

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 531.383

doi: 10.17223/19988621/82/5

Динамика микромеханического гироскопа типа $R-L$ с двумя точечными массами в режиме свободных колебаний**Егор Александрович Антонов¹, Ольга Валерьевна Грибова²**¹ ПАО «Туполев», Москва, Россия, Ve.no.m@yandex.ru² Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Москва, Россия, gribovaov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается микромеханический гироскоп типа $R-L$ в режиме свободных колебаний. Для рассматриваемой расчетной схемы гироскопа построена соответствующая функция Лагранжа и получены уравнения движения в линейной постановке задачи. Найдено решение в переменных амплитуда–фаза при помощи метода осреднения Крылова–Боголюбова. В итоге получены уравнения для угла прецессии гироскопа и исследовано поведение гироскопа в орбитальных координатах.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, свободные колебания, угол прецессии, камертон

Для цитирования: Антонов Е.А., Грибова О.В. Динамика микромеханического гироскопа $R-L$ типа с двумя точечными массами в режиме свободных колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 55–65. doi: 10.17223/19988621/82/5

Original article

Dynamics of a micromechanical dual-mass gyroscope of RL -type in a free oscillation mode**Egor A. Antonov¹, Olga V. Gribova²**¹ Joint Stock Company “Tupolev”, Moscow, Russian Federation, Ve.no.m@yandex.ru

² National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
Moscow, Russian Federation, gribovaov@mail.ru

Abstract. This paper presents the analysis of a mechanical and theoretical model of a micromechanical *RL*-type gyroscope (MMG). The behavior of the resonator in a free oscillation mode is studied by solving the problem in a linear formulation. The main part of the paper is devoted to the mathematical model development for a dual-mass MMG with a disk-shaped resonator, which is fixed on the elastic leg on a movable base. The important condition of the problem implies the arbitrary angular velocity of the base Ω . The derived equations are analyzed in terms of orbital coordinates (r, k, θ, χ) . The equations determining the precession angle (θ) of the considered gyroscope are obtained. A brief analysis of the proposed dependences and the corresponding conclusions about the behavior of the system under free oscillations are presented.

Keywords: micromechanical gyroscope, free oscillations, precession angle, tuning fork

For citation: Antonov, E.A., Gribova, O.V. (2023) Dynamics of a micromechanical dual-mass gyroscope of *RL*-type in a free oscillation mode. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 55–65. doi: 10.17223/19988621/82/5

Введение

Сегодня создание высокоточных устройств навигации на базе микромеханических гироскопов (ММГ) открывает новые возможности в области управления движением объектов в аэрокосмической, робототехнической областях, медицине, а также в развлекательной сфере жизнедеятельности человека. Такие микроустройства имеют ряд неоспоримых преимуществ перед аналогами: сверхмалые габариты и масса, минимальное энергопотребление [1, 2]. Однако достигнутая на сегодняшний день точность ММГ не допускает применения таких устройств в автономных режимах и системах, так как реальные условия работы (вибрация, акустические воздействия, меняющаяся температура) существенно влияют на точностные характеристики подобных гироскопов, и им требуется постоянная коррекция.

Вопрос повышения точностных характеристик гироскопических датчиков приводит к обширному кругу проблем, связанных как с технологическим аспектом (изготовление резонаторов), так и с научно-исследовательскими изысканиями. Анализ и решение задач, связанных с повышением нечувствительности ММГ к реальным условиям работы, – актуальная на сегодняшний день проблема, над которой активно трудятся ученые и инженеры во многих странах [3, 4].

Описание рассматриваемой модели гироскопа

На рис. 1 представлена упрощенная расчетная схема чувствительного элемента рассматриваемого микромеханического гироскопа типа *R-L*.

Рассматривается ММГ, чувствительным элементом которого является диск с закрепленными друг напротив друга на упругих подвесах (пружинах) двумя точечными массами. Диск крепится на упругой ножке к основанию, вращающемуся с произвольной угловой скоростью Ω .

