

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.6

MSC: 41A60

doi: 10.17223/19988621/82/1

**Локализованные собственные функции
в асимптотической модели спектральной задачи****Евгения Александровна Молчанова***Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова,
Абакан, Россия, mevgen2001@mail.ru*

Аннотация. В двумерной краевой задаче на собственные значения производится асимптотическое разделение переменных на основе ожидаемой формы решения, которая предполагается локализованной в окрестности некоторых точек или линий.

Ключевые слова: спектральная задача, асимптотический метод, локализация собственных функций

Для цитирования: Молчанова Е. А. Локализованные собственные функции в асимптотической модели спектральной задачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/82/1

Original article

**Localized eigenfunctions in the asymptotic model
of the spectral problem****Evgeniya A. Molchanova***Khakas State University, Abakan, Russian Federation, mevgen2001@mail.ru*

Abstract. Localized eigenfunctions in the two-dimensional spectral problem containing a small parameter with higher derivatives are constructed on the expected solution form. Localization in this context means that the solution exponentially decays in both directions starting from the "weakest" point or line. The constructions are based on the algorithm introduced by V.P. Maslov. A modification of this algorithm for the thin shell theory problems is given as an application. The paper shows implementation of the algorithm to obtain formulas giving eigenvalues and corresponding eigenfunctions. An example of solving a specific problem is given, illustrating stages of the applied asymptotic model.

Keywords: spectral problem, asymptotic method, localization of eigenfunctions

For citation: Molchanova, E.A. (2023) Localized eigenfunctions in the asymptotic model of the spectral problem. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/82/1

Цель работы – построение локализованных собственных функций и соответствующих собственных значений для уравнений в частных производных с малым параметром [1, 2].

Построение собственных значений и соответствующих им собственных функций для краевых задач с частными производными представляет в общем случае трудно разрешимую задачу. Аналитическое решение может быть построено, как правило, лишь для областей, допускающих разделение переменных, после чего исходная задача сводится к более простой одномерной краевой задаче.

В уравнениях, содержащих малый параметр при старшей производной, можно использовать прием асимптотического разделения переменных [3–5]. Дальнейшее упрощение связано с частными предположениями о форме решений. В одних случаях решение занимает всю область интегрирования, в других – локализуется в окрестности точек или линий, которые принято называть «наиболее слабыми». В зависимости от ожидаемой формы решения используются различные варианты формальных асимптотических разложений, из которых одного-двух первых приближений достаточно для аппроксимации и для хорошего численного результата. Локализованные решения для уравнений в частных производных с малым параметром могут быть построены по алгоритму В.П. Маслова [6]. Локализация понимается в том смысле, что решение экспоненциально затухает в обе стороны от «наиболее слабой» точки или линии. Модифицируя алгоритм Маслова в соответствии с предметной сущностью, его можно применять к решению различных прикладных задач. В частности, его можно использовать в теории оболочек [7].

Пусть имеем класс оболочек, включающий в себя цилиндрические и близкие к цилиндрическим оболочки. При отсутствии симметрии, например при некоторой некруговой срединной поверхности или косых краях, естественно ожидать локализации собственных форм.

Исходная система уравнений

$$\varepsilon^4 \Delta^4 w + \Delta_R \Phi - \lambda w = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_R w = 0, \quad \Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (1)$$

$$\Delta_R = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{R_2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial}{\partial s} \right)$$

имеет восьмой порядок и содержит две переменные – s и φ [8].

В системе (1) используются следующие обозначения: $w = R\varepsilon^4 w_*$, $Eh\Phi = \Phi_*$, $\varepsilon^8 = h^2 [12(1 - \nu^2)R^2]^{-1}$, $\lambda = \lambda^* \varepsilon^{-4} R^2$, $\lambda^* = \rho w^2 E^{-1}$ – спектральный параметр, w_* , Φ_* – нормальный прогиб и функция напряжений, $w_* = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} w_n(\xi, s)$, $\xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0)$, w_n – полиномы по ξ , A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратич-

ной формы, R_1, R_2, R_{12} – радиусы кривизны поверхности, близкой к поверхности нулевой гауссовой кривизны, которая задается векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu f(s, \varphi) \vec{n}_0. \quad (2)$$

