

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.623.23

MSC: 13J05; 12J15

doi: 10.17223/19988621/83/1

Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов

Наталья Юрьевна Галанова

Томский государственный университет, Томск, Россия, galanova@math.tsu.ru

Аннотация. При исследованиях, связанных с классификацией вещественно замкнутых полей, существенно используются поля формальных степенных рядов с мультипликативной делимой группой архимедовых классов. Рассмотрим линейно упорядоченную абелеву делимую группу $G = G(L, \mathbf{Q})$, которая состоит из слов с образующими из линейно упорядоченного множества L , подобного ординалу ω_1 , и рациональными показателями. В статье рассматриваются свойства сечений подполей поля ограниченных формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$. Для всех $\xi_i \in L$ положим $t_i = \xi_i^{-1}$. Рассмотрим бесконечную строго убывающую последовательность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, где $\Gamma \subseteq \omega_1 \setminus \{1\}$ есть произвольное бесконечное множество. Ряды вида $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \cdot t_\gamma \in \mathbf{R}[[G]]$, где $r_\gamma \neq 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$, т.е. $\text{supp}(x) = \{t_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, назовем *рядами вида (*)*. Доказывается, что ряды вида (*) при $r_\gamma > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$ порождают в поле $q\mathbf{R}[[G, \aleph_0]] = K$ симметричные нефундаментальные сечения конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$, в вещественном замыкании $\overline{q\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]} = \overline{K}$ ряды (*) порождают симметричные сечения. Пусть H – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, содержащее $\overline{K}$ и все усечения ряда $x_{\omega_1} = \sum_{\gamma \in \omega_1} 1 \cdot t_\gamma$. Тогда $\overline{K} \neq H$ и элементы вещественного замыкания простого трансцендентного расширения $\overline{H}(x_{\omega_1})$, не принадлежащие H , порождают в поле H симметричные сечения типа $(\aleph_1, \aleph_1)$.

Ключевые слова: делимая линейно упорядоченная абелева группа, вещественно замкнутое поле, поле ограниченных формальных степенных рядов, симметричное сечение, конфинальность сечения, фундаментальное сечение, поле частных

Для цитирования: Галанова Н.Ю. Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/83/1

On cuts of the quotient field of a ring of formal power series

Nataliya Yu. Galanova

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, galanova@math.tsu.ru

Abstract. Formal (generalized) power series with a divisible group of Archimedean classes are significantly used in studies related to the classification of real closed fields. In this paper, we investigate subfields of a real closed field of bounded formal power series by means of the cut theory. The theory of cuts for ordered fields allows us to describe their properties and find out whether ordered fields are isomorphic. We use the terminology of G. Pestov, S. Shelah, and others. A cut (A, B) of an ordered field is called *symmetric* (or a *non-ball cut*) if for each $a \in A$ there exists such $a_1 \in A$ that $a_1 + (a_1 - a) \in B$ and for each $b \in B$ there exists $b_1 \in B$ such that $b_1 - (b - b_1) \in A$. A cut (A, B) of an ordered field F is called a *fundamental cut* (or a *Scott cut*) if $\forall \varepsilon \in F^+ \exists a \in A \exists b \in B b - a < \varepsilon$. Let $L = \{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \omega_1}$ be a well-ordered set similar to the

ordinal ω_1 . We extend this set to a divisible totally ordered Abelian group $G = \{g = \xi_{i_1}^{q_{i_1}} \xi_{i_2}^{q_{i_2}} \dots \xi_{i_n}^{q_{i_n}} \mid \xi_{i_1} > \xi_{i_2} > \dots > \xi_{i_n}; \xi_{i_j} \in L \setminus \{\xi_1\}, q_{i_j} \in \mathbf{Q}, j = \overline{1, n}, n \in \mathbf{N}\} \cup \{\xi_1\}$, with a unit $1 = \xi_1$. Denote by $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ the field of bounded formal power series $x = \sum_{g \in G} r_g g, r_g \in \mathbf{R}$ with $|\text{supp}(x)| < \aleph_1$. Let $\overline{K} = \overline{q[\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]]} \subset \mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ be the

smallest real closed field which has G as its group of Archimedean classes.

We show that some formal power series in the record of which there is an infinite number of generators of L realize symmetric non-fundamental cuts with cofinality $(\aleph_0, \aleph_0)$ in the field K , and this series realize symmetric cuts in the field $\overline{K}$. Let H be the smallest by inclusion real closed subfield of the field $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ containing $\overline{K}$ and all truncations of the series $x_{\omega_1} = \sum_{\gamma \in \omega_1} 1 \cdot \xi_\gamma^{-1}$. We prove that $\overline{K} \neq H$ and the elements of the real

closure of a simple transcendental extension $\overline{H(x_{\omega_1})}$ not belonging to H generate symmetric $(\aleph_1, \aleph_1)$ cuts in the field H . Question: let $\langle G, \cdot, \leq \rangle$ be a totally ordered divisible Abelian group such that $|G| = cf(G) = \alpha \geq \aleph_0$; are the fields $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ and $\overline{q[\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]]}$ ordered isomorphic?

