

Научная статья

УДК 531.2

doi: 10.17223/19988621/83/11

## Исследование напряженно-деформированного состояния губчатой костной ткани при одноосном сжатии

Екатерина Сергеевна Марченко<sup>1</sup>, Татьяна Витальевна Чайковская<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *89138641814@mail.ru*

<sup>2</sup> *kolmakova@ff.tsu.ru*

**Аннотация.** Представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния модельных фрагментов губчатой костной ткани при одноосном сжатии. Архитектура модельных фрагментов повторяет архитектуру фрагментов природной кости. Модельные фрагменты представлены совокупностью трабекулярных узлов с трабекулами определенной длины, толщины и минерального содержания. Исследовано влияние изменения длин главных трабекул и минерального содержания на изменение напряженно-деформированного состояния и величину эффективного модуля упругости модельных фрагментов губчатой ткани. Показано, что деформационное поведение фрагментов кости определяется внутренним взаимодействием главных и второстепенных трабекул.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, губчатая костная ткань, трабекулы, минеральное содержание, одноосное сжатие, компьютерное моделирование

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

**Для цитирования:** Марченко Е.С., Чайковская Т.В. Исследование напряженно-деформированного состояния губчатой костной ткани при одноосном сжатии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 127–142. doi: 10.17223/19988621/83/11

Original article

## A study of the stress-strain state of cancellous bone tissue under uniaxial compression

Ekaterina S. Marchenko<sup>1</sup>, Tat'yana V. Chaykovskaya<sup>2</sup>

<sup>1,2,3</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *89138641814@mail.ru*

<sup>2</sup> *kolmakova@ff.tsu.ru*

**Abstract.** In this paper, the stress-strain state of model fragments of cancellous bone tissue under uniaxial compression is studied. The architecture of model cancellous tissue

fragments mimics that of natural bone fragments. The model fragments of cancellous bone tissue are represented by a set of trabecular nodes, including the central element and the principal and secondary trabeculae of the certain length, thickness, and mineral content. The study of the von Mises stress distribution and normal strains shows that for the samples with short principal trabeculae, the largest normal strains and von Mises stresses are localized in the surface layers of the principal trabeculae. These characteristics are uniformly distributed over the thickness of the middle part of the principal trabeculae and decrease in their values with an increase in the principal trabecula length. It is revealed that with an increase in the length of the cancellous bone principal trabeculae, the effective longitudinal modulus of elasticity of the bone sample decreases according to a power law. The interaction between the principal and secondary trabeculae determines the deformation response of the bone samples in three mutually perpendicular directions under axial compression, which variously manifests itself depending on structural parameters and mass fraction of the trabeculae minerals.

**Keywords:** stress-strain state, cancellous bone tissue, trabeculae, mineral content, uniaxial compression, computer simulation

**Acknowledgments:** This study was supported by the Development Program of Tomsk State University (Priority 2030).

**For citation:** Marchenko, E.S., Chaykovskaya, T.V. (2023) A study of the stress-strain state of cancellous bone tissue under uniaxial compression. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 127–142. doi: 10.17223/19988621/83/11

## Введение

На сегодняшний день решением проблемы улучшения качества и продолжительности жизни человечества является замена утративших работоспособность органов и тканей имплантатами. Разработка и выбор материалов для имплантатов с точки зрения химической, биологической и механической совместимости играют одну из главных ролей в приживаемости имплантатов внутри организма. Для обеспечения механической совместимости имплантата с организмом необходимо учитывать все особенности механического поведения замещаемого природного материала, определяемого его структурой и составом, отличающимися для разных индивидуумов. Отсутствие такого анализа и в связи с этим неправильный подбор имплантата, например для костной ткани, приводит к резорбции (рассасыванию) костной ткани на границе кость–имплантат и необходимости проведения повторных операций по замене последнего.

Костная структура, состав и соответствующие им механические свойства подстраиваются под изменяющиеся внешние механические условия (закон Вольфа), варьируют в пределах одной кости и различны для разных индивидуумов [1–4]. Поэтому один и тот же имплантат может прижиться у одного пациента и не прижиться у другого. В связи с этим возникает необходимость в исследовании изменения механического поведения определенного типа костных тканей (губчатой или компактной) при изменении их структуры и состава. В настоящее время существует огромное количество исследований механического поведения костных тканей с применением экспериментальных методов и методов компьютерного моделирования [5–11]. Использование методов компьютерного моделирования

для исследования механического поведения костных тканей обладает рядом преимуществ по сравнению с экспериментальными методами: это отсутствие необходимости извлечения исследуемого участка кости из организма, возможность учета различных структурных особенностей костной ткани, возможность оценки характера распределения и величины реализующихся напряжений и деформаций в костной ткани при определенном виде нагружения и их изменение при варьировании параметров структуры и состава костной ткани.

Большинство существующих на сегодняшний день публикаций, касающихся компьютерного моделирования, включает в себя трехмерные геометрические модели фрагментов губчатой костной ткани, которые построены на основе изображений компьютерной томографии [7, 8] и включают, соответственно, геометрические особенности структуры и выводы по механике кости конкретного пациента, что не позволяет сделать обобщенные выводы о механическом поведении костной ткани в целом. В данной работе представлены общие закономерности напряженно-деформированного состояния модельных фрагментов губчатой костной ткани, отличающихся структурой и составом, при одноосном сжатии. Модельные фрагменты губчатой костной ткани явным образом построены с использованием разработанной трабекулярной модели [12, 13], в которой трабекулы представлены в виде балок переменной толщины, объединенных в трабекулярные узлы и образующих модельный фрагмент костной ткани. Алгоритм построения геометрических моделей губчатой костной ткани позволяет перестраивать структуру модельного фрагмента при варьировании структурных параметров трабекул (длины и толщины). В модели также неявным образом учитывается наличие коллагеновой и минеральной составляющих кости.

### Модель губчатой костной ткани

В качестве элемента структуры модельных фрагментов губчатой костной ткани рассматривается трабекулярный узел (рис. 1).

