau - \int_0^T (1-\gamma)z_2 e^{-z_2\tau}d\tau = \\ = 1 - \left[\gamma - \gamma e^{-z_1T} + (1-\gamma) - (1-\gamma)e^{-z_2T}\right] = \gamma e^{-z_1T} + (1-\gamma)e^{-z_2T}.\end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (3), получим (5). Теорема доказана.

Следствие теоремы 4.2. Математическое ожидание общего периода ненаблюдаемости рекуррентного обобщенного полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид:

$$M\xi = \frac{z_2\gamma\left(1-e^{-z_1T}\right)+z_1\left(1-\gamma\right)\left(1-e^{-z_2T}\right)}{z_1z_2\phi_0\left(T\right)}, \tag{8}$$

где $\varphi_0(T)$, z_1, z_2 определены в (5).

Доказательство. Используя следствие теоремы 4.1 и вычислив производную от $g_\xi(s)$, определенную в (5), в точке $s=0$, по формуле (4) получим (8). Следствие теоремы доказано.

Рассмотрим временной интервал (t_k, t_{k+1}), значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Введем случайную величину $\boldsymbol{\eta}_k$, которая имеет смысл длительности интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости и моментом наступления следующего события t_{k+1}. Таким образом, получим следующее равенство для значений случайной величины: $\eta_k = \tau_k - \xi_k$. Так как в данной работе рассматривается рекуррентный поток, то $\boldsymbol{\tau}_k$, $k=1,2,...,$ – независимые случайные величины, поэтому равенство можно переписать в виде: $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\xi}$; здесь индекс k опущен, поскольку рассматривается произвольный интервал времени между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Случайные величины $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ являются зависимыми. Тогда плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном наблюдаемом потоке примет вид:

$$p(\tau) = \int_0^\tau p(\xi)p(\eta\,|\,\xi)d\xi = \int_0^\tau p(\xi)p(\tau-\xi\,|\,\xi)d\xi. \tag{9}$$

Найдем преобразование Лапласа $g_\tau(s)$ плотности вероятности $p(\tau)$.

Теорема 4.3. Преобразование Лапласа $g_\tau(s)$ плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном потоке событий с продлевающимся мертвым временем имеет вид:

$$g_\tau(s) = \frac{z_1}{z_1+s}g_\xi(s) + sp\frac{(z_1-z_2-\alpha_2(\delta-1))}{(z_1+s)(z_2+s)(p\lambda_1+\alpha_2)}\left[\lambda_1 g_\xi(s) - \lambda_1(1-p)g_\xi(s+p\lambda_1+\alpha_2)\right], \tag{10}$$

где z_1, z_2, определены в (1), $g_\xi(s)$, $g_\xi(s+p\lambda_1+\alpha_2)$ определены в (5) для аргументов s и $s+p\lambda_1+\alpha_2$ соответственно.

Доказательство. Пусть момент наступления события в наблюдаемом потоке есть $\tau=0$. Рассмотрим интервал $(0,\tau)=(0,\xi+\eta)$. Зафиксируем ξ. Введем вероятности $p_{ij}(\tau-\xi)$ − условные вероятности того, что на интервале длительности $\eta=\tau-\xi$ не наступит событий наблюдаемого потока и в момент времени $\tau=\xi+\eta$ значение процесса $\lambda(\xi+\eta)=\lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau=\xi$ значение процесса $\lambda(\xi)=\lambda_i$, $i,j=1,2$. Соответствующие $p_{ij}(\tau-\xi)$ имеют вид:

$$\begin{gathered} p_{11}(\tau-\xi) = e^{-\lambda_1(\tau-\xi)}, p_{12}(\tau-\xi)=0, p_{22}(\tau-\xi)=e^{-(\lambda_2+\alpha_2)(\tau-\xi)}, \\ p_{21}(\tau-\xi) = \frac{(1-\delta)\alpha_2}{\lambda_1-(\lambda_2+\alpha_2)}\left[e^{-(\lambda_2+\alpha_2)(\tau-\xi)} - e^{-\lambda_1(\tau-\xi)}\right],\ \tau\geq 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Имеем $P_1(\tau-\xi) = p_{i1}(\tau-\xi)+p_{i2}(\tau-\xi)$ – условная вероятность того, что на интервале (ξ,τ) событий наблюдаемого потока не произойдет при условии, что в момент времени $\tau=\xi$ значение процесса $\lambda(\xi)=\lambda_i$, $i=1,2$. Тогда условная плотность вероятности значения длительности интервала (ξ,τ) (без наступления событий на этом интервала) по определению есть $p_i(\tau-\xi) = -P_i'(\tau-\xi)$, $i=1,2$. С учетом (11) имеем

$$p_1(\tau-\xi) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-\xi)},\ \ p_2(\tau-\xi) = (\lambda_2+\alpha_2)e^{-(\lambda_2+\alpha_2)(\tau-\xi)},\ \ \xi\leq\tau. \tag{12}$$

