

Научная статья

УДК 512.545

MSC: 06F15; 08B15

doi: 10.17223/19988621/83/2

Представления и декартовы произведения m -групп

Алексей Владимирович Зенков*Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия,
alexey_zenkov@yahoo.com*

Аннотация. Показано, что всякая выпуклая m -подгруппа декартова произведения m -групп, допускающая точное m -транзитивное представление, есть выпуклая m -подгруппа подходящей проекции декартова произведения m -групп. Отсюда следует, что декартово произведение m -групп не допускает точного m -транзитивного представления.

Ключевые слова: m -группа, декартово произведение m -групп, m -транзитивное представление

Для цитирования: Зенков А.В. Представления и декартовы произведения m -групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 17–23. doi: 10.17223/19988621/83/2

Original article

Presentations and Cartesian product of m -groups

Alexey V. Zenkov*Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation, alexey_zenkov@yahoo.com*

Abstract. An m -group is an algebraic system G of a signature $m = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee, \varphi \rangle$, where $\langle G; e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$ is a lattice-ordered group (an ℓ -group for short) and the unary operation φ can be interpreted as a second-order automorphism of the group $\langle G; e, ^{-1}, \cdot \rangle$ and the anti-isomorphism of the lattice $\langle G; \wedge, \vee \rangle$, i.e., for any $x, y \in G$ the following relations are true:

$$(xy)\varphi = (x)\varphi(y)\varphi, ((x)\varphi)\varphi = (x)\varphi^2 = x, (x \vee y)\varphi = (x)\varphi \wedge (y)\varphi, (x \wedge y)\varphi = (x)\varphi \vee (y)\varphi.$$

We denote an m -group G with the marked automorphism φ as a pair (G, φ) .

The concept of an m -group as an algebraic system was explicitly formulated by M. Giraudet and J. Rachunek. The introduction of the concept of an m -group as an algebraic system allows us to apply the methods of universal algebra to the study of *mono-*

tonic permutations groups of ordered sets. In particular, it has become possible to write down the properties of such groups in the language of identities, which necessarily leads to the creation of a theory of varieties of m -groups.

We recall the basic concepts of the representation theory of m -groups by order-preserving permutations of ordered sets. Let Ω be a chain and a be a reversible second-order automorphism of Ω . That is, $((\omega)a)a = \omega$ and $\omega \leq \omega' \Leftrightarrow (\omega)a \geq (\omega')a$ for all $\omega, \omega' \in \Omega$. Denote by $\text{Aut}(\Omega)$ the group (under composition) of all order-preserving permutations of Ω . It is well known that with respect to the pointwise order $\text{Aut}(\Omega)$ is an ℓ -group. The ℓ -group $\text{Aut}(\Omega)$ can be turned into an m -group if the operation ϕ is defined on it by the rule $(g)\phi = aga$. By a *faithful* representation of an m -group (G, ϕ) by order-preserving permutations of Ω we mean the m -isomorphism $\eta: G \rightarrow \text{Aut}(\Omega)$. We write this as (G, Ω, a) .

The representation (G, Ω, a) of an m -group (G, ϕ) is *m -transitive* if for all $\omega, \omega' \in \Omega$ there is an element $g \in G$ such that $(\omega)ga^\varepsilon = \omega'$, where $\varepsilon = 0$ or $\varepsilon = 1$. Importance of m -transitive representations of m -groups in the study of varieties m -groups is explained by the fact that every subdirect m -indecomposable m -group has a faithful m -transitive representation. Therefore, every variety of m -groups is generated by its groups that admit an m -transitive representation.

On the other hand, if a variety of m -groups is generated by a certain class of m -groups, then every m -group of this variety according to Birkhoff's theorem is a m -homomorphic image of an m -subgroup of the Cartesian product of m -groups of this class. Therefore, it is necessary to know the description of Cartesian product subgroups that admit a faithful m -transitive representation.