Keywords: divisible totally ordered Abelian group, real closed field, field of bounded formal (generalized) power series, symmetric cut (non-ball cut), cofinality of a cut, fundamental cut (Scott cut), quotient field

For citation: Galanova, N.Yu. (2023) On cuts of the quotient field of a ring of formal power series. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 5–16. doi: 10.17223/19988621/83/1

1. Вещественно замкнутые поля. Поля формальных степенных рядов.

Здесь $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел. Далее все поля в данной статье линейно упорядоченные и неархимедовы. Поле F называется неархимедовым, если $\exists a \in F^+$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N} \quad a > n$. Элементы $a, b \in F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F называются *архимедовски эквивалентными*, если существует такое натуральное число n , что $n|a| > |b|$ и $n|b| > |a|$. Фактор-группа G_F мультипликативной группы $F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F по отношению архимедовской эквивалентности называется *группой архимедовых классов* поля F [1]. Будем обозначать архимедов класс поля F с представителем $x \in F$ через $\hat{x}$.

Линейно упорядоченное поле F называется *вещественно замкнутым*, если каждое упорядоченное алгебраическое расширение поля F совпадает с F . Вещественная замкнутость поля F равносильна тому, что каждый положительный элемент в F является квадратом и каждый многочлен над F нечетной степени имеет корень в F . Для каждого упорядоченного поля F существует его максимальное упорядоченное алгебраическое расширение $\bar{F}$, называемое *вещественным замыканием* данного поля [2].

Вещественно замкнутые поля являются обобщением поля вещественных чисел $\mathbf{R}$. Вещественно замкнутым полем, например, является нестандартная вещественная прямая ${}^*\mathbf{R}$, которую можно реализовать как поле ограниченных формальных степенных рядов [3, 4].

В [3] приводится обзор исследований, связанных с подходами к классификации упорядоченных полей. При этом существенно используются поля формальных степенных рядов с мультипликативной делимой группой архимедовых классов, поскольку, как доказал И. Капланский, каждое вещественно замкнутое поле F вкладывается с сохранением порядка в поле формальных степенных рядов, построенных по группе архимедовых классов G_F данного поля.

Пусть $\langle G, \cdot, \leq \rangle$ – линейно упорядоченная абелева группа, β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Через $\mathbf{R}[[G]]$ обозначается *поле формальных степенных рядов* $x = \sum_{g \in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbf{R}$ и носитель ряда $\text{supp}(x) = \{g \in G \mid r_g \neq 0\}$ – вполне антиупорядоченное (каждое непустое подмножество имеет наибольший элемент) подмножество группы G . Полагаем $x > 0 \Leftrightarrow r_{g_0} > 0$, $g_0 = \max(\text{supp}(x))$ [1].

Замечание 1.1. Пусть $\langle G, \cdot, \leq \rangle$ есть произвольная линейно упорядоченная абелева группа. Если $x, y \in \mathbf{R}[[G]]$, то $\text{supp}(x \cdot y) \subseteq \{g \cdot h \mid g \in \text{supp}(x), h \in \text{supp}(y)\}$ и $\text{supp}(x + y) \subseteq \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y)$.

А.И. Кокорин и В.М. Копытов в [5] доказывают следующее утверждение (в книге рассматриваются ряды с вполне упорядоченными носителями, мы же рассматриваем ряды с вполне антиупорядоченными носителями, формулировку факта приведем с изменениями знака неравенства, соответствующего данной статье):

Лемма 1.1. [5. С. 86] Пусть $y \in \mathbf{R}[[G]]$ – такой ряд, что $y = 1 + x$, где $x = \sum_{g \in G} r_g g$ и $r_g = 0$ при $g \geq 1$. Тогда ряд $z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ принадлежит $\mathbf{R}[[G]]$ и является обратным для ряда y .

Через $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ обозначается поле таких формальных степенных рядов x , что $|\text{supp}(x)| < \beta$. Это поле называется *полем ограниченных формальных степенных рядов* [3].

Группы архимедовых классов упорядоченных полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ изоморфны G . Будем отождествлять группы архимедовых классов полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ с группой G .