Условную плотность $p(\tau-\xi\,|\,\xi)$ в формуле (9) представим в виде:

$$p(\tau-\xi\,|\,\xi)=\pi_1(\tau=\xi\,|\,\xi)\,p_1(\tau-\xi)+\pi_2(\tau=\xi\,|\,\xi)\,p_2(\tau-\xi), \tag{13}$$

где $\pi_i(\tau=\xi\,|\,\xi)$ – условные вероятности того, что в момент времени $\tau=\xi$ значение процесса $\lambda(\tau=\xi)=\lambda_i$, $i=1,2$, при условии, что в момент времени $\tau=0$ событие наступило и наступил общий период ненаблюдаемости длительности ξ.

Используя условие рекуррентности $\lambda_2=p(\lambda_2+\delta\alpha_2)$ и считая $\tau=\xi$, выпишем вероятности $\pi_i(\tau=\xi\,|\,\xi)$, $i=1,2$ в виде [10]:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\tau=\xi\,|\,\xi)&=\frac{\alpha_2(1-p+p\delta)+\pi_1(\lambda_2-p(\lambda_2+\delta\alpha_2))\left[1-e^{-(p\lambda_1+\alpha_2)\xi}\right]}{\alpha_2+p(\lambda_2+\delta\alpha_2)+(\lambda_2-p(\lambda_2+\delta\alpha_2))\left[1-e^{-(p\lambda_1+\alpha_2)\xi}\right]},\\
\pi_2(\tau=\xi\,|\,\xi)&=\frac{p(\lambda_2+\alpha_2)+\pi_2(\lambda_2-p(\lambda_2+\delta\alpha_2))\left[1-e^{-(p\lambda_1+\alpha_2)\xi}\right]}{\alpha_2+p(\lambda_2+\delta\alpha_2)+(\lambda_2-p(\lambda_2+\delta\alpha_2))\left[1-e^{-(p\lambda_1+\alpha_2)\xi}\right]},
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\pi_1=\dfrac{\alpha_2}{p\lambda_1+\alpha_2}$, $\pi_2=\dfrac{p\lambda_1}{p\lambda_1+\alpha_2}$, $\pi_1+\pi_2=1$.

Подставляя (12) и (14) в (13), находим

$$p(\tau-\xi|\xi)=0,\quad 0\le\tau<\xi,\quad p(\tau-\xi\,|\,\xi)=\Gamma(\xi)\lambda_1e^{-\lambda_1(\tau-\xi)}+\left[1-\Gamma(\xi)\right](\lambda_2+\alpha_2)e^{-(\lambda_2+\alpha_2)(\tau-\xi)},\ \ \tau\ge\xi, \tag{15}$$

где $\Gamma(\xi)=1-\pi_2(\xi)\dfrac{\lambda_1-\lambda_2-\delta\alpha_2}{\lambda_1-(\lambda_2+\alpha_2)}$, $\pi_2(\xi)=\pi_2-\left[\pi_2-\pi_2(\tau=\xi\,|\,\xi)\right]e^{-(p\lambda_1+\alpha_2)\xi}$, $\pi_2(\tau=\xi\,|\,\xi)=p$.

