

Научная статья

УДК 515.12

MSC: 54F45; 54E45

doi: 10.17223/19988621/83/3

О емкостной размерности подмножеств метрического компакта

Александр Владимирович Иванов

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск, Россия, alvlivanov@krc.karelia.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о возможных значениях нижней емкостной размерности $\underline{\dim}_B$ подмножеств метрического компакта X . Введено понятие размерности $f \underline{\dim}_B X$, характеризующее асимптотику нижней емкостной размерности замкнутых ε -окрестностей конечных подмножеств компакта X при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для широкого класса метрических компактов размерность $f \underline{\dim}_B X$ совпадает с $\underline{\dim}_B X$. Доказана следующая теорема: для любого неотрицательного числа $r < f \underline{\dim}_B X$ существует замкнутое подмножество $Z_r \subset X$, для которого $\underline{\dim}_B Z_r = r$.

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, размерность квантования, теорема о промежуточных значениях емкостной размерности

Благодарности: Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН)

Для цитирования: Иванов А.В. О емкостной размерности подмножеств метрического компакта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 24–30. doi: 10.17223/19988621/83/3

Original article

On the box dimension of subsets of a metric compact space

Aleksandr V. Ivanov

Institute of Applied Mathematics of the Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation, alvlivanov@krc.karelia.ru

Abstract. The question about the range of the capacitarian dimension of subsets of a metric compact space is motivated by a number of well-known mathematical facts. For example, if the measure μ on the set P has no atoms, then for any non-negative real num-

ber $r < \mu(P)$ there exists a measurable subset $Y_r \subset P$ with a measure $\mu(Y_r) = r$. In the topological dimension theory, the question of intermediate values of the dimension of closed subsets of a given compact space is known. Namely, is it true that a compact space X of Lebesgue dimension $\dim X = n$ contains a closed subset of any given dimension $k < n$? The answer to this question is yes for compact metric spaces, although in the general case this is not true (as shown by V.V. Fedorchuk [1]). Similar results also include the theorem about intermediate values of the upper quantization dimension $\overline{D}(\mu)$ of probability measures proved in [2]. According to this theorem, for any non-negative real number r not exceeding the upper capacitarian dimension $\overline{\dim}_B X$ of X , there exists a probability measure μ_r on X of dimension $\overline{D}(\mu_r) = r$ with a support equal to X .

For the capacitarian dimensions (upper and lower ones $\overline{\dim}_B$ and $\underline{\dim}_B$, respectively), the question of intermediate values in general is formulated as follows: is it true that for any nonnegative real number r not exceeding the capacitarian dimension of X (upper or lower respectively), the space X contains a closed subset of the corresponding capacitarian dimension equals to r ?

For $\overline{\dim}_B$, this question was answered positively (see [2]). For the lower capacitarian dimension, a partial result was obtained in [3, Theorem 5.5] under some essential restrictions on the metric of X .

In this paper, the question of intermediate values of the lower capacitarian dimension is answered positively for $r \in [0, f\underline{\dim}_B X)$ for any metric compact space X , where $f\underline{\dim}_B X$ is a quantity, which characterize the asymptotic behavior of the lower capacitarian dimension of closed ε -neighborhoods of finite subsets of X when $\varepsilon \rightarrow 0$. Namely,

$$f\underline{\dim}_B X = \sup \{ f\underline{\dim}_B(A, X) : A \subset X, |A| < \omega_0 \},$$

where

$$\underline{\dim}_B(A, X) = \inf \{ \underline{\dim}_B B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \},$$

and $B(A, \varepsilon)$ is the closed ε -ball of the set A .

For a wide class of metric compact spaces, the equality $f\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$ holds. The theorem proved in this paper is the strengthening of Theorem 5.5 from [3].

Keywords: metric compact space, capacitarian dimension, quantization dimension, intermediate value theorem for the capacitarian dimension

Acknowledgments: The study was carried out under state order to the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

For citation: Ivanov, A. V. (2023) On the box dimension of subsets of a metric compact space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 24–30. doi: 10.17223/19988621/83/3

Вопрос о множестве значений емкостной размерности подмножеств метрического компакта мотивирован рядом известных математических фактов. Например, если мера μ , заданная на множестве P , не имеет атомов, то для любого неотрицательного числа $r < \mu(P)$ существует измеримое подмножество $Y_r \subset P$ с мерой $\mu(Y_r) = r$. В топологической теории размерности известен вопрос о про-

межуточных значениях размерности замкнутых подмножеств данного компакта, а именно: верно ли, что в компакте X лебеговой размерности $\dim X = n$ есть замкнутое подмножество любой наперед заданной размерности $k < n$? Для метрических компактов ответ на этот вопрос положительный, хотя в общем случае это неверно, как показал В.В. Федорчук [1]. К числу аналогичных результатов относится также теорема о промежуточных значениях верхней размерности квантования $\overline{D}(\mu)$ вероятностных мер, доказанная в [2]. Согласно этой теореме для любого числа r , не превосходящего верхней емкостной размерности $\overline{\dim}_B X$ компакта X , на X существует вероятностная мера μ_r размерности $\overline{D}(\mu_r) = r$ с носителем, равным X .