Координата s отсчитывается вдоль образующей, φ – вдоль направляющей, функция $f(s, \varphi)$ описывает отклонение от поверхности нулевой гауссовой кривизны, μ – малый параметр. Радиус-вектор $\vec{r}_0$ определяет положение точки на поверхности нулевой кривизны, орт внешней нормали $\vec{n}_0$ которой образует правую тройку с ортами координатных линий s, φ . Для определения коэффициентов A_1, A_2 и радиусов R_1, R_2, R_{12} дифференцируем с помощью деривационных формул Гаусса–Вейнгартена радиус-вектор (2) по s, φ , обозначая производную по координате ее индексом снизу. Возводя в квадрат векторы $\partial \vec{r} / \partial s, \partial \vec{r} / \partial \varphi$ получаем

$$A_1^2 = 1 + \mu^2 f_s^2, \quad A_2^2 = 1 + 2\mu f K + \mu^2 (f_\varphi^2 + f^2 K^2), \quad (3)$$

где обозначено $K(\varphi) = A_2^0 / R_2^0$ отношение параметров, относящихся к поверхности нулевой кривизны.

Асимптотические разложения для R_1, R_2, R_{12} оказываются более громоздкими, чем разложения (3) для A_1, A_2 . Для дальнейшего достаточно оставить лишь старшие члены с указанием асимптотического порядка отброшенных слагаемых:

$$\frac{1}{R_1} = -\mu f_{ss} + O(\mu^2), \quad \frac{1}{R_{12}} = \mu f_{s\varphi} + O(\mu^2), \quad \frac{1}{R_2} = K - \mu(K^2 f + f_{\varphi\varphi}) + O(\mu^2).$$

Решение, локализованное вблизи φ_0 , отыскивается в виде асимптотических разложений

$$w(s, \varphi, \varepsilon) = w(s) \cdot \exp\{i\varepsilon^{-1}[q(\varphi - \varphi_0) + 0.5a(\varphi - \varphi_0)^2]\}, \quad (4)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_2 + \varepsilon^2 \lambda_4 + \dots,$$

что приводит к последовательности уравнений

$$H_0 w_0 = 0, \quad H_0 w_1 + H_1 w_0 = 0, \quad H_0 w_2 + H_1 w_1 + H_2 w_0 = 0, \dots, \quad (5)$$

в которой

$$H_0 w_0 = \frac{K^2(\varphi_0)}{q^4} w_0^{IV} + \frac{K(\varphi_0)}{q^2} [(f'' w_0)'' + f'' w_0] + [q^4 + f'^2 - \lambda_0] w_0,$$

$$H_1 w_0 = (a \frac{\partial H_0}{\partial q} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi}) \xi w_0 - i \frac{\partial H_0}{\partial q} \frac{\partial w_0}{\partial \xi}, \quad (6)$$

$$H_2 w_0 = 0.5(a^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + 2a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \varphi^2}) \xi^2 w_0 - i(a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi}) \xi \frac{\partial w_0}{\partial \xi} -$$

$$- 0.5 \frac{\partial H_0}{\partial q^2} (i a w_0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2}) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi} w_0 - \lambda_2 w_0.$$

Параметр q определяет изменяемость в направлении φ .

Уравнения (1), дополненные соответствующими граничными условиями, образуют последовательность краевых задач для определения коэффициентов асимптотических разложений (4). Кроме основного параметра λ_0 эти задачи содержат еще два параметра – q, φ_0 . Учитывая минимальное свойство низшего соб-

ственного значения, при построении нижней части спектра можно использовать условия минимума функции $\lambda_0(q, \varphi_0)$. Так, для краевой задачи нулевого приближения имеем условия

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q^2} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} - \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q \partial \varphi_0} > 0. \quad (7)$$

Обозначим q^0 и φ_0^0 те значения, при которых функция $\lambda_0(q, \varphi_0)$ достигает минимума: $\lambda_0 = \lambda_0^0$.