В дальнейшем, говоря об F как о подполе поля $\mathbf{R}[[G_F]]$, мы имеем в виду вложение $\varphi: F \rightarrow \mathbf{R}[[G_F]]$ такое, что каждый архимедов класс поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ содержит элемент из $\varphi(F)$ [3. С. 49]. При изоморфном вложении вещественно замкнутого поля F в поле $\mathbf{R}[[G_F]]$ будем отождествлять группу архимедовых классов поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ с группой G_F .

Мультипликативная группа G называется *делимой*, если для любого $g \in G$ и любого натурального n существует решение уравнения $h^n = g$. Известно (S. MacLane [3]), что если группа G делимая, то поля $\mathbf{R}[[G]]$, $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ вещественно замкнуты.

2. О сечениях вещественно замкнутых полей.

В обзорной статье [6] приводятся различные классификации сечений упорядоченных структур. Из упомянутых в [6] работ будем использовать терминологию и теоремы из [7–11].

Пара непустых подмножеств A и B упорядоченного поля F называется *сечением* поля F , если $A < B$ (т.е. $\forall a \in A \forall b \in B \ a < b$) и $A \cup B = F$. В этом случае сечение будем обозначать (A, B) .

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *симметричным* [7], если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $a_1 + (a_1 - a) \in B$, и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $b_1 - (b - b_1) \in A$. В этом случае множества A и B называют *длинными берегами сечения*.

Пусть A – упорядоченное множество, $X \subset A$. Говорят, что X *конфинально* (коинициально) A , если для каждого $x \in A$ существует $y \in X$ такое, что $x \leq y$ ($x \geq y$). Наименьшая мощность среди мощностей всех множеств, конфинальных (коинициальных) A , называется *конфинальностью* (коинициальностью) A и обозначается $cf(A)$ и $coi(A)$ соответственно [3].

Сечение (A, B) упорядоченного поля F будем называть сечением типа (α, β) , если $cf(A) = \alpha$, $coi(B) = \beta$; также используются термины «конфинальность сече-

ния», «тип конфинальности сечения» [6, 8, 11]. Если сечение симметрично, то $cf(A) = coi(B)$ [4].

Пусть F – упорядоченное расширение поля K . Будем говорить, что элемент $x \in F \setminus K$ порождает сечение (A, B) в упорядоченном поле K , если $A < x < B$ [7, 11].

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *фундаментальным* (или *сечением Скотта*), если $\forall \varepsilon \in F^+ \exists a \in A \exists b \in B \ b - a < \varepsilon$ [8, 11]. Если сечение (A, B) неархимедова поля F фундаментально и не производится элементом самого поля, то (A, B) будет сечением типа $(cf(G_F), cf(G_F))$ [8, 11].

Теорема 2.1. [12. Утв. 2.2]. Пусть вещественно замкнутое поле F имеет группу архимедовых классов G_F . Сечение (A, B) поля F симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $x \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$ такой, что $A < x < B$.

Сечение упорядоченного множества (группы, поля), которое не производится никаким элементом данного множества (группы, поля), называется *собственным* (в [11] собственные сечения упорядоченного поля называются *дедекиндовыми* сечениями).

Замечание 2.1. Если (C, D) – сечение группы архимедовых классов G вещественно замкнутого неархимедова поля F и $A = F^- \cup \{0\} \cup \{x \in F^+ \mid \hat{x} \in C\}$, $B = F \setminus A = \{x \in F^+ \mid \hat{x} \in D\}$, то (A, B) будет несимметричным сечением поля F . При этом, если (C, D) – собственное сечение группы G , то $cf(C) = cf(A)$, $coi(D) = coi(B)$. Если множество C (множество D) имеет наибольший (соответственно наименьший) элемент, то сечение (C, D) имеет тип $(1, coi(D))$ (соответственно $(cf(C), 1)$) и, поскольку архимедов класс имеет конфинальность и коинициальность $\aleph_0$, соответствующее сечение (A, B) будет иметь тип $(\aleph_0, coi(D))$ (соответственно $(cf(C), \aleph_0)$).

3. Сечения полей формальных степенных рядов с группой архимедовых классов $G = G(L, \mathbf{Q})$

Далее группа G будет фиксирована.

Рассмотрим линейно упорядоченную абелеву делимую группу $G = G(L, \mathbf{Q})$, описанную автором в [9], которая состоит из слов с образующими из линейно упорядоченного множества L , подобного ординалу ω_1 , и рациональными показателями. Рассмотрим поле ограниченных формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, свойства которого изучены автором в [9], и продолжим исследование свойств сечений некоторых подполей этого поля.