Для емкостных размерностей (верхней $\overline{\dim}_B$ и нижней $\underline{\dim}_B$) вопрос о промежуточных значениях в общем виде формулируется так:

Верно ли, что для любого неотрицательного числа r , не превосходящего емкостной размерности X (соответственно верхней или нижней), в X существует замкнутое подмножество соответствующей емкостной размерности r ?

Для $\overline{\dim}_B$ этот вопрос решен положительно (см.: [2]). Для нижней емкостной размерности в [3. Теорема 5.5] получен частичный результат при некоторых существенных ограничениях на метрику компакта X . В настоящей работе дано положительное решение вопроса для $\underline{\dim}_B$ в диапазоне $r \in [0, f \underline{\dim}_B X)$ для любого метрического компакта X , где $f \underline{\dim}_B X$ – размерностная характеристика X , равная супремуму значений $\inf \{ \underline{\dim}_B B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \}$ по непустым конечным подмножествам $A \subset X$, где $B(A, \varepsilon) = \{x : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$ – замкнутый ε -шар A . Полученный результат является усилением упомянутой теоремы 5.5 из [3].

Пусть (X, ρ) – метрический компакт, $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Подмножество A называется ε -сетью в X , если $B(A, \varepsilon) = X$. Для метрического компакта (X, ρ) и числа $\varepsilon > 0$ через $N(X, \varepsilon)$ обозначается наименьшее число точек в ε -сети X . Верхняя и нижняя емкостные размерности компакта X определяются соответственно по формулам:

$$\overline{\dim}_B X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

$$\underline{\dim}_B X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

(если имеет место равенство $\overline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$, то используют обозначение $\dim_B X$).

Определение 1. Пусть (X, ρ) – метрический компакт и A – замкнутое подмножество X . Положим

$$\underline{\dim}_B(A, X) = \inf \{ \underline{\dim}_B B(A, \delta) : \delta > 0 \},$$

$$f \underline{\dim}_B X = \sup \{ \underline{\dim}_B(A, X) : A \subset X, |A| < \omega_0 \}. \quad (1)$$

В силу монотонности нижней емкостной размерности для любого X имеет место неравенство:

$$f \dim_B X \leq \dim_B X.$$

Если в формуле (1) в качестве A рассматривать только одноточечные подмножества, то мы получим определение локальной нижней емкостной размерности $l \dim_B X$, введенное в [3]. Очевидно, что всегда

$$l \dim_B X \leq f \dim_B X. \quad (2)$$

Предложение 1. Если множество предельных точек X' компакта X конечно, то $\dim_B X = f \dim_B X$.

Доказательство. Положим $A = X'$. Для любого $\delta > 0$ множество $X \setminus B(A, \delta)$ конечно. Обозначим его мощность через n . Для любого ε имеет место неравенство $N(B(A, \delta), \varepsilon) + n \geq N(X, \varepsilon)$, из которого следует, что $\dim_B B(A, \delta) \geq \dim_B X$.

Очевидно, что равенство $\dim_B X = f \dim_B X$ справедливо для самоподобных компактов (фракталов). Автору неизвестен пример компакта X с несовпадающими размерностями $\dim_B X$ и $f \dim_B X$.

Предложение 2. Существует метрический компакт (X, ρ) , для которого неравенство (2) является строгим.

Доказательство. В монографии Я. Песина [4, Гл. 2, пример 6.2] построен пример компакта X , который является объединением двух непересекающихся счетных замкнутых подмножеств F_1 и F_2 , и при этом

$$\dim_B F_1 = \dim_B F_2 < \dim_B X.$$

В [3, Пример 5.3] показано, что $\dim_B F_i = l \dim_B X$, $i = 1, 2$. Компакт X имеет ровно две предельные точки. Следовательно, в силу Предложения 1 $l \dim_B X < f \dim_B X = \dim_B X$.

Замечание 1. Аналог определения 1 для верхней емкостной размерности не представляет интереса, поскольку всегда $f \dim_B X = \overline{\dim}_B X$ в силу того, что для верхней емкостной размерности выполнена теорема суммы (см.: [3]).

