

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.552

doi: 10.17223/19988621/84/1

MSC: 16R99

Тензорное произведение алгебр инцидентности
и групповых алгебрИлья Вячеславович Дудин¹, Петр Андреевич Крылов²^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия¹ overchalito228@gmail.com² krylov@math.tsu.ru

Аннотация. Пусть $I(X, R)$ и $I(Y, S)$ – алгебры инцидентности, где X и Y – предупорядоченные множества, R и S – алгебры над некоторым коммутативным кольцом T . Доказывается существование гомоморфизма алгебр $I(X, R) \otimes_T I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes_T S)$. Если X и Y – конечные множества, то имеет место изоморфизм. Для произвольных групп G и H доказано, что справедлив изоморфизм алгебр $R[G] \otimes_T S[H] \cong (R \otimes_T S)[G \times H]$.

Ключевые слова: тензорное произведение, алгебра инцидентности, групповая алгебра

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00375, <https://rscf.ru/project/23-21-00375/>

Для цитирования: Дудин И.В., Крылов П.А. Тензорное произведение алгебр инцидентности и групповых алгебр // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/84/1

Original article

Tensor Product of Incidence Algebras and Group Algebras

Ilya V. Dudin¹, Piotr A. Krylov²^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation¹ overchalito228@gmail.com² krylov@math.tsu.ru

Abstract. We consider the tensor product of incidence algebras and group algebras. Let X and Y be locally finite preordered sets, R and S be algebras over a commutative ring T .

Theorem 1.1. There exists a canonical $R \otimes_T S$ -modular and ring homomorphism of T -algebras

$$\theta: I(X, R) \otimes_T I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes_T S).$$

All three algebras in the theorem are the corresponding incidence algebras.

In general, θ is not an isomorphism.

For group algebras, the situation is more favorable. Let G and H be arbitrary groups.

Theorem 2.2. There is a canonical $R \otimes_T S$ -modular and ring isomorphism of T -algebras

$$\omega: R[G] \otimes_T S[H] \rightarrow (R \otimes_T S)[G \times H].$$

Theorem 2.2 generalizes the well-known result for the situation where $R = F = S$ and F is a field.

If X is a finite set, then the incidence ring $I(X, R)$ is often called the structural matrix ring. It is known that there exists an isomorphism of algebras $I(X, R) \rightarrow M(n, B, R)$, where $M(n, B, R)$ is a structural matrix ring, B is a Boolean matrix defined by preorder $\leq$ on the set X . Let Y be a finite set and $\Gamma_Y: I(Y, S) \rightarrow M(m, C, S)$ be the corresponding isomorphism.

The well-known concept of the Kronecker product of matrices can be transferred to matrices with values in different rings. Then the pre-ordered set $X \times Y$ will be the corresponding Boolean matrix $B \otimes C$, where $B \otimes C$ is the Kronecker product of the matrices B and C . Therefore, there exists the isomorphism

$$\Gamma_{X \times Y}: I(X \times Y, R \otimes S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S).$$

There exists a canonical map

$$\Delta: M(n, B, R) \otimes_T M(m, C, S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S).$$

Corollary 3.1. 1) There is equation $\Delta(\Gamma_X \times \Gamma_Y) = \Gamma_{X \times Y} \theta$.

2) The maps θ and Δ are isomorphism.

From Theorem 2.2 and Corollary 3.1 one can obtain Corollary 3.2.

Corollary 3.2. Let G and H be arbitrary groups. The statements written below are valid:

1) If X and Y are finite preordered sets, then there exists the isomorphism of algebras

$$I(X, R)[G] \otimes_T I(Y, S)[H] \cong I(X \times Y, R \otimes_T S)[G \times H].$$

2) Let there be given rings of structural matrices $M(n, B, R)$ and $M(m, C, S)$. Then the following isomorphism of algebras takes place:

$$M(n, B, R)[G] \otimes_T M(m, C, S)[H] \cong M(nm, B \otimes C, R \otimes_T S)[G \times H].$$

Keywords: tensor product, incidence algebras, group algebra

Acknowledgments: The research was supported by the Russian Science Foundation, Project No. 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