Пусть $L = \{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \omega_1}$ – вполне упорядоченное множество, подобное ординалу $\omega_1 = \{1, 2, 3, \dots, \omega_0, \dots\}$. Здесь $\xi_{\gamma_1} < \xi_{\gamma_2}$, если $\gamma_1 < \gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \omega_1$. Продолжим это множество до делимой линейно упорядоченной абелевой группы G с единицей $1 = \xi_1$,

которая состоит из конечных слов с буквами из L и показателями из поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, следующим образом:

$$G = \{g = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n} \mid \xi_{i_1} > \xi_{i_2} > \dots > \xi_{i_n}; \quad \xi_{i_j} \in L \setminus \{\xi_1\}, q_{i_j} \in \mathbf{Q}, j = \overline{1, n}, n \in \mathbf{N}\} \cup \{\xi_1\},$$

при этом $1 = \xi_1^q = \xi_i^0, \forall q \in \mathbf{Q}, \forall \xi_i \in L$. Буквы в нулевой степени в слове не пишем; если все показатели букв в слове равны нулю, то слово полагаем равным единице.

Пусть $g = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n} \in G$. Обозначим $\ell(g) = \{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n}\} \subset L$, т.е. это множество букв, из которых состоит слово g (если $g = \xi_1$, то считаем носитель $\ell(g)$

пустым). Если $\xi_i \in L$, то положим $q(g, \xi_i) = \begin{cases} q_i, & \xi_i \in \ell(g), \\ 0, & \xi_i \notin \ell(g). \end{cases}$

Далее, для произвольных $g_1, g_2 \in G$ зададим умножение $g_1 \cdot g_2 = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n}$ так, что $\xi_{i_j} \in \ell(g_1) \cup \ell(g_2)$, $q_{i_j} = q(g_1, \xi_{i_j}) + q(g_2, \xi_{i_j})$. Например, $\xi_{i_1}^{q_1} \cdot \xi_{i_1}^{q_2} = \xi_{i_1}^{q_1 + q_2}$; $\xi_{i_1}^{q_1} \cdot \xi_{i_2}^{q_2} = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2}$ при $1 < \xi_{i_2} < \xi_{i_1}$.

Зададим множество положительных элементов группы. Полагаем $g = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n} > 1$, если $q_{i_1} > 0$. Множество $P = \{g \in G \mid g \geq 1\}$ образует коммутативную полугруппу с единицей, причем $P \cup P^{-1} = G, P \cap P^{-1} = \{1\}$. Таким образом, P образует положительный конус и задаёт линейный порядок на группе G .

Замечание 3.1. Очевидно, что для любых $h, g \in G, n \in \mathbf{N}$ выполняется $\ell(h) = \ell(h^n) \subset L$ и $\ell(g \cdot h) \subseteq \ell(g) \cup \ell(h) \subset L$.

В [10] доказаны следующие свойства поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ (для вычисления мощности принимается континуум-гипотеза).

Замечание 3.2. [10].

1. $|\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]| = cf \mathbf{R}[[G, \aleph_1]] = cf(G) = \aleph_1$.
2. Поле $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ имеет $2^{\aleph_1}$ симметричных сечений.
3. Каждое симметричное сечение поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ имеет тип конфинальности $(\aleph_1, \aleph_1)$.
4. Каждое симметричное сечение поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ фундаментально.

Обозначения. Пусть $K = qf \mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$ – поле частных кольца $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$. Обозначим через $\overline{K}$ наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, содержащее K . Заметим, что поле $\overline{K}$ будет также и наименьшим по включению вещественно замкнутым подполем поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ с группой архимедовых классов G .

Определение. Будем говорить, что ряд $x = \sum_{g \in G} r_g g$ содержит в своей записи бесконечное (конечное) число образующих из L , если $\bigcup_{g \in \text{supp}(x)} \ell(g)$ есть бесконечное (конечное) подмножество L .

Лемма 3.1. Если ряд принадлежит полю K , то он содержит в своей записи лишь конечное число образующих из L .

Доказательство. Поле K состоит из элементов вида $\frac{a_1 g_1 + \dots + a_n g_n}{b_1 h_1 + \dots + b_m h_m}$, где $g_i, h_j \in G$, $a_i, b_j \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $m, n \in \mathbf{N}$.

а) Рассмотрим сначала элемент $x \in \mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, $x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$. Множество элементов из L , которые ряд x содержит в своей записи, равно $\bigcup_{i=1}^n \ell(g_i)$; очевидно,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n \ell(g_i) \right| < \infty.$$

б) Пусть теперь $z = \frac{x}{y} \in K$, $x, y \in \mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, $y \neq 0$, $y = \tilde{b}_1 \tilde{h}_1 + \dots + \tilde{b}_m \tilde{h}_m$, $\tilde{b}_j \in \mathbf{R}$, $\tilde{h}_j \in G$, $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbf{N}$.