Следующая теорема является усилением теоремы 5.5 из [3]. В ее формулировке удалось избавиться от существенного ограничения на метрику компакта X , которое использовалось в [3], и расширен диапазон значений параметра r от $r < l \dim_B X$ до $r < f \dim_B X$.

Теорема 1. Пусть (X, ρ) – метрический компакт. Для любого неотрицательного числа $r < f \dim_B X$ существует замкнутое подмножество $Z_r \subset X$, для которого $\dim_B Z_r = f \dim_B Z_r = r$.

Доказательство. Фиксируем положительное $r < f \dim_B X$ (для $r = 0$ утверждение теоремы очевидно). Выберем конечное подмножество $A \subset X$, для которого $\dim_B B(A, X) = a > r$. Пусть $|A| = n$. Поскольку $\dim_B X > r$, при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$N(X, \varepsilon) > (1/\varepsilon)^r. \quad (3)$$

Фиксируем положительное число $\varepsilon_0 < (1/n)^{1/r}$ так, что для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеет место неравенство (3). Для $k \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_k = \varepsilon_0 / 2^k$.

Пусть $\delta_0 = \text{diam}(X)$. Положим

$$\delta_k = \sup \left\{ \delta : N(B(A, \delta), \varepsilon_k) \leq (1/\varepsilon_k)^r \right\}. \quad (4)$$

В силу неравенства (3) $\delta_k \leq \delta_0$ для любого k . Кроме того, очевидно, что $N(B(A, \varepsilon_k), \varepsilon_k) \leq n$. В силу выбора числа ε_0

$$n < (1/\varepsilon_0)^r < (1/\varepsilon_k)^r.$$

Следовательно, $\delta_k \geq \varepsilon_k$.

Покажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$. Предположим противное. Тогда для некоторого числа $b > 0$ множество $D = \{k : \delta_k > b\}$ бесконечно. В силу выбора множества A имеют место неравенства $\underline{\dim}_B B(A, b) \geq a > r$. Следовательно, при малых ε

$$N(B(A, b), \varepsilon) > (1/\varepsilon)^r.$$

Таким образом, существует $k \in D$, для которого $N(B(A, b), \varepsilon_k) > (1/\varepsilon_k)^r$. Отсюда следует, что $\delta_k \leq b$ – получено противоречие.

Определим теперь числа δ'_k следующим образом. Если $\delta_k = \delta_0$, то $\delta'_k = \delta_k$. При $\delta_k < \delta_0$ положим

$$\delta'_k = \frac{1}{2}(\delta_k + \min \{\delta_i : i < k, \delta_i > \delta_k\}).$$

Из определения следует, что всегда $\delta'_k \geq \delta_k$, и если $\delta'_k = \delta_k$, то $\delta'_k = \delta_0$. Поэтому для любого k выполняется неравенство

$$N(B(A, \delta'_k), \varepsilon_k) > (1/\varepsilon_k)^r. \quad (5)$$

Кроме того, $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta'_k = 0$.

Напомним, что множество $A \subset X$ называется ε -разделенным, если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in A$. Поскольку максимальное (по включению) ε -разделенное подмножество компакта является его ε -сетью, в силу неравенства (5) для каждого $k \in N$ в множестве $B(A, \delta'_k)$ существует ε_k -разделенное подмножество E_k мощности $[(1/\varepsilon_k)^r]$ (квадратные скобки означают здесь целую часть числа).

Рассмотрим множество

$$M = \{k : \delta_i < \delta_k \text{ при } i > k\}.$$

Легко показать, что M бесконечно. Для каждого $k \in M$ положим

$$\delta''_k = \max \{\delta'_i : i > k\}.$$

Поскольку $\delta''_k < \delta_k$, имеет место неравенство

$$N(B(A, \delta''_k), \varepsilon_k) \leq (1/\varepsilon_k)^r.$$

Следовательно, при $k \in M$ в множестве $B(A, \delta''_k)$ можно выбрать ε_k -сеть C_k мощности $|C_k| \leq (1/\varepsilon_k)^r$. При $k \notin M$ будем считать, что множество C_k пусто.