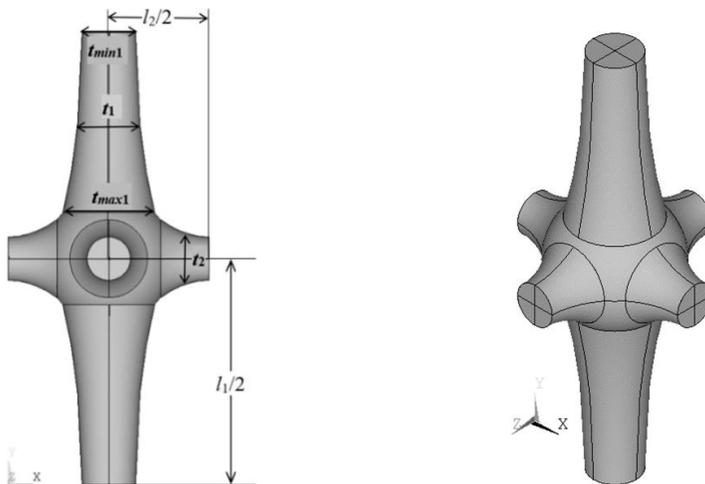
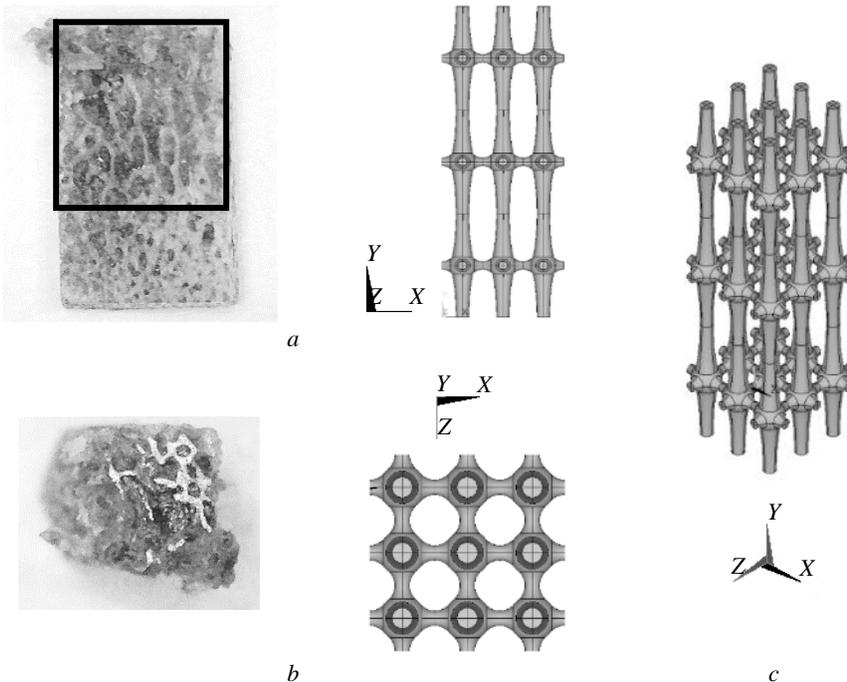


Рис. 1. Элемент структуры модельных фрагментов кости – трабекулярный узел  
Fig. 1. The structural element of model bone fragments is a trabecular node

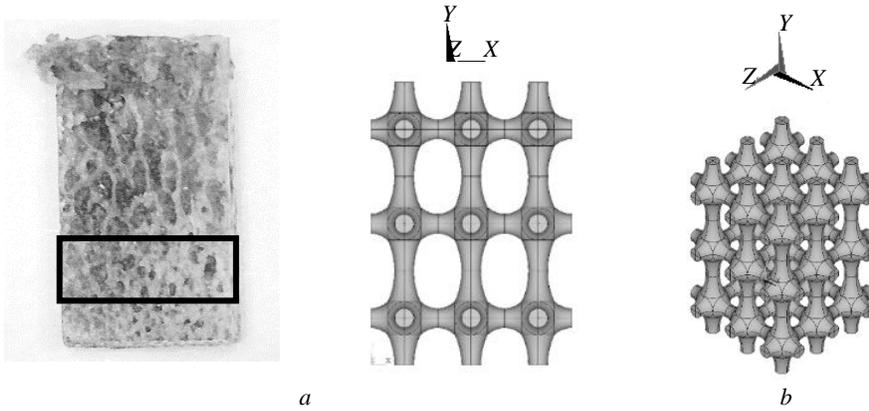
Трабекулярный узел включает в себя центральный элемент с шестью трабекулами половинной длины, из которых две расположены по оси  $Y$ , совпадающей с направлением приложения нагрузки, а четыре – в двух взаимно перпендикулярных направлениях по осям  $X$  и  $Z$ . Толщина каждой трабекулы в области контакта с центральным элементом  $t_{\max}$  и в области половины длины  $t_{\min}$  (см. рис. 1). вычисляется по заданному среднему значению толщины трабекулы  $t$  с использованием выражения из работы [14], полученного на основе экспериментальных данных. Модельный фрагмент губчатой костной ткани представляет собой совокупность трабекулярных узлов.

Алгоритм построения модельных фрагментов губчатой костной ткани позволяет автоматически перестраивать геометрические модели в зависимости от длин и средних толщин трабекул. Трабекулы, направленные вдоль оси нагружения, считаются главными трабекулами; трабекулы, направленные перпендикулярно им, считаются второстепенными. Все параметры, относящиеся к главным трабекулам, имеют индекс 1, относящиеся к второстепенным – индекс 2. Длина главных трабекул  $l_1$  варьировала в диапазоне от 0.215 до 1.3 мм, длина второстепенных трабекул задавалась постоянной  $l_2 = 0.215$  мм, средняя толщина трабекул  $t$  варьировала от 0.109 до 0.215 мм [6]. Изменение структурных параметров трабекулярных узлов приводит к изменению архитектуры модельных образцов.



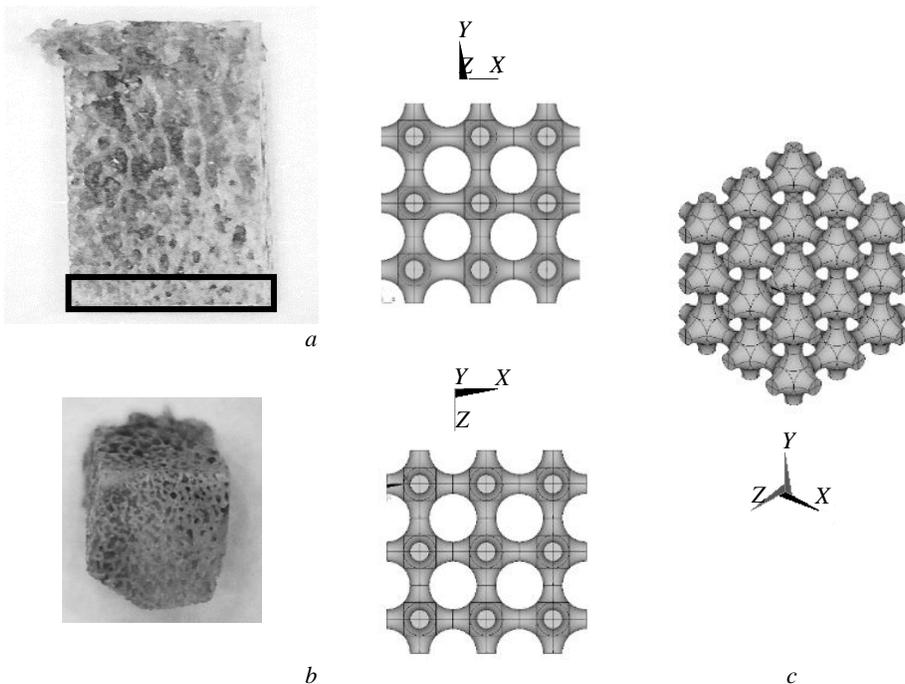
**Рис. 2** Архитектура фрагментов природной губчатой костной ткани и соответствующих модельных фрагментов с параметрами  $l_1 = 1.31$  мм,  $l_2 = 0.215$  мм (*a* – проекция в плоскости  $YX$  (вид сбоку); *b* – проекция в плоскости  $ZX$  (вид сверху), *c* – пространственное изображение)