Пусть $\tilde{h} = \max\{\tilde{h}_j \mid j = \overline{1, m}\}$, обозначим через $\tilde{b}$ коэффициент при $\tilde{h}$. Вынесем из y слагаемое $\tilde{b}\tilde{h}$ за скобку, получим выражение вида $y = \tilde{b}\tilde{h} \cdot (1 + b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)$, где $h_j < \tilde{h}$, $j = \overline{2, m}$.

Тогда по лемме 1.1 $(1 + b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)^k$.

Положим $x_1 = \frac{x}{\tilde{b}\tilde{h}}$, тогда

$$z = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{1 + b_2 h_2 + \dots + b_m h_m} = x_1 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)^k \right) \in \mathbf{R}[[G, \aleph_1]] \subset \mathbf{R}[[G]].$$

Множество $\bigcup_{g \in \text{supp}(x_1)} \ell(g)$ элементов, которые входят в запись x_1 , конечно по а).

Вспоминая замечание 3.1, получаем, что множество $\bigcup_{g \in \text{supp}(z)} \ell(g)$ элементов из L , которые ряд z содержит в своей записи, входит в множество $\bigcup_{i=2}^m \ell(h_i) \cup \bigcup_{g \in \text{supp}(x_1)} \ell(g)$; последнее объединение — это конечное подмножество L . $\square$

Следствие 3.1. Если ряд из $\mathbf{R}[[G]]$ содержит в своей записи бесконечно много элементов из L , то он не принадлежит полю K и, значит, порождает в K некоторое сечение.

Определение. Для всех $\xi_i \in L$ положим $t_i = \xi_i^{-1}$. Рассмотрим бесконечную строго убывающую последовательность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, где $\Gamma \subseteq \omega_1 \setminus \{1\}$ есть произвольное бесконечное множество. Последовательность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ является вполне антиупорядоченным подмножеством G . Ряды вида $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \cdot t_\gamma \in \mathbf{R}[[G]]$, где $r_\gamma \neq 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$, т.е. $\text{supp}(x) = \{t_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, назовем *рядами вида (*)*.

Замечание 3.3. Ряды вида (*) содержат в своей записи бесконечно много образующих из L .

Определение. Усечением (начальным отрезком) ряда $x = \sum_{g \in G} r_g g$ называется ряд вида $\sum_{g \in \text{supp}(x), g > \tilde{g}} r_g g$ для некоторого $\tilde{g} \in \text{supp}(x)$, $\tilde{g} < \max \text{supp}(x)$.

Теорема 3.1. Пусть $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \cdot t_\gamma \in \mathbf{R}[[G]]$ есть ряд вида (*), причем $r_\gamma > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда ряд x порождает в поле K симметричное нефундаментальное сечение конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$.

Доказательство. Возьмем ряд $x = \sum_{\gamma \in \Gamma \subset \omega_1} r_\gamma \cdot t_\gamma = r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + r_{\gamma_2} \cdot t_{\gamma_2} + \dots$ вида (*), где $r_\gamma > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. По следствию 3.1 и замечанию 3.3 ряд x не принадлежит полю K . Значит, x порождает в K некоторое сечение. Обозначим сечение поля K , порожденное элементом x , через (A, B) . Таким образом, $A < x < B$.

Пусть $X_<$ – это множество усечений ряда x , имеющих конечный носитель. Множество $X_<$ представляет собой счетную возрастающую последовательность усечений: $X_< = \{x_n\}_{n=2}^\infty$, вида

$$x_n = \sum_{\gamma \in \Gamma, t_\gamma > t_{\gamma_n}} r_\gamma \cdot t_\gamma = \sum_{i=1}^{n-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} = r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + \dots + r_{\gamma_{n-1}} \cdot t_{\gamma_{n-1}}, \quad r_{\gamma_i} > 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}.$$

Каждый ряд x_n – это конечная сумма, и поэтому $x_n \in K$. Зададим множества

$$A_1 = \{a \in K \mid \exists n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \quad a \leq x_n\} \subset K,$$

$$B_1 = \{b \in K \mid \exists m \in \mathbf{N} \setminus \{1\}, \quad \tilde{x}_m = x_m + r_{\gamma_{m-1}} \cdot t_{\gamma_{m-1}} \leq b\} \subset K.$$

Заметим, что $\forall n, m \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \quad x_n < x_{n+1} < x < \tilde{x}_{m+1} < \tilde{x}_m$. Поэтому $A_1 < x < B_1$. Кроме того, между A_1, B_1 нет элементов из K . Действительно, если $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \quad x_n < z < x_n + r_{\gamma_{n-1}} \cdot t_{\gamma_{n-1}}$, то $\text{supp } z \supset \bigcup_{n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}} \text{supp } x_n$, а значит, ряд z содержит в своей