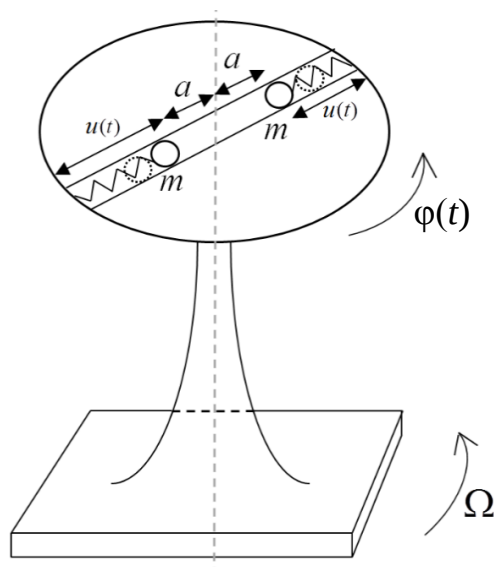


Рис. 1. Расчетная схема чувствительного элемента
Fig. 1. Design scheme of a sensing element

Цель работы – получение уравнений, описывающих движение данной теоретико-механической модели ММГ, представленного на рис. 1, и их качественный анализ.

Уравнения движения

Рассмотрим связанную систему «подвижное основание – упругая ножка – диск – точечная масса». Угловая скорость основания Ω в работе будет рассматриваться как произвольная (по терминологии В.Ф. Журавлёва [5], т.е. Ω соизмеримо меньше собственной частоты колебаний ω_0 , иначе прибор будет неработоспособен). Также стоит отметить, что массу диска в данной постановке задачи считаем пренебрежимо малой величиной.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии вращения диска и кинетической энергии двух масс:

$$T = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m \left(\dot{u}^2 + (a + u)^2 (\dot{\phi} + \Omega)^2 \right), \quad (1)$$

где I – момент инерции упругой ножки камертона, соединяющей основание гироскопа и диск, Ω – угловая скорость основания, ϕ – угол кручения упругой ножки (малая величина $\phi \ll 1$), m – точечная масса, $u(t)$ – обобщенная координата, которая описывает колебание инерционной массы m в каждый момент времени, $2a$ – расстояние между точечными массами m в резонаторе в состоянии покоя. Дифференцирование по времени далее будем обозначать точкой.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} C \phi^2 + \frac{1}{2} k u^2 + \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} C \phi^2 + k u^2, \quad (2)$$

где C – жесткость на кручение упругой ножки камертона, k – жесткость пружин, к которым прикреплены точечные массы m .

Лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m (\dot{u}^2 + (a + u)^2 (\dot{\phi} + \Omega)^2) - \frac{1}{2} C \phi^2 - k u^2. \quad (3)$$

Для простоты дальнейших вычислений введем параметр $\psi = \psi(t) = u(t)/a \ll 1$ – нормализованная обобщенная координата, где в качестве нормирующего параметра взята величина a . Подставив указанную замену в уравнение (3), получим выражение

$$L = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m a^2 (\dot{\psi}^2 + (\psi + 1)^2 (\dot{\phi} + \Omega)^2) - \frac{1}{2} C \phi^2 - a^2 k \psi^2. \quad (4)$$

Далее преобразуем (4), оставляя квадратичные слагаемые [6] и слагаемые первого порядка малости. Лагранжиан принимает вид:

$$L = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m a^2 (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 4 \Omega \dot{\phi} \psi) - \frac{1}{2} C \phi^2 - a^2 k \psi^2. \quad (5)$$

Общий вид уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + Q_i, \quad (6)$$

где q_i – обобщенная координата, Q_i – внешние обобщенные силы, которые действуют в направлении обобщенных координат q_i , Φ – диссипативные силы.

Найдем все слагаемые левой части уравнений (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= I (\dot{\phi} + \Omega) + 2 m a^2 \dot{\phi} + 4 m a^2 \Omega \psi; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \ddot{\phi} (I + 2 m a^2) + 4 m a^2 \Omega \dot{\psi}; \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -C \phi; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 2 m a^2 \dot{\psi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 2 m a^2 \ddot{\psi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 4 m a^2 \Omega \dot{\phi} - 2 a^2 k \psi.$$

В итоге получим систему уравнений движения чувствительного элемента, рассматриваемого ММГ:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 2 j \Omega \dot{\psi} + \omega_1^2 \phi &= 0; \\ \ddot{\psi} - 2 \Omega \dot{\phi} + \omega_2^2 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $j = \frac{2 m a^2}{I + 2 a^2 m}$ – безразмерный массово-инерционный параметр системы,

$\omega_1 = \omega = \sqrt{\frac{C}{I + 2 a^2 m}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственные частоты колебаний упругой ножки камертона и массы на упругом подвесе.