**Fig. 2.** Architecture of fragments of natural cancellous bone tissue and corresponding model fragments with parameters  $l_1 = 1.31$  mm,  $l_2 = 0.215$  mm ((*a*) projection on the  $YX$ -plane (side view), (*b*) projection on the  $ZX$ -plane (top view), and (*c*) three-dimensional image)



**Рис. 3** Архитектура фрагментов природной губчатой костной ткани и соответствующих модельных фрагментов с параметрами  $l_1 = 0.383$  мм,  $l_2 = 0.215$  мм (*a* – проекция в плоскости *YX* (вид сбоку), *b* – пространственное изображение)

**Fig. 3.** Architecture of fragments of natural cancellous bone tissue and corresponding model fragments with parameters  $l_1 = 0.383$  mm,  $l_2 = 0.215$  mm ((*a*) projection on the *YX*-plane (side view) and (*b*) three-dimensional image)



**Рис. 4** Архитектура фрагментов природной губчатой костной ткани и соответствующих модельных фрагментов с параметрами  $l_1 = 0.215$  мм,  $l_2 = 0.215$  мм (*a* – проекция в плоскости *YX* (вид сбоку) (*a*), *b* – проекция в плоскости *ZX* (вид сверху), *c* – пространственное изображение)

**Fig. 4.** Architecture of fragments of natural cancellous bone tissue and corresponding model fragments with parameters  $l_1 = 0.215$  mm,  $l_2 = 0.215$  mm ((*a*) projection on the *YX*-plane (side view), (*b*) projection on the *ZX*-plane (top view), and (*c*) three-dimensional image)

Представительные объемы модельных фрагментов губчатой костной ткани разной архитектуры, соответствующие архитектуре фрагментов природной губчатой ткани бедренной кости быка, представлены на рис. 2–4 (выделены черными прямоугольниками).

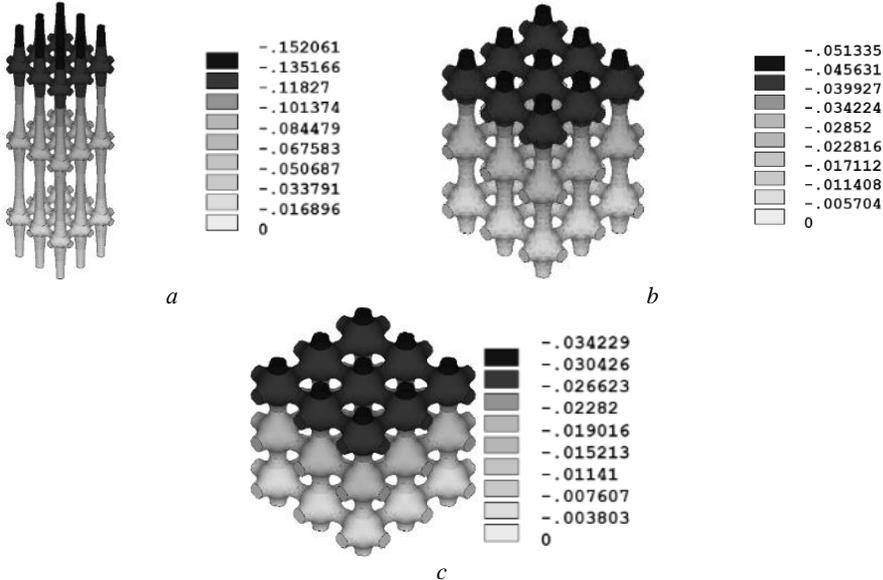
Ось  $Y$  соответствует продольной оси костного образца. Материал костных трабекул считался однородным и изотропным. Костные трабекулы рассматривались как двухфазный композиционный материал. Эффективный модуль упругости трабекул рассчитывался с использованием выражения механики композиционных материалов для случая произвольно ориентированных в коллагеновой матрице гидроксипапитовых волокон [15]. Массовая доля минералов гидроксипапитита  $\alpha$  варьировала от 0.1 до 0.4, в связи с чем расчетный модуль упругости принимал значения от 295 до 1 436 МПа, что не противоречит представленным данным в работе [16].

Расчеты напряженно-деформированного состояния модельных фрагментов губчатой костной ткани проводили в рамках линейной теории упругости с использованием метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Для построения конечно-элементных моделей использовали нерегулярную конечно-элементную сетку с тетраэдральными конечными элементами.

### Результаты и обсуждение

Модельные фрагменты губчатой костной ткани подвергались одноосному сжатию в направлении оси  $Y$ .

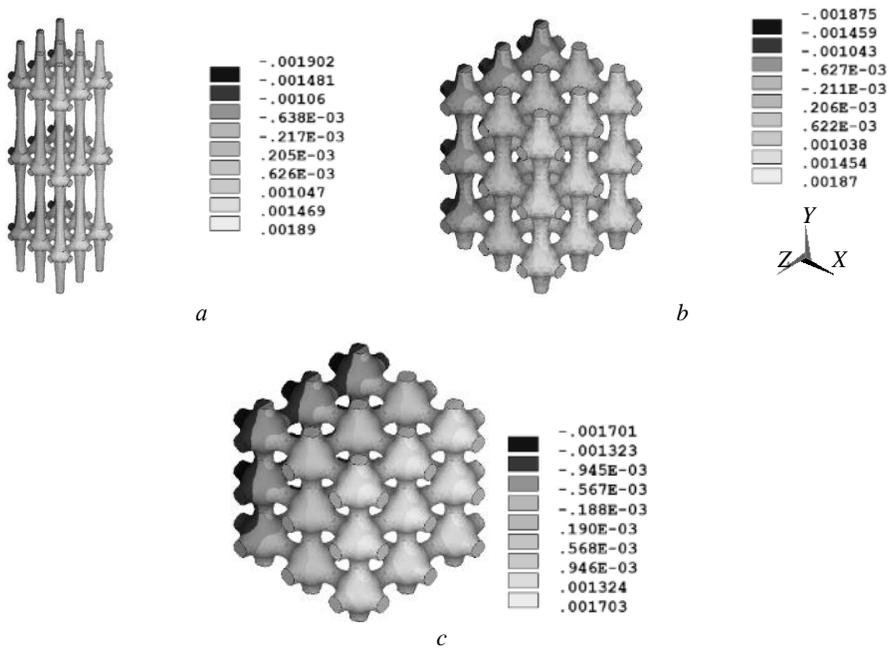
Исследовалось влияние изменения длины главной трабекулы губчатой костной ткани на напряженно-деформированное состояние модельных фрагментов кости.