Для определения производных, входящих в (7), дифференцируем по параметрам краевую задачу нулевого приближения

$$H_0 w_0 = 0, \quad w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), s = s_2(\varphi_0).$$

Дифференцирование по параметру q дает одну краевую задачу:

$$H_0 w_q + \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0 - \frac{\partial \lambda_0}{\partial q} w_0 = 0; \quad w_q = 0, \quad \frac{\partial^2 w_q}{\partial s^2} = 0.$$

Дифференцирование по параметру φ_0 дает другую краевую задачу:

$$H_0 w_\varphi + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} w_0 - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} w_0 = 0; \quad w_\varphi + \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} = 0.$$

Обе задачи можно символически записать в одной форме:

$$H_0 z + G(s) = 0; \quad z + g_{0j} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + g_{2j} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Условие существования решения этой неоднородной задачи определяется следующим выражением:

$$\int_{s_1}^{s_2} w_0 G ds + \frac{K^2(\varphi)}{q^4} (g_{0j} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} + g_{2j} \frac{\partial w_0}{\partial s}) \Big|_{s_1}^{s_2} = 0. \quad (8)$$

При помощи (8) первое из условий (7) приобретают вид:

$$\int_{s_1}^{s_2} w_0 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0 ds = 0, \quad \int_{s_1}^{s_2} w_0 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0 ds + 2 \frac{K^2}{q^4} \frac{\partial w_0}{\partial s} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad (9)$$

а вторые производные функции $\lambda_0(q, \varphi_0)$ определяются из равенств

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} w_0 (2 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_q + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} w_0) ds - \lambda_{qq} \int_{s_1}^{s_2} w_0^2 ds = 0, \quad w_{qq} = \frac{\partial^2 w_{qq}}{\partial s^2} \Big|_{s_2}^{s_1} = 0, \\ \int_{s_1}^{s_2} w_0 (2 \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} w_\varphi + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \varphi_0^2} w_0) ds - \lambda_{\varphi\varphi} \int_{s_1}^{s_2} w_0^2 ds + \frac{K^2}{q^4} \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial s} + 2 \frac{\partial w_\varphi}{\partial s} \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} \cdot 2 \right] \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \\ w_{\varphi\varphi} + \frac{\partial w_0}{\partial s} + 2 \frac{\partial w_\varphi}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_{\varphi\varphi}}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} + 2 \frac{\partial^3 w_\varphi}{\partial s^3} = 0, \\ \int_{s_1}^{s_2} w_0 (2 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_\varphi + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi} w_0 + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} w_{\varphi q}) ds - \\ - \lambda_{q\varphi} \int_{s_1}^{s_2} w_0^2 ds + \frac{K}{q^4} \left[\left(\frac{\partial w_{q\varphi}}{\partial s} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} + \frac{\partial^3 w_{q\varphi}}{\partial s^3} \frac{\partial w_0}{\partial s} \right) \right] \Big|_{s_1}^{s_2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_{q\varphi} + \frac{\partial w_q}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_{q\varphi}}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 w_{q\varphi}}{\partial s^3} = 0.$$

Краевая задача нулевого приближения имеет решение

$$w_0(\xi, s) = W_0(\xi)w_0^0(s), \quad (11)$$

где $w_0^0(s)$ – собственная функция задачи при условиях $\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0$, $W_0(\xi)$ – пока не определенная функция.

В первом приближении имеем краевую задачу

$$H_0 w_1 + [\xi W_0 (a \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0}) - i W_0' \frac{\partial H_0}{\partial q}] w_0^0 = 0, \quad (12)$$

$$w_1 + \xi W_0 \frac{\partial w_0^0}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} + \xi W_0 \frac{\partial^3 w_0^0}{\partial s^3} = 0 \quad \text{при } s = s_1, s = s_2,$$

решением которой является функция

$$w_1(\xi, s) = W_1(\xi)w_1^0(s) + \xi W_0(a w_q + w_{\varphi}) - i W_0' w_q, \quad (13)$$

где w_q, w_{φ} – решение задач (9) при $w_0 = w_0^0$, $W_1(\xi)$ – пока не определенная функция.

Краевую задачу второго приближения составляют уравнение

$$H_0 w_2 + H_1 w_1 + H_2 w_0 = 0 \quad (14)$$

и граничные условия $w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0$.