Учтем, что собственные частоты связаны следующим образом: $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – рассогласование частот, далее в задаче считаем, что $|\Delta\omega| \ll \omega$.

Диссипацию, присутствующую в колебательной системе, задаем функцией Релея

$$\Phi = \frac{1}{2} G_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} G_2 \dot{\psi}^2, \quad (9)$$

где G_1 – коэффициент, который определяет энергию рассеивания при скручивании упругой ножки камертона; G_2 – коэффициент, учитывающий рассеивание энергии при движении инерционной массы m .

С учетом связи собственных частот и функции Релея (9) перепишем систему (8):

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + 2j\Omega\dot{\psi} + \omega^2\phi &= -2\gamma_1\omega\dot{\phi}; \\ \ddot{\psi} - 2\Omega\dot{\phi} + \omega^2\psi &= -2\gamma_2\omega\dot{\psi} - 2\omega\Delta\omega\psi,\end{aligned}\quad (10)$$

где γ_1 и γ_2 – безразмерные коэффициенты затухания.

Введем замену переменных

$$\phi = x\sqrt{j}, \quad \psi = y. \quad (11)$$

В новых переменных система уравнений (10) приняла вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\sqrt{j}\Omega\dot{y} + \omega^2x &= -2\gamma_1\omega\dot{x}; \\ \ddot{y} - 2\sqrt{j}\Omega\dot{x} + \omega^2y &= -2\gamma_2\omega\dot{y} - 2\omega\Delta\omega y.\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнения (12) описывают линейные свободные колебания рассматриваемой механической системы на подвижном основании, вращающемся с произвольной скоростью Ω .

С целью удобства анализа полученных уравнений введем замену в правой части (12):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\sqrt{j}\Omega\dot{y} + \omega^2x &= F_1; \\ \ddot{y} - 2\sqrt{j}\Omega\dot{x} + \omega^2y &= F_2,\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$F_1 = -2\gamma_1\omega\dot{x}; \quad F_2 = -2\gamma_2\omega\dot{y} - 2\omega\Delta\omega y. \quad (14)$$

Анализ динамики чувствительного элемента

Решение системы (13) будем искать, основываясь на методике осреднения Крылова–Боголюбова [6].

Общий вид решения в переменных амплитуда–фаза имеет вид:

$$\begin{aligned}x &= A(t)\cos(\omega_1 t + \alpha(t)) + B(t)\cos(\omega_2 t + \beta(t)); \\ y &= A(t)\sin(\omega_1 t + \alpha(t)) + B(t)\sin(\omega_2 t + \beta(t)).\end{aligned}\quad (15)$$

Найдем решение однородной системы уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + 2\sqrt{j}\Omega\dot{y}_0 + \omega^2x_0 &= 0; \\ \ddot{y}_0 - 2\sqrt{j}\Omega\dot{x}_0 + \omega^2y_0 &= 0,\end{aligned}\quad (16)$$

в виде:

$$\begin{aligned}x_0 &= A_0\cos(\omega_2 t + \alpha_0) + B_0\cos(\omega_2 t + \beta_0); \\ y_0 &= A_0\sin(\omega_1 t + \alpha_0) + B_0\sin(\omega_2 t + \beta_0),\end{aligned}\quad (17)$$

где A_0 , B_0 , α_0 и β_0 – константы, а частоты ω_1 и ω_2 – корни однородной системы (16)

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{j}\Omega + \sqrt{\omega^2 + j\Omega^2}, \\ \omega_2 &= \sqrt{j}\Omega - \sqrt{\omega^2 + j\Omega^2}.\end{aligned}\quad (18)$$