**Рис. 5.** Распределение перемещений  $U_y$  (мм) в модельных образцах губчатой костной ткани, отличающихся длиной главных трабекул  $l_1$  (*a* – 1.31 мм, *b* – 0.383 мм, *c* – 0.215 мм), при напряжении сжатия 15 МПа ( $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм,  $\alpha = 0.1$ )

**Fig. 5.** Distribution of displacements  $U_y$  (mm) in model samples of cancellous bone tissue having different lengths of the main trabecula  $l_1$  ((*a*) 1.31, (*b*) 0.383, and (*c*) 0.215 mm) at a compressive stress of 15 МПа ( $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm,  $\alpha = 0.1$ )

На рис. 5, 6 представлены распределения перемещений в модельных образцах, отличающихся длиной  $l_1$  главной трабекулы. Из представленных рисунков видно, что при осевом сжатии образцы сжимаются в направлении оси  $Y$  и симметрично растягиваются в направлениях осей  $X$  и  $Z$ . Увеличение длины главной трабекулы приводит к большему сжатию образца в направлении оси  $Y$  и растяжению в перпендикулярных направлениях, что показывает увеличение абсолютных значений наибольших перемещений  $U_y, U_x, U_z$  (рис.5-7). Области наибольших перемещений  $U_x$  и  $U_z$  принадлежат главным трабекулам, распространяясь на второстепенные трабекулы с уменьшением длины главной трабекулы модельного образца (см. рис. 5, 6).

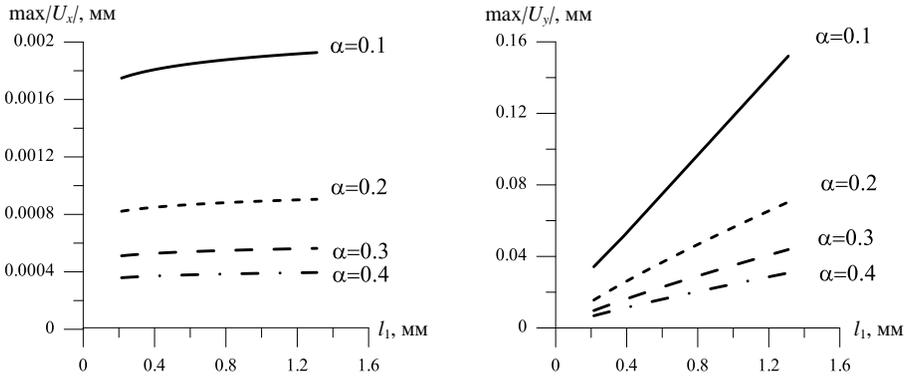


**Рис. 6.** Распределение перемещений  $U_x$  (мм) в модельных образцах губчатой костной ткани, отличающихся длиной главных трабекул  $l_1$  ( $a - 1.31$  мм,  $b - 0.383$  мм,  $c - 0.215$  мм), при напряжении сжатия 15 МПа ( $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм,  $\alpha = 0.1$ )

**Fig. 6.** Distribution of displacements  $U_x$  (mm) in model samples of cancellous bone tissue having different lengths of the main trabecula  $l_1$  ( $(a) 1.31$ ,  $(b) 0.383$ , and  $(c) 0.215$  mm) at a compressive stress of 15 MPa ( $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm,  $\alpha = 0.1$ )

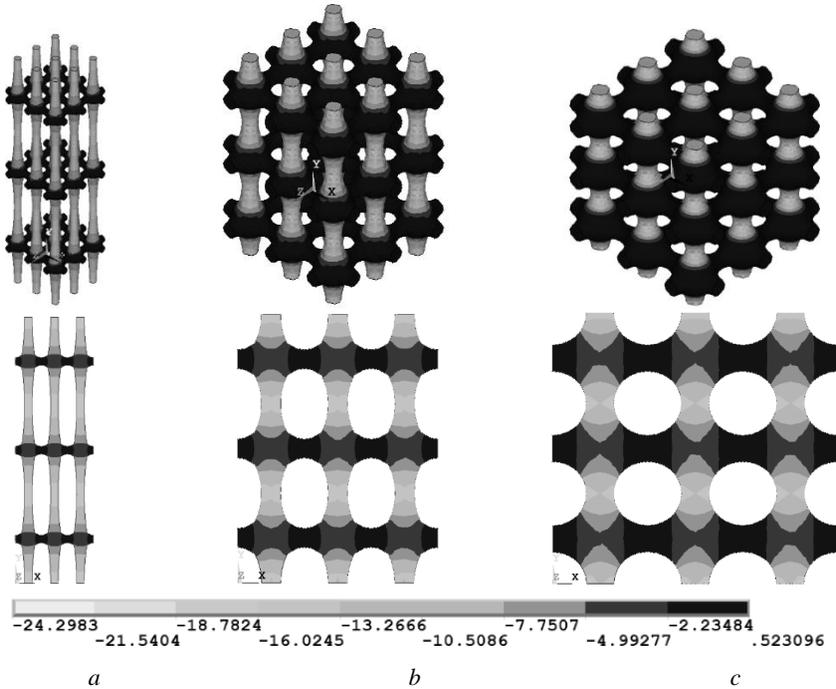
С увеличением массовой доли минералов с 0.1 до 0.4 (в 4 раза) деформируемость образца в трех взаимно перпендикулярных направлениях при одноосном сжатии снижается в 4.87 раза. Влияние изменения длин главных трабекул на деформируемость образцов при осевом сжатии растет с уменьшением массовой доли минералов ткани кости (рис. 7).

На рис. 8, 9 представлены распределения компонент нормальных напряжений на поверхности модельных образцов и в сечении  $YX$ . Из рисунков видно, что наибольшие сжимающие напряжения  $\sigma_y$  принадлежат главным трабекулам, а наибольшие растягивающие – второстепенным трабекулам (см. рис. 8).



**Рис. 7.** Зависимость максимальных абсолютных перемещений модельных образцов губчатой костной ткани от изменения длины главных трабекул ( $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм)

**Fig. 7.** Dependence of the maximum absolute displacements of model cancellous bone tissue samples on variation of the main trabeculae length ( $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm)