Преобразование Лапласа плотности $p(\tau)$ с учетом (9) примет вид:

$$g_\tau(s)=\int\limits_0^\infty e^{-s\tau}p(\tau)d\tau=\int\limits_0^\tau p(\xi)\int\limits_\xi^\infty e^{-s\tau}p(\eta|\xi)d\xi d\tau=g_\xi(s)\int\limits_\xi^\infty e^{-s\eta}p(\eta|\xi)d\tau=g_\xi(s)\int\limits_0^\infty e^{-s(\tau-\xi)}p(\tau-\xi|\xi)d\tau. \tag{16}$$

Подставляя в (16) выражение (15) и проделывая необходимые преобразования, находим

$$g_\tau(s)=\frac{z_1}{z_1+s}g_\xi(s)+\left(\frac{z_2}{z_2+s}-\frac{z_1}{z_1+s}\right)\int\limits_0^\infty e^{-s\xi}\left(1-\Gamma(\xi)\right)p(\xi)d\xi. \tag{17}$$

Подставляя $\Gamma(\xi)$ из (15) в (17), получим (10). Теорема доказана.

Теорема 4.4. Математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид:

$$M\tau=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}-\frac{1}{pz_1+\alpha_2}+M\xi-p\left[z_1(1-p)-\alpha_2\right]\frac{z_1-z_2-\alpha_2(\delta-1)}{z_1z_2(pz_1+\alpha_2)}g_\xi(pz_1+\alpha_2), \tag{18}$$

где z_1, z_2, $g_\xi(pz_1+\alpha_2)$ определены в (1) и (5) при $s=pz_1+\alpha_2$; $M\xi$ определена в (8).

Доказательство. Используя следствие теоремы 4.1, заменив ξ на τ и вычислив производную от $g_\tau(s)$, определенную в (10), в точке $s=0$, по формуле (4) получим (19). Теорема доказана.

5. Уравнение моментов для оценки длительности мертвого времени

В данном разделе статьи описывается оценивание длительности мертвого времени *T* методом моментов.

Введем статистику $C_m=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\tau_k{}^m$, где $\tau_k=t_{k+1}-t_k$ – значение длительности интервала (t_k,t_{k+1}).

Зафиксируем параметры потока λ_1, λ_2, α_2, p, δ. Тогда будет достаточно первого момента, чтобы оценить величину *T*. Уравнение моментов, позволяющее оценить длительность мертвого времени *T*, имеет вид: $M\boldsymbol{\tau} = C_1$, где статистика C_1 при $n \to \infty$ стремится к начальному моменту $M\boldsymbol{\tau}$ [11]. Используя формулу (18), получим уравнение моментов для оценивания длительности мертвого времени *T*:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}-\frac{1}{pz_1+\alpha_2}+\frac{z_2\gamma(1-e^{-z_1T})+z_1(1-\gamma)(1-e^{-z_2T})}{z_1z_2\left(\gamma e^{-z_1T}+(1-\gamma)e^{-z_2T}\right)}-p\left[z_1(1-p)-\alpha_2\right]\frac{z_1-z_2-\alpha_2(\delta-1)}{z_2(pz_1+\alpha_2)}\times$$
$$\times\frac{\left(\gamma e^{-(z_1+pz_1+\alpha_2)T}+(1-\gamma)e^{-(z_2+pz_1+\alpha_2)T}\right)}{e^{(pz_1+\alpha_2)T}}\left[1-\frac{z_1\gamma(1-e^{-(z_1+pz_1+\alpha_2)T})}{(z_1+pz_1+\alpha_2)}-\frac{z_2(1-\gamma)(1-e^{-(z_2+pz_1+\alpha_2)T})}{(z_2+pz_1+\alpha_2)}\right]^{-1}=C_1, \quad (19)$$

где z_1, z_2, γ определены в (5); $0 \le T \le \tau_{\min}$, $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k=\overline{1,n}$.

Решение уравнения (19) возможно только численно. Обозначим левую часть данного уравнения, как $M(T)$. Очевидно, что при увеличении *T* математическое ожидание $M\tau$ возрастает с ростом *T*. Таким образом, $M(T)$ будет возрастающей функцией при $0 \le T$. Следовательно, уравнение (19) имеет единственное решение. Тогда оценка $\hat{\mathbf{T}}$ длительности мертвого времени является состоятельной [11]. Корень уравнения (19) на интервале $0 \le T \le \tau_{\min}$ есть значение оценки $\hat{\mathbf{T}}$. Если на интервале $0 \le T \le \tau_{\min}$ уравнение (19) решения не имеет, то возможны два варианта:

1) если $M(0) \ge C_1$, то в качестве значения оценки $\hat{\mathbf{T}}$ естественно выбрать $\hat{T} = 0$;

2) если $M(\tau_{\min}) < C_1$, то $\hat{T} = \tau_{\min}$.