Так как выше было сказано, что угловая скорость основания – величина произвольная, но для работоспособности прибора должно выполняться условие $|\Omega| \ll |\omega|$, корни однородного уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{j}\Omega + \omega; \\ \omega_2 &= \sqrt{j}\Omega - \omega.\end{aligned}\tag{19}$$

Далее будем искать непосредственно решение системы (13) в виде (15), где $A(t)$, $B(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – медленные функции времени, для сокращения объемов дальнейших выкладок опустим в обозначениях амплитуд и фаз зависимость от времени и введем замены

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \omega_1 t + \alpha; \\ \lambda_2 &= \omega_2 t + \beta.\end{aligned}\tag{20}$$

Найдем обобщенные скорости, продифференцировав (15) по времени:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_1 A \sin \lambda_1 - \omega_2 B \sin \lambda_2; \\ \dot{y} &= \omega_1 A \cos \lambda_1 + \omega_2 B \cos \lambda_2.\end{aligned}\tag{21}$$

Для системы (21) запишем соответствующее уравнение совместности:

$$\begin{aligned}\dot{A} \cos \lambda_1 - A \dot{\alpha} \sin \lambda_1 + \dot{B} \cos \lambda_2 - B \dot{\beta} \sin \lambda_2 &= 0; \\ \dot{A} \sin \lambda_1 + A \dot{\alpha} \cos \lambda_1 + \dot{B} \sin \lambda_2 + B \dot{\beta} \cos \lambda_2 &= 0.\end{aligned}\tag{22}$$

Продифференцируем по времени еще раз уравнения (21) для нахождения обобщенных ускорений:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\dot{A} \omega_1 \sin \lambda_1 - A \omega_1 (\dot{\alpha} + \omega_1) \cos \lambda_1 - \dot{B} \omega_2 \sin \lambda_2 - B \omega_2 (\dot{\beta} + \omega_2) \cos \lambda_2; \\ \ddot{y} &= \dot{A} \omega_1 \cos \lambda_1 - A \omega_1 (\dot{\alpha} + \omega_1) \sin \lambda_1 + \dot{B} \omega_2 \cos \lambda_2 - B \omega_2 (\dot{\beta} + \omega_2) \sin \lambda_2.\end{aligned}\tag{23}$$

Подставим полученные обобщенные скорости (21) и обобщенные ускорения (23) в исходную систему уравнений (13). Преобразовав полученные выражения, совместно с уравнениями совместности запишем следующую систему четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}-\dot{A} \omega_1 \sin \lambda_1 - A \omega_1 \dot{\alpha} \cos \lambda_1 - \dot{B} \omega_2 \sin \lambda_2 - B \omega_2 \dot{\beta} \cos \lambda_2 &= F_1; \\ \dot{A} \omega_1 \cos \lambda_1 - A \omega_1 \dot{\alpha} \sin \lambda_1 + \dot{B} \omega_2 \cos \lambda_2 - B \omega_2 \dot{\beta} \sin \lambda_2 &= F_2; \\ \dot{A} \cos \lambda_1 - A \dot{\alpha} \sin \lambda_1 + \dot{B} \cos \lambda_2 - B \dot{\beta} \sin \lambda_2 &= 0; \\ \dot{A} \sin \lambda_1 + A \dot{\alpha} \cos \lambda_1 + \dot{B} \sin \lambda_2 + B \dot{\beta} \cos \lambda_2 &= 0.\end{aligned}\tag{24}$$

Теперь проведем следующие преобразования:

- умножим четвертое уравнение в (24) на ω_2 и сложим с первым уравнением;
- умножим третье уравнение в (24) на ω_2 и вычтем из второго уравнения;
- умножим четвертое уравнение в (24) на ω_1 и сложим с первым уравнением;
- умножим третье уравнение в (24) на ω_1 и вычтем из него второе уравнение.