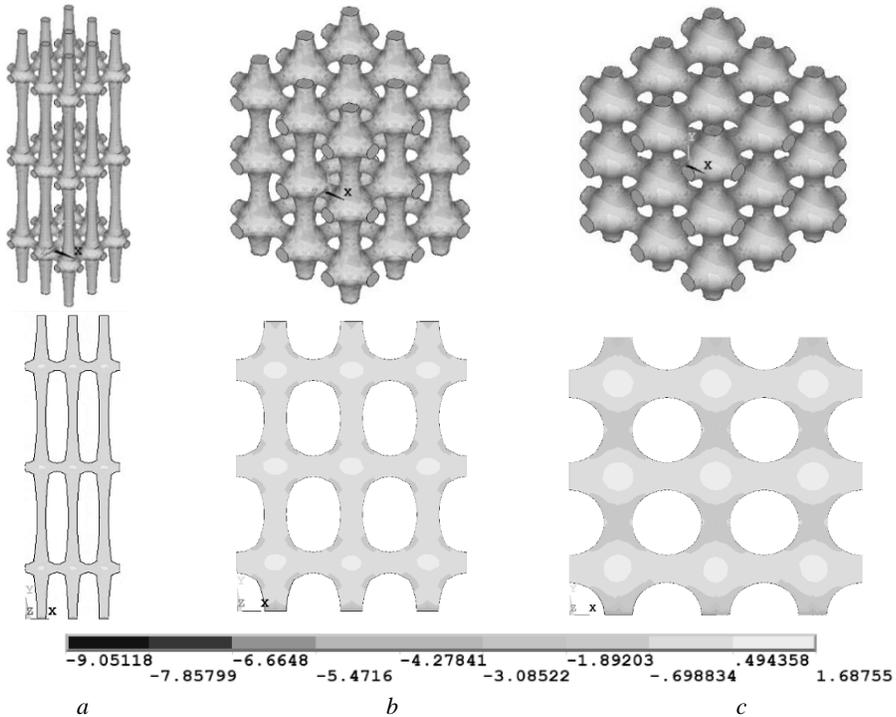


**Рис. 8.** Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  (МПа) на поверхности и внутри (сечение плоскостью  $YX$ ) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы  $l_1$  ( $a - 1.31$  мм,  $b - 0.383$  мм,  $c - 0.215$  мм), при напряжении сжатии 15 МПа ( $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм,  $\alpha = 0.1$ )

**Fig. 8.** Distribution of normal stresses  $\sigma_y$  (MPa) on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue ( $YX$ -plane section) having different lengths of the main trabecula  $l_1$  (( $a$ ) 1.31, ( $b$ ) 0.383, and ( $c$ ) 0.215 mm) at a compressive stress of 15 MPa ( $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm,  $\alpha = 0.1$ )

С увеличением длины главной трабекулы характер распределения осевых напряжений  $\sigma_y$  по поверхности образца не меняется, изменения в распределении напряжений  $\sigma_x$  реализуются внутри образца (см. рис. 8), а именно в центральном элементе сжимающие напряжения уменьшаются, а в главных трабекулах увеличиваются, приводя к более равномерному распределению в этих областях.

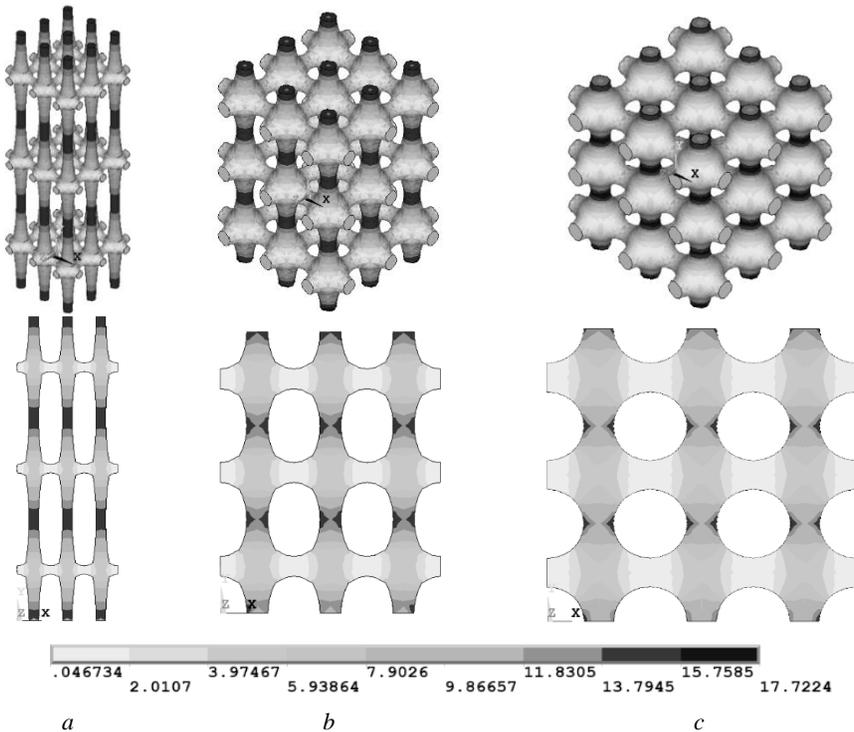
Наибольшие растягивающие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  расположены на поверхности образца в местах крепления второстепенных трабекул к центральному элементу и внутри центрального элемента (см. рис. 9). Наибольшие сжимающие напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  расположены в местах крепления главной трабекулы к центральному элементу и увеличиваются с уменьшением длины главной трабекулы. С увеличением длины главной трабекулы сжимающие напряжения  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  внутри образца в области главных трабекул уменьшаются (см. рис. 9). Сравнивая значения нормальных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  можно сделать вывод, что наибольшими растягивающими нормальными напряжениями являются напряжения  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$ , а наибольшими сжимающими –  $\sigma_y$ .



**Рис. 9.** Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  (МПа) на поверхности и внутри (сечение плоскостью YX) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы  $l_1$  (a – 1.31 мм, b – 0.383 мм, c – 0.215 мм), при напряжении сжатия 15 МПа ( $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм,  $\alpha = 0.1$ )

**Fig. 9.** Distribution of normal stresses  $\sigma_x$  (MPa) on the surface and within (the YX-plane section) of cancellous bone tissue (model samples) having different lengths of the main trabecula  $l_1$  ((a) 1.31, (b) 0.383, and (c) 0.215 mm) at a compressive stress of 15 MPa ( $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm,  $\alpha = 0.1$ )

Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу, представленное на рис. 10, показывает, что наибольшие напряжения для образца с короткими главными трабекулами ( $l_1 = 0.215$  мм) локализируются в приповерхностных слоях главных трабекул и более равномерно распределяются по толщине, уменьшаясь в значении с увеличением длины главных трабекул ( $l_1 > 0.215$  мм). Таким образом, опираясь на энергетическую теорию прочности, можно предположить, что зарождение трещин в образцах с короткими главными трабекулами может начаться раньше в приповерхностных слоях главных трабекул, чем в образцах с длинными главными трабекулами, в которых трещины могут занять всю толщину материала главной трабекулы.