We prove that every convex m -subgroup of a Cartesian product of m -groups that admits a faithful m -transitive representation is an m -subgroup of a suitable projection. As a consequence, we obtain that the Cartesian product of m -groups does not admit a faithful m -transitive representation.

Keywords: m -group, Cartesian product, m -transitive representation of an m -group

For citation: Zenkov, A.V. (2023) Presentations and Cartesian product of m -groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 17–23. doi: 10.17223/19988621/83/2

Введение

Напомним, что решеточно упорядоченная группа (ℓ -группа) – это алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \langle e, {}^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями:

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Замечание. В дальнейшем во всех решетках для обозначения операций объединения и пересечения используем символы $\vee, \wedge$ соответственно. Из контекста будет понятно, о какой решетке идет речь.

Пусть G – произвольная ℓ -группа. Подгруппа A ℓ -группы G будет ее *выпуклой ℓ -подгруппой*, если: 1) A замкнута относительно объединений и пересечений

(A – ℓ -подгруппа); 2) A есть выпуклое множество, т.е. неравенство $a_1 \leq g \leq a_2$, где $a_1, a_2 \in A, g \in G$, влечет $g \in A$. Так как теоретико-множественное пересечение любого множества выпуклых ℓ -подгрупп ℓ -группы G есть ее выпуклая ℓ -подгруппа, то на множестве $L(G)$ всех выпуклых ℓ -подгрупп ℓ -группы G естественным образом можно определить структуру *решетки*, полагая для $A, B \in L(G)$ их (решеточное) пересечение $A \wedge B$ равным их теоретико-множественному пересечению, а объединение $A \vee B$ как теоретико-множественное пересечение всех выпуклых ℓ -подгрупп ℓ -группы G , содержащих A и B . Отметим, что решетка $L(G)$ *дистрибутивна* (см., напр.: [1. Гл. 3, § 1, т. 2]).

Согласно [2], m -группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee, \varphi \rangle$ такая, что $\langle G; e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$ является ℓ -группой, а одно-местная операция φ есть автоморфизм 2-го порядка группы $\langle G; e, ^{-1}, \cdot \rangle$ и анти-изоморфизм решетки $\langle G; \wedge, \vee \rangle$, т.е. φ отображает взаимно однозначно G на себя, причем верны соотношения

$$(xy)\varphi = (x)\varphi(y)\varphi, ((x)\varphi)\varphi = (x)\varphi^2 = x, (x \vee y)\varphi = (x)\varphi \wedge (y)\varphi, (x \wedge y)\varphi = (x)\varphi \vee (y)\varphi.$$

В дальнейшем m -группу G с отмеченным автоморфизмом φ записываем как *пару* (G, φ) . Пусть (G, φ) есть m -группа и H – ее ℓ -подгруппа. Тогда H называется m -подгруппой m -группы (G, φ) , если она замкнута относительно действия φ . Выпуклая нормальная m -подгруппа K m -группы (G, φ) называется ее m -идеалом. Именно m -идеалы и только они являются ядрами m -гомоморфизмов m -групп.

Пусть Φ – некоторое множество тождеств сигнатуры $m = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee, \varphi \rangle$. Стандартно многообразием m -групп (m -многообразием) с базисом тождеств Φ будем называть всякий класс m -групп X , состоящий только из тех m -групп, на которых истинны все тождества Φ . Множество M всех многообразий m -групп является частично упорядоченным относительно теоретико-множественного включения; более того, M можно рассматривать как *решетку*, если для m -многообразий X и Y определить их пересечение $X \wedge Y$ как теоретико-множественное пересечение, а объединение $X \vee Y$ – как наименьшее m -многообразие, содержащее как X , так и Y .

Изучение свойств m -многообразий, в частности изучение строения решетки M , базируется на следующей хорошо известной теореме Биркгофа (см., напр.: [3. Гл. 6, § 13, т. 1]):

Теорема 1.1. Для того чтобы непустой класс X алгебраических систем сигнатуры σ был многообразием, необходимо и достаточно выполнения следующих условий: 1) декартово произведение систем из X принадлежит X ; 2) всякая подсистема системы из X принадлежит X ; 3) любой гомоморфный образ системы из X принадлежит X .