В итоге система (24) примет вид:

$$\begin{aligned}-\dot{A}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_1 - A \dot{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_1 &= F_1; \\ \dot{A}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_1 - A \dot{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_1 &= F_2; \\ \dot{B}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_2 + B \dot{\beta}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_2 &= F_1; \\ \dot{B}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_2 - B \dot{\beta}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_2 &= -F_2.\end{aligned}\tag{25}$$

Теперь разрешим полученную систему уравнений (25) относительно $\dot{A}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{B}$, $\dot{\beta}$, проведя следующие преобразования, а также вернемся от замен λ_1 и λ_2 к исходным выражениям:

- умножим второе уравнение в (25) на $\cos \lambda_1$, а первое на $\sin \lambda_1$, и вычтем одно из другого;
- умножим второе уравнение в (25) на $\sin \lambda_1$, а первое на $\cos \lambda_1$, и сложим их;
- умножим четвертое уравнение в (25) на $\cos \lambda_2$, а третье на $\sin \lambda_2$, и сложим их;
- умножим четвертое уравнение в (25) на $\sin \lambda_2$, а третье на $\cos \lambda_2$, и вычтем одно из другого.

В итоге получена система уравнений для медленных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} -\dot{A} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \sin(\omega_1 t + \alpha) - F_2 \cos(\omega_1 t + \alpha)); \\ -A\dot{\alpha} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \cos(\omega_1 t + \alpha) + F_2 \sin(\omega_1 t + \alpha)); \\ \dot{B} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \sin(\omega_2 t + \beta) - F_2 \cos(\omega_2 t + \beta)); \\ B\dot{\beta} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \cos(\omega_2 t + \beta) + F_2 \sin(\omega_2 t + \beta)), \end{aligned} \quad (26)$$

где F_1 и F_2 равны с учетом (15) и (21)

$$\begin{aligned} F_1 &= -2\gamma_1 \omega (-\omega_1 A \sin(\omega_1 t + \alpha) - \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \beta)); \\ F_2 &= -2\gamma_2 \omega (\omega_1 A \cos(\omega_1 t + \alpha) + \omega_2 B \cos(\omega_2 t + \beta)) - \\ &\quad - 2\omega \Delta \omega (A \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \sin(\omega_2 t + \beta)). \end{aligned} \quad (27)$$

Так как переменные $A(t)$, $B(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – медленные функции времени, можно применить процедуру осреднения Крылова–Боголюбова [6]. Воспользуемся общей формулой

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) d\tau. \quad (28)$$

В результате осреднения правых частей системы (24) получим следующие выражения для $\dot{A}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{B}$, $\dot{\beta}$:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\gamma}{2} (\omega + \sqrt{j}\Omega) A; \quad \dot{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{2}; \\ \dot{B} &= -\frac{\gamma}{2} (\omega - \sqrt{j}\Omega) B; \quad \dot{\beta} = -\frac{\Delta\omega}{2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Решение системы (29) имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(\omega + \sqrt{j}\Omega)t}; \quad B = B_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(\omega - \sqrt{j}\Omega)t}; \\ \alpha - \alpha_0 &= \frac{\Delta\omega}{2} t; \quad \beta - \beta_0 = -\frac{\Delta\omega}{2} t, \end{aligned} \quad (30)$$

где A_0 , B_0 , α_0 , β_0 – начальные условия.

Анализировать поведение чувствительного элемента лучше всего в торoidalных координатах (r, k, θ) [5], где θ – угол ориентации волновой картины

(угол прецессии); r и k – нормализованные амплитуды основной и квадратурной волн колебаний, главные полуоси эллипса (рис. 2, а).

Вид решения в орбитальных координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \theta \cos(\omega t + \chi) - k \sin \theta \sin(\omega t + \chi); \\ Y &= r \sin \theta \cos(\omega t + \chi) + k \cos \theta \sin(\omega t + \chi), \end{aligned} \quad (31)$$

где χ – фаза, которая характеризует изменение частоты колебаний и задает положение фазовой точки в начальный момент времени.