записи бесконечное число образующих из L и не принадлежит полю K . Отсюда следует, что (A_1, B_1) – сечение K , совпадающее с (A, B) . Из определения A_1, B_1 , $cf(A_1) = coi(B_1) = \aleph_0$. Таким образом, сечение (A, B) имеет тип конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$. Конфинальность собственного фундаментального сечения всегда равна для неархимедова поля конфинальности самого поля [8]. Так как $cf(G) \geq \aleph_0$, то группа архимедовых классов G , которая вкладывается в поле K , будет полю K конфинальна, поэтому $cf(G) = cf(K) = \aleph_1$ и в поле K собственное фундаментальное сечение будет иметь тип $(cf(G), cf(G)) = (\aleph_1, \aleph_1)$ [8, 11]. Поэтому сечение (A, B) нефундаментальное.

Докажем, что сечение (A, B) – симметричное. Для этого докажем, что оба берега – длинные.

По определению, нужно доказать, что для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $a_1 + (a_1 - a) \in B$, и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $b_1 - (b - b_1) \in A$.

Пусть $a \in A$, тогда $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ $a \leq x_n$. Найдется $a_1 = x_m$ такое, что $x_n < x_m$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 - a) &\geq x_m + x_m - x_n = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + \sum_{i=n}^{m-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} = \sum_{i=1}^n r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + r_{\gamma_n} \cdot t_{\gamma_n} + \sum_{i=n+1}^{m-1} 2r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} \geq \\ &\geq x_{n+1} + r_{\gamma_n} \cdot t_{\gamma_n} \in B. \end{aligned}$$

Значит, $a_1 + (a_1 - a) \in B$.

Пусть $b \in B$, тогда $\exists m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\tilde{x}_m = x_m + r_{\gamma_{m-1}} \cdot t_{\gamma_{m-1}} \leq b$. Положим $b_1 = \tilde{x}_{m+1}$. При этом $x_m < x < \tilde{x}_{m+1} < \tilde{x}_m \leq b$. Имеем $b_1 - (b - b_1) \leq \tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1})$. Докажем неравенство $\tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1}) < x_m$.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1}) &= \sum_{i=1}^m r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + r_{\gamma_m} \cdot t_{\gamma_m} - \sum_{i=1}^{m-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} - r_{\gamma_{m-1}} \cdot t_{\gamma_{m-1}} + \sum_{i=1}^m r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + r_{\gamma_m} \cdot t_{\gamma_m} = \\ &= (r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + \dots + r_{\gamma_{m-2}} \cdot t_{\gamma_{m-2}}) + 0 \cdot t_{\gamma_{m-1}} + 4r_{\gamma_m} \cdot t_{\gamma_m} < (r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + \dots + r_{\gamma_{m-2}} \cdot t_{\gamma_{m-2}}) + r_{\gamma_{m-1}} \cdot t_{\gamma_{m-1}} = x_m. \end{aligned}$$

Итак, $b_1 - (b - b_1) \leq \tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1}) < x_m \in A$. Значит, $b_1 - (b - b_1) \in A$. $\square$

Теорема 3.2. Пусть ряд $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_{\gamma} \cdot t_{\gamma} \in \mathbf{R}[[G]]$ есть ряд вида (*). Тогда ряд x не

принадлежит полю $\overline{K}$ и производит в поле $\overline{K}$ симметричное сечение.

Доказательство. Пусть ряд $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_{\gamma} \cdot t_{\gamma} \in \mathbf{R}[[G]]$ есть ряд вида (*). По условию

множество Γ бесконечное, поэтому, по следствию 3.1, $x \notin K$. Докажем, что $x \notin \overline{K}$.

Множество $\overline{K} \setminus K$ состоит из алгебраических над K элементов, т.е. из корней многочленов с коэффициентами из $K = qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$. Умножая такой многочлен на общий знаменатель его коэффициентов, получим многочлен с коэффициентами из $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$.

Таким образом, достаточно доказать, что x не является корнем многочлена с коэффициентами из $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, т.е. $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} \neq \alpha_n x^n$ для любых $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ из $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, $\alpha_n \neq 0$ и любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$.

По замечанию 1.1,

$$\text{supp}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}) \subset \text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1}).$$

Покажем, что $\text{supp}(\alpha_n x^n) \neq \text{supp}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1})$. Для этого докажем, что $\text{supp}(\alpha_n x^n)$ не содержится в $\text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1})$.

Имеем

$$x^k = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} r_{\gamma} \cdot t_{\gamma} \right)^k = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \Gamma} r_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot r_{\gamma_k} \cdot t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k},$$

$$\text{supp}(x^k) = \{t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k} \in G \mid \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \Gamma\}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Здесь под $t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k}$ будем понимать слово группы G , равное произведению слов $t_{\gamma_1}, \dots, t_{\gamma_k}$ (для записи этого слова могут потребоваться приведение подобных множителей и, возможно, перестановка множителей).