Определим теперь искомое подмножество $Z_r \subset X$ по формуле

$$Z_r = A \cup \bigcup_{k \in N} (C_k \cup E_k).$$

Из построения множеств E_k, C_k следует, что Z_r – замкнутое подмножество X , предельными точками которого являются точки множества A . Для каждого $k \in N$ множество Z_r содержит ε_k -разделенное подмножество E_k мощности $[(1/\varepsilon_k)^r]$. Следовательно, $N(Z_r, \varepsilon_k/2) \geq [(1/\varepsilon_k)^r]$. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(Z_r, \varepsilon_k/2)}{\log(2/\varepsilon_k)} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log[(1/\varepsilon_k)^r]}{\log(2/\varepsilon_k)} = r.$$

При этом в силу [4. Теорема 2.3] и соотношений $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/2$ получаем

$$\underline{\dim}_B Z_r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(Z_r, \varepsilon_k/2)}{\log(2/\varepsilon_k)}.$$

Итак, $\underline{\dim}_B Z_r \geq r$. Докажем обратное неравенство. Занумеруем точки M в порядке возрастания: $M = \{k_i : i \in N\}$. Покажем, что множество

$$P_{k_i} =_{j \leq k_i} (C_j E_j)$$

является ε_{k_i} -сетью в Z_r . По построению при $k \in N$

$$C_j \cup E_j \subset B(A, \delta'_j) \subset B(A, \delta''_{k_i})$$

и C_{k_i} является ε_{k_i} -сетью в $B(A, \delta''_{k_i})$.

Следовательно, $Z_r \subset B(P_{k_i}, \varepsilon_{k_i})$, что и требовалось. При этом

$$|P_{k_i}| \leq 2 \sum_{j \leq k_i} (1/\varepsilon_j)^r = 2 \sum_{j \leq k_j} (1/\varepsilon_0)^r 2^{jr} = 2(2/\varepsilon_0)^r \frac{2^{k_i r} - 1}{2^r - 1}. \quad (6)$$

Таким образом,

$$\underline{\dim}_B Z_r \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N(Z_r, \varepsilon_{k_i})}{\log(1/\varepsilon_{k_i})} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 2(2/\varepsilon_0)^r \frac{2^{k_i r} - 1}{2^r - 1}}{\log(2^{k_i} \varepsilon_0)} = r \quad (7)$$

Поскольку Z_r содержит только n предельных точек (это точки множества A), в силу Предложения 1 $\underline{\dim}_B Z_r = f \underline{\dim}_B Z_r$.

Замечание 2. Если построенное при доказательстве теоремы множество M содержит все натуральные числа, начиная с некоторого, то в силу теоремы 2.3 из [4], из неравенства (6) по аналогии с (7) вытекает, что $\underline{\dim}_B Z_r \leq r$. Следовательно, в этом случае определена размерность $\underline{\dim}_B Z_r = r$.

Замечание 3. В [3. Теорема 5.7] доказана следующая теорема о промежуточных значениях нижней размерности квантования идемпотентных мер на метрическом компакте X :

Для любого неотрицательного числа $r < l \underline{\dim}_B X$ на X существует идемпотентная мера, нижняя размерность квантования которой равна r , а носитель равен X . Это утверждение доказано в [3] при условии, что для X существует константа $p > 0$ такая, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ любое ε -разделенное подмножество ε -шара $B(x, \varepsilon)$ содержит не более p точек. Данное условие является существенным ограничением на метрику X и выполняется далеко не всегда.

Доказательство обсуждаемой теоремы о промежуточных значениях опирается на упомянутую выше теорему 5.5 из [3]. Полученное в настоящей работе усиление теоремы 5.5 позволяет соответственно усилить и теорему 5.7. А именно, утверждение этой теоремы верно для любого $r \in [0, f \dim_B X)$ и без каких-либо ограничений на метрику X .

Список источников

1. Федорчук В.В. Бикомпакты без промежуточных размерностей // Доклады АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 795–797.
2. Иванов А.В. О множестве значений размерности квантования вероятностных мер на метрическом компакте // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63, № 5. С. 1074–1080. doi: 10.33048/smzh.2022.63.509
3. Ivanov A.V. On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology and its Applications. 2022. Vol. 306 (1). Art. 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931
4. Песин Я.Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. Москва ; Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2013. 404 с.

References

1. Fedorchuk V.V. (1973) Bicompacta without intermediate dimensions. *Soviet Mathematics – Doklady*. 14. pp. 1808–1811.
2. Ivanov A.V. (2022) On the range of the quantization dimension of probability measures on a metric compactum. *Siberian Mathematical Journal*. 63(5). pp. 903–908. DOI: 10.1134/S0037446622050093.
3. Ivanov A.V. (2022) On quantization dimensions of idempotent probability measures. *Topology and Its Applications*. 306(1). 107931. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107931>.
4. Pesin Ya.B. (1997) *Dimension Theory in Dynamical Systems. Contemporary Views and Applications*. Chicago: The University of Chicago Press.

Сведения об авторе:

Иванов Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (Петрозаводск, Республика Карелия). E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

Information about the author:

Ivanov Aleksandr V. (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics of the Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation). E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

Статья поступила в редакцию 18.11.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 18.11.2022; accepted for publication 01.06.2023