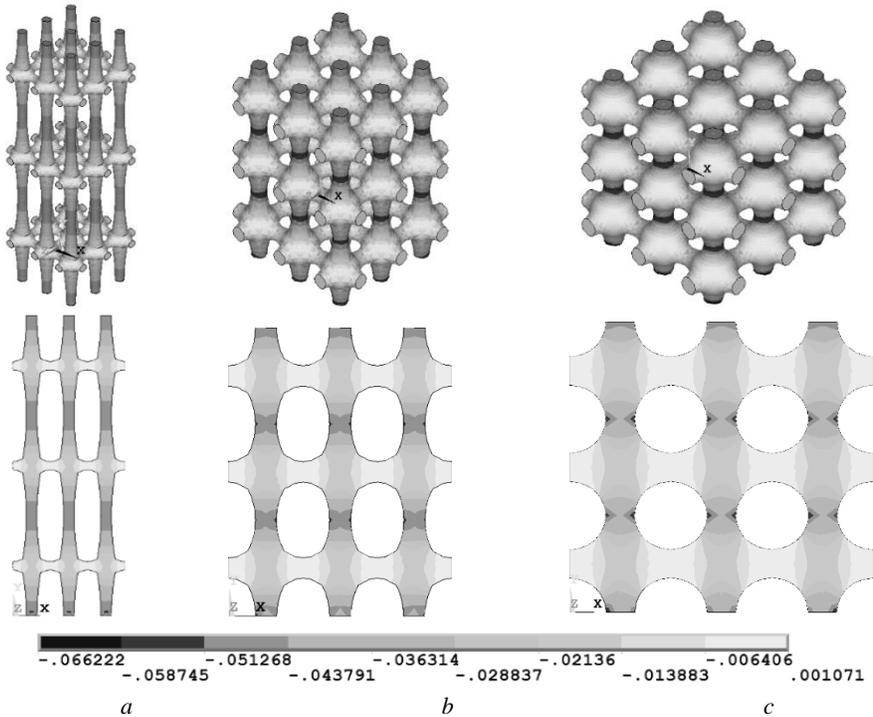


**Рис. 10.** Распределение напряжений по Мизесу на поверхности и внутри (сечение плоскостью  $YX$ ) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы  $l_1$  ( $a - 1.31$  мм,  $b - 0.383$  мм,  $c - 0.215$  мм) при  $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм,  $\alpha = 0.1$

**Fig. 10.** The Mises stress distribution on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue ( $YX$ -plane section) having different lengths of the main trabecula  $l_1$  ( $a$ ) 1.31, ( $b$ ) 0.383, and ( $c$ ) 0.215 mm) at  $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm, and  $\alpha = 0.1$

Распределение компонент нормальных осевых деформаций  $\epsilon_x$ , представленное на рис. 11, показывает, что наибольшие сжимающие деформации принадлежат главным трабекулам. Для образцов с короткими главными трабекулами ( $l_1 = 0.215$  мм) наибольшие осевые деформации локализируются в приповерхностных слоях главных трабекул, равномерно распределяясь по толщине средней части главных трабекул

и уменьшаясь в значении с увеличением длины главной трабекулы ( $l_1 = 1.31$  мм). Наибольшие растягивающие деформации принадлежат второстепенным трабекулам.

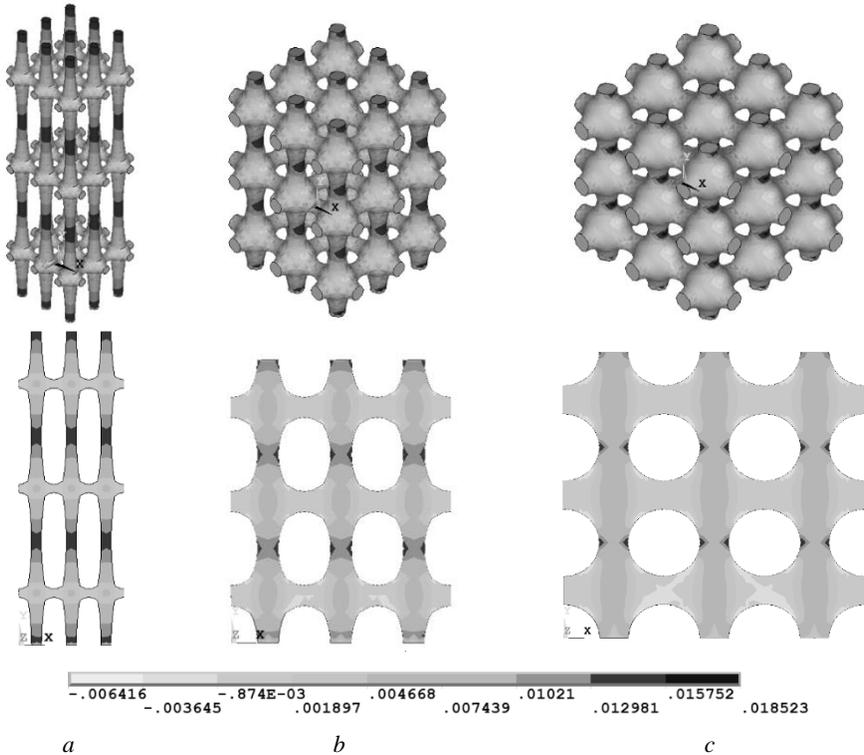


**Рис. 11.** Распределение нормальных деформаций  $\epsilon_y$  на поверхности и внутри (сечение плоскостью  $YX$ ) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы  $l_1$  (*a* – 1.31 мм, *b* – 0.383 мм, *c* – 0.215 мм) при  $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм,  $\alpha = 0.1$

**Fig. 11.** Distribution of normal strains  $\epsilon_y$  on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue ( $YX$ -plane section) having different lengths of the main trabecula  $l_1$  (*a*) 1.31, (*b*) 0.383, and (*c*) 0.215 mm) at  $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm, and  $\alpha = 0.1$

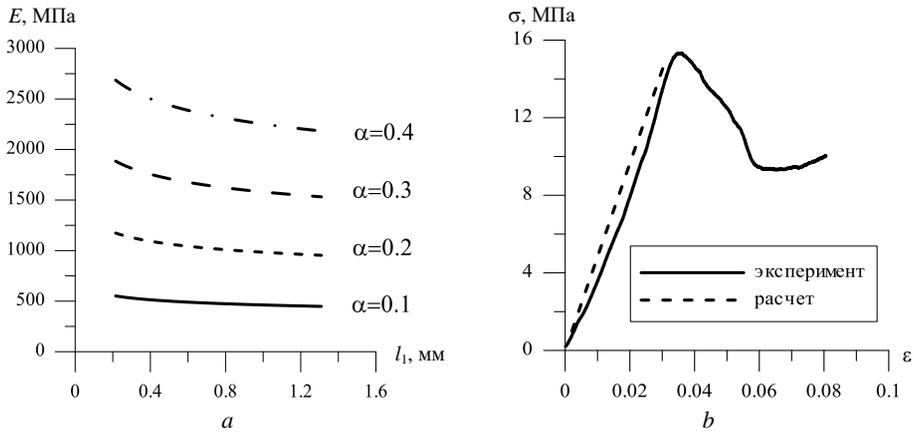
Распределение нормальных деформаций  $\epsilon_x$  показывает, что наибольшие растягивающие деформации  $\epsilon_x$  для образцов с короткими главными трабекулами ( $l_1 = 0.215$  мм) локализуются в приповерхностных слоях центральной части главных трабекул, уменьшаются в значении и более равномерно распределяются по толщине центральной части главных трабекул с увеличением длины главных трабекул ( $l_1 = 1.31$  мм) (рис. 12). Подобная картина наблюдается для напряжений  $\epsilon_z$  в сечении образца плоскостью  $YZ$ . Сравнивая значения нормальных деформаций  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  можно сделать вывод, что наибольшими растягивающими нормальными деформациями являются деформации  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_x$ , а наибольшими сжимающими –  $\epsilon_y$ . Таким образом, опираясь на теорию наибольших нормальных деформаций, можно предположить, что зарождение трещин в образцах с короткими главными трабекулами может начаться раньше в приповерхностных слоях главных трабекул, чем в образцах с длинными главными трабекулами, в которых трещины могут занять всю толщину материала главной трабекулы.