Запишем уравнения перехода от переменных амплитуда–фаза к переменным Ван-дер-Поля p_1, p_2, q_1, q_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= -A \sin(\sqrt{j}\Omega + \alpha) + B \sin(\sqrt{j}\Omega + \beta); \\ q_1 &= A \cos(\sqrt{j}\Omega + \alpha) + B \cos(\sqrt{j}\Omega + \beta); \\ p_2 &= A \cos(\sqrt{j}\Omega + \alpha) - B \cos(\sqrt{j}\Omega + \beta); \\ q_2 &= A \sin(\sqrt{j}\Omega + \alpha) + B \sin(\sqrt{j}\Omega + \beta). \end{aligned} \quad (32)$$

В таком случае можно записать выражение для угла прецессии

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2}, \\ \theta &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2} \right) = \frac{1}{2} (2\sqrt{j}\Omega t + \alpha + \beta) = \sqrt{j}\Omega t + \tilde{\theta} = \sqrt{j}\Omega t, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\tilde{\theta} = \alpha + \beta$ – дополнительная медленная прецессия волновой картины, определяющая величину ухода прибора.

Выражение для фазы χ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\chi &= \frac{2(q_1 p_1 + q_2 p_2)}{p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2}, \\ \chi &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2(q_1 p_1 + q_2 p_2)}{p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)t}{\cos(\alpha - \beta)t} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \Delta\omega t}{\cos \Delta\omega t} \right) = \frac{\Delta\omega t}{2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Перепишем теперь выражения (32) через орбитальные координаты:

$$\begin{aligned} p_1 &= -r \cos \theta \sin \chi - k \sin \theta \cos \chi; \\ q_1 &= r \cos \theta \cos \chi - k \sin \theta \sin \chi; \\ p_2 &= -r \sin \theta \sin \chi + k \cos \theta \cos \chi; \\ q_2 &= r \sin \theta \cos \chi + k \cos \theta \sin \chi. \end{aligned} \quad (35)$$

Полная энергия колебаний E (сумма амплитуд, возведенных в квадрат, по каждой из обобщенных координат) в таком случае записывается в следующем виде:

$$E = p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2 = r^2 + k^2. \quad (36)$$

Момент количества движения X , который определяет «стоячую волну» колебаний (она возникает в том случае, когда $X = 0$), равен

$$X = 2(p_2 q_1 - p_1 q_2) = 2rk. \quad (37)$$

Далее проведем следующую цепочку преобразований для нахождения полуосей r и k ($r > k$):

$$\begin{aligned} E + X &= r^2 + k^2 + 2rk = (r+k)^2; \quad E - X = (r-k)^2; \\ r+k &= \sqrt{E+X}; \quad r-k = \sqrt{E-X}, \end{aligned} \quad (38)$$

в итоге

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{E+X} + \sqrt{E-X}; \\ k &= \sqrt{E+X} - \sqrt{E-X}. \end{aligned} \quad (39)$$

После всех подстановок и преобразований получим следующие выражения [7]:

$$\begin{aligned} r &= A + B; \\ k &= A - B; \\ \theta &= \sqrt{j\Omega}t; \\ \chi &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)t = \frac{\Delta\omega t}{2}, \end{aligned} \quad (40)$$

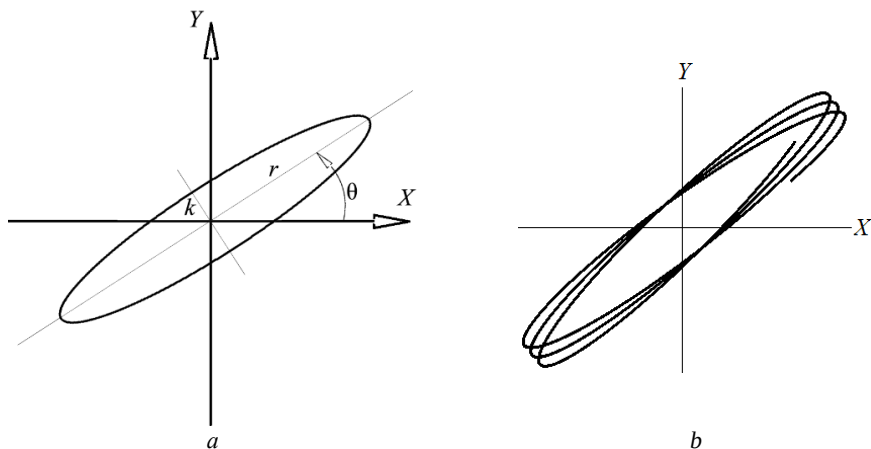


Рис. 2. Траектории движения фазовой точки на координатной плоскости в случаях неподвижного (а) и подвижного (б) основания

Fig. 2. Trajectories of the phase point motion on a coordinate plane in the case of the (a) fixed and (b) moving base

На подвижном основании фазовая точка описывает фигуру Лиссажу (рис. 2, б), которая со временем «заметет» всю координатную плоскость.