Рассмотрим элемент $\alpha_n x^n$. Имеем $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \text{supp}(x^n)$, ряд α_n принадлежит $\mathbf{R}[[G, \mathbf{N}_0]]$ и имеет вид $\alpha_n = a_1 h_1 + \dots + a_s h_s$, где $a_i \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $h_i \in G$, $i = \overline{1, s}$, для некоторого $s \in \mathbf{N}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_n x^n &= (a_1 h_1 + \dots + a_s h_s) \cdot \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma} r_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot r_{\gamma_n} \cdot t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_n} = \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma} a_i \cdot r_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot r_{\gamma_n} \cdot (h_i t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_n}). \end{aligned}$$

Зададим множество $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma \mid \xi_\gamma \notin \bigcup_{i=1}^s \ell(h_i)\}$. Заметим, что Γ_1 – бесконечное множество.

Тогда $\alpha_n x^n$ можно переписать в виде $S + \sum_{i=1}^s \sum_{\gamma \in \Gamma_1} a_i \cdot r_\gamma \cdot (h_i t_\gamma^n)$, где двойная сумма содержит бесконечно много слагаемых и эти слагаемые не являются подобными ни между собой, ни с какими-то слагаемыми из S .

Имеем $\{h_i t_\gamma^n \mid i = \overline{1, s}, \gamma \in \Gamma_1\} \subset \text{supp}(\alpha_n x^n)$. Докажем, что $\{h_i t_\gamma^n \mid i = \overline{1, s}, \gamma \in \Gamma_1\}$ не содержится в $\text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1})$.

Допустим противное, т.е.

$$\{h_i t_\gamma^n \mid i = \overline{1, s}, \gamma \in \Gamma_1\} \subset \text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1}).$$

Так как носитель α_0 конечный, а множество Γ_1 – бесконечное, то найдутся $\text{supp}(\alpha_k x^k)$ с $1 \leq k < n$ и бесконечное множество $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ такие, что бесконечное множество $\{h_i t_\gamma^n \mid \gamma \in \Gamma_2\}$ войдет в $\text{supp}(\alpha_k x^k)$. Тогда

$$\{h_i t_\gamma^n \mid \gamma \in \Gamma_2\} \subset \text{supp}(\alpha_k x^k) \subset \{g \cdot h \mid g \in \text{supp}(\alpha_k), h \in \text{supp}(x^k)\}.$$

Так как $\text{supp}(\alpha_k)$ конечный, а множество Γ_2 – бесконечное, найдутся бесконечное подмножество $\Gamma_3 \subset \Gamma_2$ и $g \in \text{supp}(\alpha_k)$ такие, что $\{h_i t_\gamma^n \mid \gamma \in \Gamma_3\} \subset \{g \cdot h \mid h \in \text{supp}(x^k)\}$. Тогда $\{h_i t_\gamma^n g^{-1} \mid \gamma \in \Gamma_3\} \subset \text{supp}(x^k)$.

Поскольку $\ell(g)$ конечно, а множество Γ_3 – бесконечное, найдется элемент $\gamma_0 \in \Gamma_3$ такой, что $\xi_{\gamma_0} \notin \ell(g)$. Но тогда для всякого слова $t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k} \in \text{supp}(x^k)$ имеем $t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k} \neq h_i t_{\gamma_0}^n g^{-1}$, поэтому элемент $h_i t_{\gamma_0}^n g^{-1}$ не может принадлежать $\text{supp}(x^k)$.

Поскольку ряд x не принадлежит $\overline{K}$, то по теореме 2.1 он производит в $\overline{K}$ симметричное сечение. $\square$

Замечание 3.4. В [10] доказано, что $cf(G) = \aleph_1$ и каждый отрезок $[a, b]$ группы G счетный, где $a, b \in G$.

Поэтому все несимметричные сечения поля $\overline{K}$, о которых говорится в замечании 2.1, определяемые через сечения группы G , имеют конфинальность $(\aleph_0, \aleph_0)$ и нефундаментальны. Действительно, сечения группы G могут иметь только один из следующих типов: $(\aleph_0, \aleph_0)$, $(1, \aleph_0)$ или $(\aleph_0, 1)$. При этом архимедов класс элемента поля имеет конфинальность и коинициальность $\aleph_0$. Значит, все указанные типы сечений группы G переходят в поле $\overline{K}$ в несимметричные сечения конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$.

Обозначение. Пусть H – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, содержащее $\overline{K}$ и все усечения ряда $x_{\omega_1} = \sum_{\gamma \in \omega_1} 1 \cdot t_\gamma$.