На рис. 13, *a* представлены графики зависимости эффективного продольного модуля упругости образца губчатой костной ткани с разным минеральным содержанием от длины главной трабекулы. Представленные графики показывают степенную зависимость продольного модуля упругости образцов губчатой костной ткани от длины главной трабекулы. Увеличение массовой доли минералов в костной ткани  $\alpha$  приводит к увеличению значения продольного модуля упругости. Увеличение массовой доли минералов с 0.1 до 0.4 (в 4 раза) приводит к увеличению продольного модуля упругости образцов губчатой кости независимо от длины главной трабекулы в 4.8 раза. С увеличением длины главных трабекул губчатой костной ткани эффективный продольный модуль упругости образца кости снижается. Увеличение длины главных трабекул губчатой костной ткани с 0.215 до 1.31 мм (в 6 раз) приводит к уменьшению значения модуля упругости в 1.2 раза независимо от массовой доли минералов в кости. Полученные значения продольного модуля упругости модельных фрагментов губчатой костной ткани не противоречат экспериментальным литературным данным [5–7, 17].



**Рис. 12.** Распределение нормальных деформаций  $\epsilon_x$  на поверхности и внутри (сечение плоскостью  $YX$ ) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы  $l_1$  (*a* – 1.31 мм, *b* – 0.383 мм, *c* – 0.215 мм) при  $l_2 = 0.215$  мм,  $t_1 = 0.162$  мм,  $t_2 = 0.162$  мм,  $\alpha = 0.1$

**Fig. 12.** Distribution of normal strains  $\epsilon_x$  on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue ( $YX$ -plane section) having different lengths of the main trabecula  $l_1$  (*a*) 1.31, (*b*) 0.383, and (*c*) 0.215 mm) at  $l_2 = 0.215$  mm,  $t_1 = 0.162$  mm,  $t_2 = 0.162$  mm, and  $\alpha = 0.1$



**Рис. 13.** Зависимость эффективного продольного модуля упругости образца губчатой костной ткани с разным минеральным содержанием от длины главной трабекулы ( $l_2 = 0.215$  мм,  $r_1 = 0.162$  мм,  $r_2 = 0.162$  мм) (а), деформационный отклик образца природной костной ткани и модельного образца при одноосном сжатии (б)

**Fig. 13.** (a) Effective longitudinal modulus of elasticity of the cancellous bone sample with different mineral content as a function of the main trabecula length ( $l_2 = 0.215$  mm,  $r_1 = 0.162$  mm,  $r_2 = 0.162$  mm) and (b) deformation response of the natural bone tissue sample and model sample under uniaxial compression

Модуль упругости модельного образца губчатой костной ткани, повторяющего структуру лабораторного образца (см. рис. 2–4), был определен согласно объемным долям фрагментов кости с разной длиной главных трабекул и массовой долей минералов  $\alpha = 0.1$ , участвовавших в повторении структуры лабораторного образца, и равняется 482.12 МПа. На рис. 13, б представлены сравнения графиков нагружения при одноосном сжатии образца природной губчатой костной ткани и модельного образца.

### Заключение

В результате проведенного исследования получены следующие основные результаты и выводы.

Внутренняя структура губчатой костной ткани, а именно взаимодействие друг с другом главных и второстепенных трабекул, определяет деформационный отклик образцов в трех взаимно перпендикулярных направлениях при осевом сжатии, проявляющийся в разной мере в зависимости от структурных параметров и массовой доли минералов трабекул. Наибольшие сжимающие напряжения  $\sigma_y$  и деформации  $\epsilon_y$  принадлежат главным трабекулам, а наибольшие растягивающие – второстепенным трабекулам.

Для образцов с короткими главными трабекулами ( $l_1 = 0.215$  мм) наибольшие нормальные деформации и напряжения по Мизесу локализируются в приповерхностных слоях главных трабекул, равномерно распределяются по толщине средней части главных трабекул и уменьшаются в значении с увеличением длины главной трабекулы ( $l_1 = 1.31$  мм). Увеличение длины главных трабекул губчатой костной ткани с 0.215 до 1.31 мм (в 6 раз) приводит к уменьшению значения мо-

дуля упругости в 1.2 раза независимо от массовой доли минералов в кости. Увеличение массовой доли минералов с 0.1 до 0.4 (в 4 раза) приводит к увеличению продольного модуля упругости образцов губчатой кости независимо от длины главной трабекулы в 4.8 раза.

#### Список источников

1. *Avrunin A.S., Tses E.A.* The birth of a new scientific field – biomechanics of the skeleton. Julius Wolff and his work “Das Gesetz der Transformation der Knochen” // *History of Medicine*. 2016. V. 3 (4). P. 447–461. doi: 10.17720/2409-5834.v3.4.2016.36q
2. *Mellon S.J., Tanner K.E.* Bone and its adaptation to mechanical loading: a review // *International Materials Reviews*. 2012. V. 57 (5). P. 235–255.
3. *Keaveny T.M., Morgan E.F., Yeh O.C.* Biomedical Engineering and Design Handbook / ed. by M. Kutz. New York : McGraw-Hill, 2009.
4. *Cowin S.C.* Bone Mechanics Handbook. 2nd edition. New York : CRC Press, 2001.
5. *Rosa N., Moura M.F.S.F., Olhero S., Simoes R., Magalhães F.D., Marques A.T., Ferreira J.P.S., Reis A.R., Carvalho M., Parente M.* Bone: An Outstanding Composite Material // *Applied Sciences*. 2022. V. 12 (7). Art. 3381. doi: 10.3390/app12073381
6. *Novitskaya E. et al.* Recent advances on the measurement and calculation of the elastic moduli of cortical and trabecular bone: a review // *Theoretical and Applied Mechanics*. 2011. V. 38 (3). P. 209–297. doi: 10.2298/TAM1103209N
7. *Orava H. et al.* Changes in subchondral bone structure and mechanical properties do not substantially affect cartilage mechanical responses – A finite element study // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2022. V. 128. Art. 105129. doi: 10.1016/j.jmbbm.2022.105129
8. *Lee T. et al.* Fast tool evaluation of iliac crest tissue elastic properties using the reduced-basis methods // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2010. V. 132. Art. 121009. doi: 10.1115/1.4001254
9. *Xi L. et al.* Separating effects of bone-quality changes at multiple scales in steroid-induced osteoporosis: Combining multiscale experimental and modelling approaches // *Mechanics of Materials*. 2021. V. 157. Art. 103821. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103821
10. *Lovrenić-Jugović M., Tonković Z., Skozrit I.* Experimental and numerical investigation of cyclic creep and recovery behavior of bovine cortical bone // *Mechanics of Materials*. 2020. V. 146. Art. 103407. doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103407
11. *Lubarda V.A., Novitskaya E.E., Kittricka J.Mc., Bodde S.G., Chen P.Y.* Elastic properties of cancellous bone in terms of elastic properties of its mineral and protein phases with application to their osteoporotic degradation // *Mechanics of Materials*. 2012. V. 44. P. 139–150. doi: 10.1016/j.mechmat.2011.06.005
12. *Kolmakova T.* Computer modeling of the structure of the cortical and trabecular bone tissue // *AIP Conference Proceedings*. 2015. V. 1683. Art. 020087. doi: 10.1063/1.4932777
13. *Lastovkina Y.N., Kolmakova T.V.* Computer modelling of the microstructure of the trabecular bone fragments for the study of stress-strain state // *IOP Publishing: Journal of Physics. Conference Series*. 2016. V. 769. Art. 012020. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012020.
14. *Dagan D., Be'ery M., Gefen A.* Single-trabecula building block for large-scale finite element models of cancellous bone // *Med. Biol. Eng. Comput.* 2004. V. 42. P. 549–556. doi: 10.1007/BF02350998
15. *Кристенсен П.* Введение в механику композитов / пер. с англ. А.И. Бейля, Н.П. Жмудя; под ред. Ю.М. Тарнопольского. М. : Мир, 1982. 334 с.
16. *Cyganik L., Binkowski M., Kokot G., Rusin T., Popik P., Bolechala F., Nowak R., Wróbel Z., John A.* Prediction of Young's modulus of trabeculae in microscale using macro-scale's relationships between bone density and mechanical properties // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2014. V. 36. P. 120–134. doi: 10.1016/j.jmbbm.2014.04.011