Из анализа полученных зависимостей следует, что на подвижном основании при линейной постановке задачи возникает расщепление частот. На основании полученных выражений (30) можно утверждать, что в режиме свободных колебаний значения фаз α и β никак не влияют на значение угла прецессии θ .

Заключение

В представленной работе был проанализирован гироскоп R-L типа (см. рис. 1) с резонатором в виде диска, на котором закреплены на упругих подвесах две то-

чечные массы и который, в свою очередь, закреплен на подвижном основании, вращающемся с произвольной угловой скоростью, при помощи упругой ножки. Построена теоретико-механической модель такого гироскопа при помощи формализма Лагранжа и метода усреднения Крылова–Боголюбова. В конечном итоге был произведен переход к орбитальным координатам и проведен анализ полученных зависимостей, который показал, что в режиме свободных колебаний при линейной постановке задачи значения фаз α и β никак не влияют на изменение угла прецессии θ .

Список источников

1. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации на МЭМС-датчиках. Тула : Изд-во ТулГУ, 2017. 225 с.
2. Mammadov A.Z. The model of inertial navigation system on base of mems sensors for unmanned aerial vehicles // Кронос. 2019. № 10 (37). С. 24–29.
3. Матвеев В.В., Погорелов М.Г. Анализ погрешностей микромеханических гироскопов методом вариаций Аллана // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2015. Вып. 3. С. 123–135.
4. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. Simulation of Translational Vibrations Effect on Torque-to-Balance RR-Type MEMS Gyroscope // Gyroscopy and Navigation. 2018. Vol. 9 (1). P. 50–56.
5. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1997. № 6. С. 27–35.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1974. 503 с.
7. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М. : Физматлит, 2009. 228 с.

References

1. Matveev V.V., Raspopov V.Ya. (2017) *Pribory i sistemy orientatsii, stabilizatsii i navigatsii na MEMS-datchikakh* [Devices and systems of orientation, stabilization, and navigation based on MEMS sensors]. Tula: Tula State University Publishing House.
2. Mammadov A.Z. (2019) The model of inertial navigation system on base of mems sensors for unmanned aerial vehicles. *Kronos*. 10(37). pp. 24–29.
3. Matveev V.V., Pogorelov M.G. (2015) Analiz pogreshnostey mikromekhanicheskikh giroskopov metodom variatsiy Allana [Error analysis of micromechanical gyroscopes by Allan variance]. *Izvestiya TulGU – Bulletin of Tula State University*. 3. pp. 123–135.
4. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. (2018) Simulation of translational vibrations effect on torque-to-balance RR-type MEMS gyroscope. *Gyroscopy and Navigation*. 9(1). pp. 50–56. doi: 10.1134/S2075108718010029
5. Zhuravlev V.F. (1997) Upravlyaemyy mayatnik Fuko kak model' odnogo klassa svobodnykh giroskopov [A controlled Foucault pendulum as a model of a class of free gyros]. *Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 27–35.
6. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.
7. Merkuriev I.V., Podalkov V.V. (2009) *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторах:

Антонов Егор Александрович – кандидат технических наук, начальник бригады ПАО «Туполев», Москва, Россия. E-mail: Ve.no.m@yandex.ru

Грибова Ольга Валерьевна – старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ», Москва, Россия. E-mail: gribovaov@mail.ru

Information about the authors:

Antonov Egor A. (Candidate of Technical Sciences, Joint Stock Company “Tupolev”, Moscow, Russian Federation). E-mail: Ve.no.m@yandex.ru.

Gribova Olga V. (Senior Lecturer, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow, Russian Federation). E-mail: gribovaov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27.12.2021; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 27.12.2021; accepted for publication 31.03.2023