Теорема 3.3.

- (1) $\overline{K} \neq H$.
- (2) Элементы вещественного замыкания простого трансцендентного расширения $\overline{H(x_{\omega_1})}$, не принадлежащие H , порождают в поле H симметричные сечения типа $(\aleph_1, \aleph_1)$.

Доказательство.

- (1) Имеем $x_{\omega_0} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 \cdot t_n \in H \setminus \overline{K}$, поэтому $\overline{K} \neq H$.

- (2) По теореме 3.5. из [13]. $\square$

Вопросы. Будут ли поля $K = qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$ и $\overline{K} = \overline{qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]}$ равны? Будут ли поля $\overline{K}$ и H упорядоченно изоморфны? Будут ли поля H и $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ упорядоченно изоморфны? Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа такая, что $|G| = cf(G) = \alpha \geq \aleph_0$; будут ли поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ и $\overline{qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]}$ упорядоченно изоморфны?

Список источников

1. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М. : Мир, 1965.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы : пер. с фр. М. : Мир, 1965.
3. Dales H.J., Woodin H. Super-real fields. Oxford : Clarendon Press, 1996.
4. Галанова Н.Ю. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 26–36.
5. Кокорин А.И., Копытов В.М. Линейно упорядоченные группы. М. : Наука, 1972.
6. Kuhlmann F.-V. Selected methods for the classification of cuts and their applications // Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24–29. 2018. Bedlewo. Banach Center Publications, 2020. V. 121. P. 85–106. doi: 10.4064/bc121-9
7. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, № 6. С. 1213–1456.
8. Галанова Н.Ю., Пестов Г.Г. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 174–185.

9. Galanova N.Yu. Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // *Serdica Math.* 2004. V. 30. P. 495–504.
10. Galanova N.Yu. An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts // *Acta Appl. Math.* 2005. V. 85. P. 121–126.
11. Shelah S. Quite complete real closed fields // *Israel Journal of Mathematics.* 2004. V. 142. P. 261–272.
12. Галанова Н.Ю. Линейно упорядоченные поля с симметричными сечениями // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2017. № 46. С. 14–20. doi: 10.17223/19988621/46/2
13. Галанова Н.Ю. О симметричных сечениях одного вещественно замкнутого поля // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2018. № 53. С. 5–15. doi: 10.17223/19988621/53/1

References

1. Fuchs L. (1963) *Partially Ordered Algebraic Systems*. Pergamon Press.
2. Bourbaki N. (2003) *Algebra II. Chapters 4–7*. Springer.
3. Dales H.J., Woodin W.H. (1996) *Super-Real Fields*. Oxford: Clarendon Press.
4. Galanova N.Yu. (2003) Symmetry of sections in fields of formal power series and a non-standard real line. *Algebra and Logic.* 42. pp. 14–19. DOI: 10.1023/A:1022672606591.
5. Kokorin A.I., Kopytov V. M. (1972) *Linearly Ordered Groups*. New York: Halstead Press.
6. Kuhlmann F.-V. (2020) Selected methods for the classification of cuts and their applications. *Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24–29. 2018. Bedlewo. Banach Center Publications.* 121. pp. 85–106. DOI: 10.4064/bc121-9.
7. Pestov G.G. (2001) On the Theory of Cuts in Ordered Fields. *Siberian Mathematical Journal.* 42. pp. 1123–1131.
8. Galanova N.Yu., Pestov G.G. (2008) Symmetry of cuts in fields of formal power series. *Algebra and Logic.* 47(2). pp. 100–106. DOI: 10.1007/s10469-008-9001-5.
9. Galanova N.Yu. (2004) Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series. *Serdica Mathematical Journal.* 30. pp. 495–504.
10. Galanova N.Yu. (2005) An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts. *Acta Applicandae Mathematicae.* 85. pp. 121–126.
11. Shelah S. (2004) Quite complete real closed fields. *Israel Journal of Mathematics.* 142. pp. 261–272. <https://arxiv.org/pdf/math/0112212v1.pdf>.
12. Galanova N.Yu. (2017) Lineyno uporyadochennyye polya s simmetrichnyimi secheniyami [Totally ordered fields with symmetric cuts]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 46. pp. 14–20. DOI:10.17223/19988621/46/2.
13. Galanova N.Yu. (2018) O simmetrichnykh secheniyakh odnogo veshchestvenno zamknutogo polya [On symmetric cuts of a real-closed field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 53. pp. 5–15. DOI: 10.17223/19988621/53/1.

Сведения об авторе:

Галанова Наталья Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: galanova@math.tsu.ru

Information about the author:

Galanova Nataliya Yu. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: galanova@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 30.08.2021; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 30.08.2021; accepted for publication 01.06.2023