6. Численные результаты оценивания длительности мертвого времени

Статистика C_1 является результатом работы имитационной модели обобщенного полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности *T*. Имитационная модель реализована на языке программирования C# [13].

Алгоритм оценивания*:*

1) рассчитывается статистика C_1;

2) методом Ньютона рассчитывается корень уравнения (19);

3) *N* раз повторяя шаги 1 и 2, получаем значения оценок $\hat{T}_1, \hat{T}_2, ..., \hat{T}_N$;

4) рассчитывается выборочное среднее и выборочная вариация оценки длительности мертвого времени *T* по формулам

$$\hat{M}(\hat{\mathbf{T}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{T}_i, \quad \hat{V}(\hat{\mathbf{T}}) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{T}_i - T\right)^2.$$

Здесь *T* – значение длительности мертвого времени, известное из имитационной модели рассматриваемого потока.

Зададим параметры потока, соблюдая условие рекуррентности, следующим образом: $\lambda_2 = 1$; $\alpha_2 = 0{,}42$; $\delta = 0{,}8$; $p = 0{,}75$; $T_m = 1300$ ед. времени.

Рассмотрим три варианта задания параметра λ_1: $\lambda_1 = 3$; $\lambda_1 = 7$; $\lambda_1 = 11$, для *T* = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5 ед. времени.

Ниже представлены результаты оценивания (табл. 1−3, рис. 2−7).

Таблица 1

Результаты работы алгоритма для λ_1 = 3

T	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$\hat{M}(\hat{\mathbf{T}})$	0,998584	1,492618	1,989632	2,488640	2,988937	3,479390
$\hat{V}(\hat{\mathbf{T}})$	0,000006	0,000065	0,000131	0,000210	0,000306	0,000920

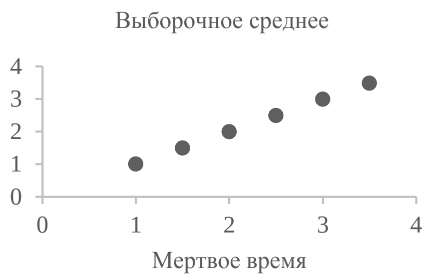

Рис. 2. Выборочное среднее $\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Fig. 2. Sample average $\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

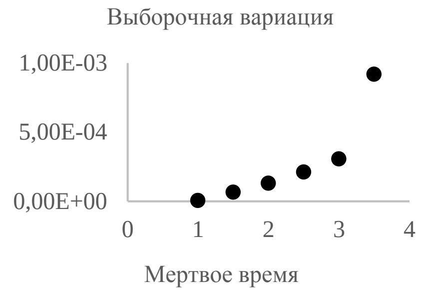

Рис. 3. Выборочная вариация $\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Fig. 3. Sample variation $\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Таблица 2

Результаты работы алгоритма для $\lambda_1 = 7$

T	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$	1,000058	1,497625	1,997458	2,497454	2,996384	3,486561
$\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$	0,000004	0,000014	0,000024	0,000071	0,000174	0,000501

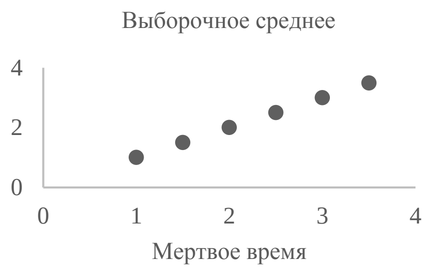

Рис. 4. Выборочное среднее $\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Fig. 4. Sample average $\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

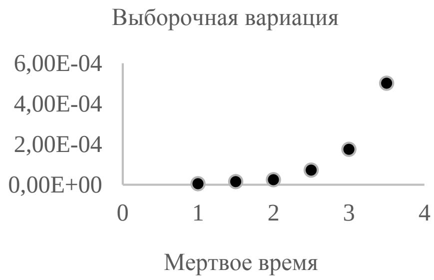

Рис. 5. Выборочное вариация $\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Fig. 5. Sample variation $\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Таблица 3

Результаты работы алгоритма для $\lambda_1 = 11$

T	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$	1,000079	1,497675	1,997467	2,497575	2,996850	3,491620
$\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$	0,000004	0,000014	0,000034	0,000074	0,000190	0,000510