Таким образом желательно иметь «хорошее» описание m -декартовых произведений, например на языке теории групп *монотонных* подстановок линейно упорядоченных множеств.

Более подробно. Пусть Ω – некоторое (бесконечное) линейно упорядоченное множество. Взаимно однозначное отображение f (подстановка f) множества Ω на себя называется *порядковой подстановкой*, если для любых точек $\alpha, \beta \in \Omega$ неравенство $\alpha < \beta$ влечет $(\alpha)f < (\beta)f$; подстановку f назовем *антипорядковой*, если $\alpha < \beta$ влечет $(\alpha)f > (\beta)f$. Подстановка называется *монотонной*, если она является порядковой или антипорядковой. Через $\text{Aut}(\Omega)$ и $\text{Mon}(\Omega)$ обозначим группы (относительно суперпозиции) всех порядковых и всех монотонных подстановок линейно упорядоченного множества Ω соответственно. Очевидно, что $\text{Aut}(\Omega) \subseteq \text{Mon}(\Omega)$. Хорошо известно, что относительно поточечного порядка $\text{Aut}(\Omega)$ является ℓ -группой. Элемент $a \in \text{Mon}(\Omega) \setminus \text{Aut}(\Omega)$ будем называть *реверсивным автоморфизмом 2-го порядка* Ω , если $a^2 = e$. Отметим, если $\text{Aut}(\Omega) \neq \text{Mon}(\Omega)$, то реверсивный автоморфизм 2-го порядка *всегда существует*. Теперь на $\text{Aut}(\Omega)$ можно определить структуру m -группы, если для $g \in \text{Aut}(\Omega)$ положить $(g)\phi = aga$. Будем говорить, что m -группа (G, ϕ) допускает *точное* представление порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω , если найдется m -изоморфизм $\eta: G \rightarrow \text{Aut}(\Omega)$. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a) . Отметим, что для m -групп имеет место следующая теорема о представлении [4]:

Теорема 1.2. Всякая m -группа (G, ϕ) допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества Ω .

Таким образом всякую m -группу можно рассматривать как некоторую подгруппу группы монотонных подстановок подходящего линейно упорядоченного множества. Еще раз отметим, что в дальнейшем рассматриваются только *точные* представления, и все понятия теории представлений (не обязательно точных) относятся именно к ним. При изучении m -многообразий особую роль играют представления, которые мы называем *m -транзитивными*. Итак, представление (G, Ω, a) будет *m -транзитивным*, если для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется $x \in G_*$, что $(\alpha)x = \beta$, где $G_* = \tilde{a} \delta. (G, a) \subseteq \text{Mon}(\Omega)$. Всякая m -группа, допускающая хотя бы одно такое представление, называется *m -транзитивной*.

Из общей теории алгебраических систем известно, что всякое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми системами. Стало быть, при изучении m -многообразий желательно иметь хорошее описание подпрямо m -неразложимых групп. Оказывается имеет место следующая теорема [5]:

Теорема 1.3. Всякая подпрямо m -неразложимая m -группа (G, ϕ) допускает точное m -транзитивное представление.

Мы докажем (Теорема 2.3), что всякая выпуклая m -подгруппа декартова произведения m -групп, допускающая точное m -транзитивное представление, есть выпуклая m -подгруппа подходящей проекции декартова произведения m -групп. Отсюда получаем, что декартово произведение m -групп не допускает точного m -транзитивного представления (Следствие 2.4). Таким образом, изучение декартовых произведений m -групп несводимо к рассмотрению (точных) m -транзитивных представлений в отличие от случая подпрямо m -неразложимых m -групп.

Здесь же отметим, что подобные вопросы рассматривались и для решеточно-упорядоченных групп (см., напр.: [1]).