17. Carter Dennis R., Schwab Greg H., Dan Spengler M. Tensile Fracture of Cancellous Bone // Acta Orthopaedica Scandinavica. 1980. V. 51. P. 733–741. doi: 10.3109/17453678008990868

### References

1. Avrunin A.S., Tses E.A. (2016) The birth of a new scientific field — biomechanics of the skeleton. Julius Wolff and his work “Das Gesetz der Transformation der Knochen”. *History of Medicine*. 3(4). pp. 447–461. doi: 10.17720/2409-5834.v3.4.2016.36q
2. Mellon S.J., Tanner K.E. (2012) Bone and its adaptation to mechanical loading: a review. *International Materials Reviews*. 57(5). pp. 235–255. doi: 10.1179/1743280412Y.0000000008
3. Keaveny T.M., Morgan E.F., Yeh O.C. (2009) *Biomedical Engineering and Design Handbook*. New York: McGraw-Hill.
4. Cowin S.C. (2001) *Bone Mechanics Handbook*. 2<sup>nd</sup> edition. New York: CRC Press.
5. Rosa N., Moura M.F.S.F., Olhero S., Simoes R., Magalhães F.D., Marques A.T., Ferreira J.P.S., Reis A.R., Carvalho M., Parente M. (2022) Bone: an outstanding composite material. *Applied Sciences*. 12(7). Article 3381. pp. 1–15. doi: 10.3390/app12073381
6. Novitskaya E., Chen P.Y., Hamed E., Li J., Lubarda V.A., Jasiuk I., Mckittrick J. (2011) Recent advances on the measurement and calculation of the elastic moduli of cortical and trabecular bone: a review. *Theoretical and Applied Mechanics*. 38(3). pp. 209–297. doi: 10.2298/TAM1103209N
7. Orava H., Huang L., Ojanen S.P., Mäkelä J.T.A., Finnilä M.A.J., Saarakkala S., Herzog W., Korhonen R.K., Töyräs J., Tanska P. (2022) Changes in subchondral bone structure and mechanical properties do not substantially affect cartilage mechanical responses – A finite element study. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 128. Article 105129. pp. 1–15. doi: 10.1016/j.jmbbm.2022.105129
8. Lee T., Garlapati R.R., Lam K., Lee P.V., Chung Y.S., Choi J.B., Vincent T.B., Das De S. (2010) Fast tool evaluation of iliac crest tissue elastic properties using the reduced-basis methods. *Journal of Biomechanical Engineering*. 132. Article 121009. pp. 1–8. doi: 10.1115/1.4001254
9. Xi L., Barbieri E., Wang P., Wu W., Gupta H. (2021) Separating effects of bone-quality changes at multiple scales in steroid-induced osteoporosis: Combining multiscale experimental and modelling approaches. *Mechanics of Materials*. 157. Article 103821. pp. 1–15. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103821
10. Lovrenić-Jugović M., Tonković Z., Skozrit I. (2020) Experimental and numerical investigation of cyclic creep and recovery behavior of bovine cortical bone. *Mechanics of Materials*. 146. Article 103407. pp. 1–14. doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103407
11. Lubarda V.A., Novitskaya E.E., Kittrick J.Mc., Bodde S.G., Chen P.Y. (2012) Elastic properties of cancellous bone in terms of elastic properties of its mineral and protein phases with application to their osteoporotic degradation. *Mechanics of Materials*. 44. pp. 139–150. doi: 10.1016/j.mechmat.2011.06.005
12. Kolmakova T. (2015) Computer modeling of the structure of the cortical and trabecular bone tissue. *AIP Conference Proceedings*. 1683. Article 020087. pp. 1–4. doi: 10.1063/1.4932777
13. Lastovkina Y.N., Kolmakova T.V. (2016) Computer modelling of the microstructure of the trabecular bone fragments for the study of stress-strain state. *IOP Publishing: Journal of Physics: Conference Series*. 769. Article 012020. pp. 1–4. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012020
14. Dagan D., Be'ery M., Gefen A. (2004) Single-trabecula building block for large-scale finite element models of cancellous bone. *Medical & Biological Engineering & Computing*. 42. pp. 549–556. doi: 10.1007/BF02350998
15. Christensen R.M. (1979) *Mechanics of Composite Materials*. New York: Wiley.
16. Cyganik Ł., Binkowski M., Kokot G., Rusin T., Popik P., Bolechała F., Nowak R., Wróbel Z., John A. (2014) Prediction of Young's modulus of trabeculae in microscale using macro-scale's relationships between bone density and mechanical properties. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 36. pp. 120–134. doi: 10.1016/j.jmbbm.2014.04.011

17. Carter D.R., Schwab G.H., Spengler D.M. (1980) Tensile fracture of cancellous bone. *Acta Orthopaedica Scandinavica*. 51. pp. 733–741. doi: 10.3109/17453678008990868

**Сведения об авторах:**

**Марченко Екатерина Сергеевна** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующая лабораторией медицинских материалов и имплантатов с памятью формы Сибирского физико-технического института, заведующая кафедрой прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: 89138641814@mail.ru

**Чайковская Татьяна Витальевна** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

**Information about the authors:**

**Marchenko Ekaterina S.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

**Chaykovskaya Tat'yana V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 09.11.2022; принята к публикации 01.06.2023*

*The article was submitted 09.11.2022; accepted for publication 01.06.2023*