С использованием равенств (8), (9) можно показать, что условие существования решения w_2 этой задачи записывается в виде уравнения

$$L W_0 \equiv -0.5 \lambda_{qq} W_0'' + b \xi W_0' + (-\lambda_2 + 0.5b + c \xi^2) W_0 = 0, \quad (15)$$

где $b = i(a \lambda_{q\varphi} + \lambda_{\varphi\varphi})$, $2c = a^2 \lambda_{q\varphi} + 2a \lambda_{q\varphi} + \lambda_{\varphi\varphi}$.

При $c = 0$, $\lambda_2 = (n + 0.5)b$ уравнение (15) является уравнением Эрмита и имеет решение $W_0 = H_n(\xi)$, где H_n – полином Эрмита степени n [9].

Из квадратного уравнения $c = 0$ в силу условия $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q^2} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} - (\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q \partial \varphi_0})^2 > 0$

находится единственная величина

$$a = (-\lambda_{q\varphi} + i \sqrt{\lambda_{qq} \lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_{q\varphi}^2}) / \lambda_{qq} \quad (16)$$

такая, что $\text{Im } a > 0$. Параметр a характеризует затухаемость при удалении от «наиболее слабой» образующей φ_0 . Условие $\text{Im } a > 0$ обеспечивает убывание решения с ростом $|\varphi - \varphi_0|$. Так как теперь действительная часть $\text{Re } b$ параметра b равна $\sqrt{\lambda_{qq} \lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_{q\varphi}^2}$, имеем серию собственных значений

$$\lambda^{(n)} = \lambda_0^0 + \varepsilon(n + \frac{1}{2}) \sqrt{\lambda_{qq} \lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_{q\varphi}^2} + O(\varepsilon^2). \quad (17)$$

Соответствующие действительные собственные функции являются линейными комбинациями действительной и мнимой частей решения (4), которое можно представить в виде:

$$w = (\operatorname{Re} w_* + i \operatorname{Im} w_*) \exp \left\{ i\varepsilon^{-1} \left[q(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} (\operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a)(\varphi - \varphi_0)^2 \right] \right\} =$$

$$= (\operatorname{Re} w_* \cos z - \operatorname{Im} w_* \sin z) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} a \xi^2 \right\},$$

где $\xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0)$, $z = \varepsilon^{-1/2}q\xi + 0.5\operatorname{Re} a \xi^2$.

Описанный алгоритм, основывающийся на минимизации функции $\lambda(q, \varphi_0)$, можно истолковывать как метод замораживания коэффициентов.

Действительно, заменяя зависящие от φ функции их значениями при $\varphi = \varphi_0$, мы решаем некоторую опорную задачу, отвечающую замороженным функциям.

В качестве примера рассмотрим применение алгоритма к решению спектральной задачи для оболочки, близкой к эллиптическому цилиндру длиной l , заданному в полярной системе координат уравнением

$$\rho(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \delta^2 \cos^2 \theta}}, \quad \delta = \sqrt{1 - \beta^2 / \alpha^2}. \quad (19)$$

Отклонение срединной поверхности от идеального цилиндра считаем не зависящим от окружной координаты и имеющим форму параболы

$$f(s) = 4As(s-l)l^{-2}, \quad (20)$$

где A – амплитудный множитель.

Выбрав граничные условия, например $w_0(0) = w_0(l) = 0$, $w_0''(0) = w_0''(l) = 0$, решаем спектральную задачу $H_0 w_0 = 0$, из которой следует формула

$$\lambda_0 = q^4 + l^{-4} (K(\varphi_0) \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A)^2, \quad (21)$$

задающая функцию $\lambda_0(q, \varphi_0)$ параметров q и φ_0 .