Более подробную информацию по теории ℓ -групп можно найти в книгах [1, 6].

Основной результат

Для выпуклой ℓ -подгруппы V ℓ -группы G через $R(G;V)$ обозначим множество правых смежных классов G по V с частичным порядком $\leq$, определяемым по правилу: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда найдется такой $v \in V$, что $vx \leq y$.

Если этот порядок окажется линейным, то V называют *спрямляющей*. Хорошо известно следующее:

Предложение 2.1 [1. Гл. 3, § 3, т. 1]. Выпуклая ℓ -подгруппа V ℓ -группы G будет спрямляющей тогда и только тогда, когда для любых положительных элементов $x, y \in G \setminus V$ их пересечение $x \wedge y \notin V$.

Для элемента $x \in G$ через $|x| = x \vee x^{-1}$ обозначим его модуль. Очевидно, что модуль любого элемента неотрицателен. Элементы $x, y \in G$ являются *ортogonalными*, если $|x| \wedge |y| = e$ (этот факт обозначаем $x \perp y$). Отметим, что ортогональные элементы перестановочны. Пусть V есть спрямляющая ℓ -подгруппа ℓ -группы G . Для произвольного элемента $x \in G \setminus V$ через $x^\perp = \{g \in G \mid x \perp g\}$ обозначим его поляр. Непосредственно из определения поляры и Предложения 2.1 следует, что поляр $x^\perp$ содержится в спрямляющей V . Спрямляющая ℓ -подгруппа V m -группы (G, φ) называется *представляющей*, если она не содержит неединичных m -идеалов. Следующее утверждение доказано в [5].

Предложение 2.2. m -группа (G, φ) допускает точное m -транзитивное представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую ℓ -подгруппу.

Для множества m -групп $\{(F_j, \varphi_j) \mid j \in J\}$, мощность которого $|J| > 1$, через

$$F = \prod_{j \in J} F_j$$

обозначим ℓ -декартово произведение ℓ -групп множества $\{F_j \mid j \in J\}$.

Элемент $f \in F$ записываем в виде: $f = (\dots f_i \dots f_j \dots f_k \dots)$. Теперь определим отображение $\varphi: F \rightarrow F$ по правилу

$$(\varphi f) = (\dots (f_i)\varphi_i \dots (f_j)\varphi_j \dots (f_k)\varphi_k \dots).$$

Ясно, что φ есть автоморфизм 2-го порядка группы $\langle F; e, {}^{-1}, \cdot \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle F; \wedge, \vee \rangle$. Стало быть, можно рассмотреть m -группу (F, φ) , которую мы и будем называть *декартовым произведением* (m -декартовым произведением) класса m -групп $\{(F_j, \varphi_j) \mid j \in J\}$. Для каждого $j \in J$ стандартным образом определяем j -проекцию $\hat{f}_j = (\dots e \dots f_j \dots e \dots)$ элемента $f \in F$. Тогда

$$\overline{\hat{f}_j} = \hat{f_j}^1 = (\dots f_i \dots e \dots f_k \dots).$$

Непосредственно из определения элементов $\hat{f}_j$ и

$\bar{f}_j$ вытекает, что эти элементы ортогональны и, конечно, $f = \hat{f}_j \bar{f}_j$. Далее, несложно заметить, что множество $\hat{F}_j = \{\hat{f}_j \mid f \in F \text{ всех } j\text{-проекции}\}$ и множество $\bar{F}_j = \{\bar{f}_j \mid f \in F\}$ образуют m -идеалы m -группы (F, φ) , более того, $F = \hat{F}_j \vee \bar{F}_j$ для каждого $j \in J$.

Рассмотрим теперь произвольную (неединичную) выпуклую m -подгруппу (G, φ) m -декартова произведения (F, φ) и предположим, что она допускает точное m -транзитивное представление. В силу Предложения 2.2 в G найдется представляющая ℓ -подгруппа V . Тогда в ℓ -группе F найдется такая *спрямляющая* ℓ -подгруппа H , что

$$V = H \cap G. \quad (*)$$

Доказательство этого, на самом деле, ключевого равенства, можно найти в [6, Proposition 12.11].