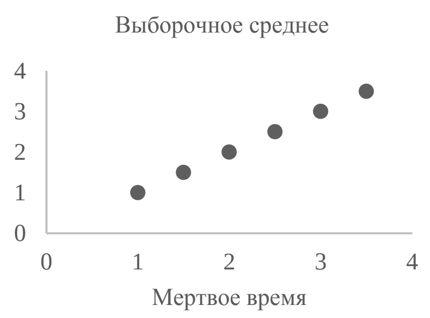

Рис. 6. Выборочное среднее $\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Fig. 6. Sample average $\hat{M}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

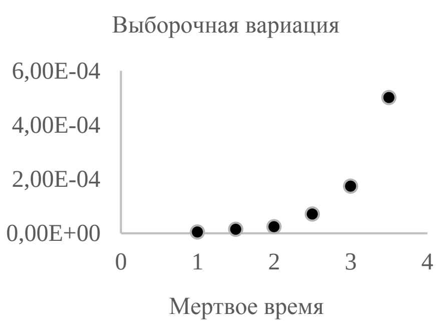

Рис. 7. Выборочное вариация $\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Fig. 7. Sample variation $\hat{V}\left(\hat{\mathbf{T}}\right)$

Вывод: результаты статистических экспериментов, представленные в табл. 1−3, показывают, что выборочные средние значения $\hat{T}$ оценок $\hat{\mathbf{T}}$ достаточно близки к истинным значениям *T*. При увеличении *T* увеличивается значение выборочной вариации оценки $\hat{\mathbf{T}}$. Это связано с увеличением общего периода ненаблюдаемости потока событий, что влечет за собой большую потерю событий обобщенного полусинхронного потока при наличии продлевающегося мертвого времени.

Заключение

В настоящей работе рассмотрен обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности *T*. Для рекуррентного наблюдаемого потока событий построено преобразование Лапласа плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости и преобразование Лапласа плотности вероятности длительности интервалов между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Получено уравнение моментов для определения значения $\hat{T}$ оценки $\hat{\mathbf{T}}$ длительности мертвого времени *T*. Проведены статистические эксперименты, показавшие приемлемое качество оценок.

Список источников

1. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1978. 208 с.
2. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
6. Нежельская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. 210 с.
7. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
8. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 66–81.
9. Нежельская Л.А., Степаненко И.Д. Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. 2022. Т. 307. С. 37–46.
10. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–27.
11. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
12. Нежельская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. … д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.
13. Нежельская Л.А., Степаненко И.Д. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного полусинхронного потока событий с продлевающимся мертвым временем фиксированной длительности // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. 2021. Т. 306. С. 82–89.

References

1. Gortsev, A.M., Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (1978) *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Management and adaptation in queuing systems]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primenenie v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.

4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika.* 1. pp. 55–61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability.* 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
6. Nezhelskaya, L.A. (2020) *Otsenka sostoyaniy dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytiy* [Estimation of states of doubly stochastic flows of events]. Tomsk: Tomsk State University.
7. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of random flows in a physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
8. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2010) Optimal estimation of the states of a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(11). pp. 66–81.
9. Nezhelskaya, L.A. & Stepanenko, I.D. (2022) Estimation of the duration of the fixed dead time of a generalized semi-synchronous stream of events functioning in conditions of prolonged dead time. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiziko-matematicheskaya*. 307. pp. 37–47.
10. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) Joint probability density of the duration of intervals of generalized semisynchronous flow of events with non-lasting dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(27). pp. 19–27.
11. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Vol. 1. Tomsk: NTL.
12. Nezhelskaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytiy* [Evaluation of states and parameters of doubly stochastic flows of events]. Physics and Mathematics Dr. Diss. Tomsk.
13. Nezhelskaya, L.A. & Stepanenko, I.D. (2021) Statistical experiments on a simulation model of a generalized semi-synchronous flow of events with an extended dead time of fixed duration. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiziko-matematicheskaya – Proceedings of Tomsk State University. Ser. Phys.-Math.* 306. pp. 82–89.

***Информация об авторах*:**

Нежельская Людмила Алексеевна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ludne@mail.ru

Степаненко Илья Денисович – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 97step@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**

Nezhel'skaya Lyudmila A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ludne@mail.ru

Stepanenko Ilya D. (Master's Student, Department of Applied Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 97step@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 13.10.2022; принята к публикации 01.03.2023

Received 13.10.2022; accepted for publication 01.03.2023