Выпишем необходимые для дальнейшего производные по параметрам q , φ_0 от функции $\lambda(q, \varphi_0)$, обозначая дифференцирование нижними индексами

$$\lambda_q = 4q^3 - 4 \frac{K}{q} \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right), \quad (22)$$

$$\lambda_{qq} = 12q^2 + 12K \cdot \left(\frac{\pi n}{q^2 l^2}\right)^2 \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right) + 8 \frac{K^2}{q^2} \left(\frac{\pi n}{ql}\right)^4, \quad (23)$$

$$\lambda_\varphi = 2K_\varphi \cdot \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right), \quad (24)$$

$$\lambda_{\varphi\varphi} = 2 \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 \left(K_{\varphi\varphi} \cdot \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right) + K_\varphi^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2\right), \quad (25)$$

$$\lambda_{q\varphi} = -\frac{4}{q} \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 K_\varphi \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right) - \frac{4}{q} \left(\frac{\pi n}{q}\right)^4 K \cdot K_\varphi. \quad (26)$$

«Наиболее слабыми» линиями являются образующие $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$, на которых равенства (24), (25) показывают, что на наиболее слабых образующих кривизна на $K(\varphi_0)$ достигает минимума. При этом $K_{\min} = \frac{1-\delta}{\beta}$, β – малая полуось эллипса.

Для определения значений кривизны используем известную формулу

$$K(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta}}{(\rho^2 + \rho_\theta^2)^{3/2}}. \quad (27)$$

Дифференцируя (27) по θ дважды, получаем для $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$

$$K_{\theta\theta} = \frac{3(1+\delta^4)\delta^2}{b}, \quad K_{\phi\phi} = K_\theta K. \quad (28)$$

Значения q^0 определяются исходя из условия $\lambda_q = 0$ уравнением восьмой степени

$$q^8 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (1-\delta^2) f q^2 - (1-\delta^2)^2 + (K_\phi)^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 = 0. \quad (29)$$

В таблице содержатся результаты расчетов для нескольких значений множителя A при $l = 2.56$, $\delta = 0,745$. Данные последней колонки получаются по формуле $\lambda_0 = \lambda_0^0 + \varepsilon \lambda_2$, в которой $\varepsilon^{-1} = 6.38$.

Результаты расчетов для различных значений множителя A

A	q^0	λ_{qq}	$\lambda_{\phi\phi}$	λ_2	λ_0^0	λ_0
-6	1.5462	58.079	9.1723	11.5403	69.2934	71.1035
-4	1.4513	51.580	7.1199	9.5818	34.1739	35.6768
-2	1.3114	43.164	4.7464	7.1567	11.7672	12.8897
0	1.0233	33.510	1.7600	3.8398	1.54573	2.1480

Пользуясь результатами расчетов, можно построить собственные функции.

Возьмем, например, данные последней строки таблицы и изобразим на рис. 1 четную осцилляционную компоненту из (18) $\exp\{-0.5 \operatorname{Im} a \xi^2\} \cos(z)$.

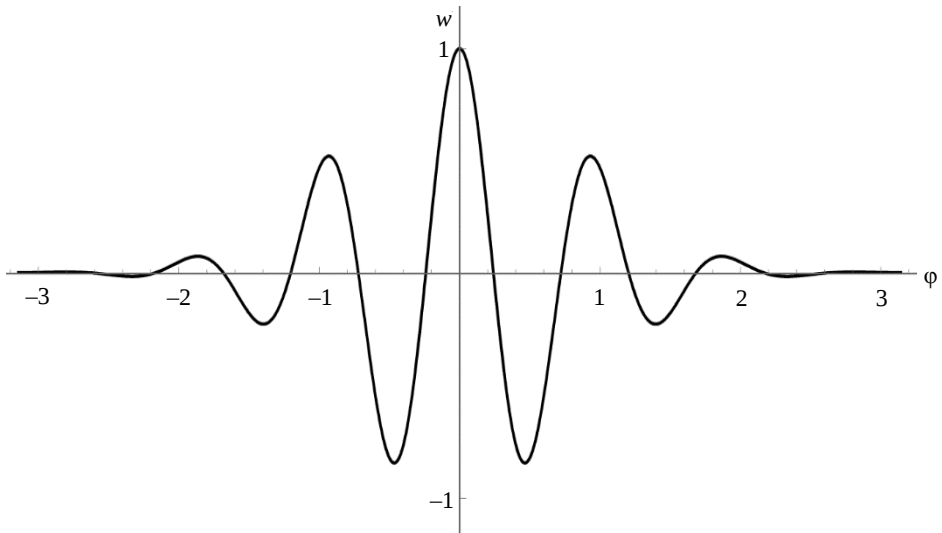


Рис. 1. График одномерной четной осцилляционной компоненты

Fig. 1. Graph of one-dimensional symmetric oscillation component

Умножая ее на главную часть $w_0^0(s) = \sin(\frac{\pi s}{l})$ разложения решения w_* , получим двумерную собственную функцию.