Из свойств $\hat{F}_j$ и $\bar{F}_j$ следует, что при каждом $j \in J$ верно одно и только одно из следующих условий:

1) $\hat{F}_j \subseteq H$, и тогда $\bar{F}_j \not\subseteq H$;

2) $\bar{F}_j \subseteq H$, и тогда $\hat{F}_j \not\subseteq H$.

Предположим, что для всех $j \in J$ имеет место условие 1). Тогда, учитывая условие (*), получаем $V \cap \hat{F}_j = H \cap \hat{F}_j \cap G = \hat{F}_j \cap G = \hat{F}_j \wedge G$. Ясно, что $\hat{F}_j \wedge G$ является m -идеалом m -группы (G, φ) и $\hat{F}_j \wedge G \subseteq V$. Так как V есть представляющая, то $\hat{F}_j \wedge G = e$. Следовательно, так как G есть *выпуклая* ℓ -подгруппа ℓ -группы F , верно

$$G = G \wedge F = G \wedge (\hat{F}_j \vee \bar{F}_j) = (\hat{F}_j \wedge G) \vee (\bar{F}_j \wedge G) = \bar{F}_j \wedge G = \bar{F}_j \cap G.$$

Стало быть, для каждого $j \in J$ имеет место $G \subseteq \bar{F}_j$. Следовательно, $G \subseteq \bigcap_{j \in J} \bar{F}_j$. Но последнее включение невозможно, так как $\bigcap_{j \in J} \bar{F}_j = e$. Поэтому для некоторого $j \in J$ выполнено условие 2). Рассуждая, как и выше, приходим к выводу, что $G \subseteq \hat{F}_j$. Тем самым доказана

Теорема 2.3. Выпуклая m -группа (G, φ) m -декартова произведения (F, φ) , допускающая точное m -транзитивное представление, содержится в подходящей проекции $\hat{F}_j$ декартова произведения m -групп (F, φ) .

Следствие 2.4. m -декартово произведение (F, φ) не допускает точного m -транзитивного представления.

Доказательство. Действительно, существование такого представления означало бы в силу теоремы 2.3, что $F \subseteq \hat{F}_j$ для некоторого $j \in J$, что невозможно.
#

Список источников

1. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы. М. : Наука, 1984. 300 с.
2. Giraudet M., Rachůnek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49. P. 743–766.
3. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.
4. Giraudet M., Lucas F. Groupes à moitié ordonnés // Fundam. Math. 1991. V. 139 (2). P. 75–89.
5. Varaksin S.V., Zenkov A.V. On representations of m -groups // Siberian Mathematical Journal. 2013. V. 54. P. 227–230.
6. Darnel M. Theory of lattice-ordered groups. New-York : Marcel Dekker, 1995. 539 p.

References

1. Kopytov V.M. (1984) *Reshetочно uporyadochennyye gruppy* [Lattice-ordered groups]. Moscow: Nauka.
2. Giraudet M., Rachůnek J. (1999) Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 49. pp. 743–766.
3. Mal'cev A.I. (1973) *Algebraic Systems*. Springer.
4. Giraudet M., Lucas F. (1991) Groupes à moitié ordonnés. *Fundamenta Mathematicae*. 139(2). pp. 75–89.
5. Varaksin S.V., Zenkov A.V. (2013) On representations of m -groups. *Siberian Mathematical Journal*, 54(2). pp. 227–230.
6. Darnel M. (1995) *Theory of Lattice-Ordered Groups*. New York: Marcel Dekker.

Сведения об авторе:

Зенков Алексей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика, механика и инженерная графика» Алтайского государственного аграрного университета, Барнаул, Россия. E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Information about the author:

Zenkov Alexey V. (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 28.12.2021; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 28.12.2021; accepted for publication 01.06.2023