Аналогично строятся нечетная компонента и общее решение (18).

Таким образом, имеем следующие результаты: с помощью асимптотического разделения переменных по алгоритму В.П. Маслова построены двумерные собственные функции, локализованные в окрестности так называемых «наиболее слабых» линий. Показано применение рассматриваемого алгоритма к задаче теории тонких оболочек. Выведена формула для собственных значений.

Список источников

1. Молчанова Е.А. Численно-аналитическое определение собственных значений краевой задачи // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : материалы Междунар. конф. (Улан-Удэ, 22–27 июня 2015 г.). Улан-Удэ : Изд-во ВСГУТУ, 2015. С. 196–198.
2. Молчанова Е.А. Определение низших собственных значений краевой задачи // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : материалы II Всеросс. науч. конф. с междунар. участием (22–24 апреля 2019 г.). Тольятти : Изд. Качалин А.В., 2019. С. 281–285.
3. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб. : Политехника, 2012. 302 с.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, вып. 5 (77). С. 3–122.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М. : Высшая школа, 1990. 208 с.
6. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в линейных уравнениях. М. : Наука, 1977. 384 с.
7. Товстик П.Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271, № 1. С. 69–71.
8. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М. : Наука, 1979. 384 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.

References

1. Molchanova E.A. (2015) Chislenno-analiticheskoye opredeleniye sobstvennykh znacheniy krayevoy zadachi [Numerically-analytical determination of eigenvalues of the boundary value problem]. *Differential Equations and Mathematical Modeling: Materials of the International Conference, Ulan-Ude, 2015*. Ulan-Ude: VSGUTU. pp. 196–198.
2. Molchanova E.A. (2019) Opredeleniye nizshikh sobstvennykh znacheniy krayevoy zadachi [Determination of lower eigenvalues of the boundary value problem]. *Information Technologies in Modeling and Control: Approaches, Methods, Solutions: Materials of the 2nd All-Russia Scientific Conference with International Participation, Togliatti, April 22–24, 2019*. Togliatti: Kachalin. pp. 281–285.
3. Argatov I.I. (2012) *Vvedeniye v asimptoticheskoye modelirovaniye v mekhanike* [Introduction to asymptotic modeling in mechanics]. St. Petersburg: Politehnika.
4. Vishik M.I., Lyusternik L.A. (1957) Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a parameter. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 12(5). pp. 3–122.

5. Vasilyeva A.B., Butuzov V.F. (1990) *Asimptoticheskiye metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* [Asymptotic methods in the theory of singular perturbations]. Moscow: Vysshaya shkola.
6. Maslov V.P. (1977) *Kompleksnyy metod VKB v lineynykh uravneniyakh* [Complex WKB method in linear equations]. Moscow: Nauka.
7. Tovstik P.E. (1983) Dvumernyye zadachi ustoychivosti i kolebaniy obolochek nulevoy gaussovoy krivizny [Two-dimensional problems of stability and oscillations of shells of zero Gaussian curvature]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 271(1), pp. 69–71.
8. Gol'denveyzer A.L., Lidskiy B.V., Tovstik P.E. (1979) *Svobodnyye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells], Moscow: Nauka.
9. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. (2001) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam* [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторе:

Молчанова Евгения Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и систем Хакасского государственного университета им. Н.Ф. Катанова, Абакан, Россия. E-mail: mevgen2001@mail.ru

Information about the author:

Molchanova Evgeniya A. (Candidate of Physics and Mathematics, Khakas State University, Abakan, Russian Federation). E-mail: mevgen2001@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.05.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 18.05.2022; accepted for publication 31.03.2023