For citation: Dudin, I.V., Krylov, P.A. (2023) Tensor Product of Incidence Algebras and Group Algebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/84/1

Введение

Тензорное произведение модулей и алгебр играет большую роль в математике. Данная статья направлена на решение ряда вопросов. Во-первых, будет ли тензорное произведение двух алгебр инцидентности также алгеброй инцидентности? Во-вторых, является ли тензорное произведение двух групповых алгебр тоже групповой алгеброй? В случае алгебр инцидентности найден лишь некоторый канонический гомоморфизм (теорема 1.1). В случае же, если предупорядоченные множества в определении алгебр инцидентности конечны, то имеем изоморфизм алгебр (следствие 3.1). Это дает законченный ответ на первый вопрос. Поскольку алгебры инцидентности в данном случае изоморфны определенным кольцам

структуральных матриц, то получаем также изоморфизм для тензорных произведений колец структуральных матриц (следствие 3.1).

Что касается второго вопроса, то здесь получен полный ответ без дополнительных условий (теорема 2.2). Теорема 2.2, в частности, обобщает следующий результат из [1]: имеет место канонический изоморфизм алгебр $K[G] \otimes_K K[H] \cong K[G \times H]$, где K – поле, G и H – группы.

Все кольца в работе – ассоциативные с ненулевой единицей. При этом считаем, что кольца являются алгебрами над некоторым коммутативным кольцом T . Тензорное произведение алгебр рассматриваем над кольцом T . Обычно символ T в тензорном произведении вида $A \otimes_T B$ опускаем. Если R – некоторое кольцо (алгебра), то $M(n, R)$ – кольцо всех $n \times n$ матриц со значениями в R .

Групповые кольца и кольца инцидентности представляют характерные и важные алгебраические объекты. Теории таких колец представлены в работах [1] и [2] соответственно.

Пусть $\langle X, \leq \rangle$ – предупорядоченное множество, т.е. $\leq$ – рефлексивное и транзитивное отношение. Для алгебры R символ $I(X, R)$ обозначает алгебру инцидентности локально конечного предупорядоченного множества X над кольцом R [2].

Для группы G имеем групповую алгебру $R[G]$ группы G над алгеброй R [1]. Единицу группы и единицу кольца обозначаем одним символом 1 . Элемент $1 \cdot g$ отождествляем с g ($g \in G$), а элемент $r \cdot 1$ отождествляем с r ($r \in R$).

1. Алгебры инцидентности

Пусть X и Y – предупорядоченные множества, R и S – алгебры над коммутативным кольцом T . Отметим, что декартово произведение $X \times Y$ также будет предупорядоченным множеством относительно лексикографического порядка. Алгебра инцидентности $I(X, R)$ является левым R -модулем. Если $r \in R$, $f \in I(X, R)$, $x, y \in X$, то равенство $(rf)(x, y) = rf(x, y)$ задает структуру R -модуля.

Теорема 1.1. Существует канонический $R \otimes_T S$ -модульный и кольцевой гомоморфизм T -алгебр

$$\theta: I(X, R) \otimes_T I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes_T S).$$

Доказательство. Возьмем произвольные функции $f \in I(X, R)$ и $g \in I(Y, S)$. Обозначим через $f \circ g$ функцию $(X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow R \otimes S$, определенную следующим образом. Для пары элементов $(a, b) \in (X \times Y) \times (X \times Y)$, где $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, полагаем $(f \circ g)(a, b) = f(x_1, x_2) \otimes g(y_1, y_2)$. Функция $f \circ g$ есть элемент алгебры $I(X \times Y, R \otimes S)$. Пусть $\eta: I(X, R) \times I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes S)$ – отображение, определенное по правилу $\eta(f, g) = f \circ g$ для любых $f \in I(X, R)$ и $g \in I(Y, S)$. Нетрудно убедиться, что η – сбалансированное над T отображение. Поэтому имеется T -модульный гомоморфизм $\theta: I(X, R) \otimes I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes S)$ со свойством

$$\theta(f \otimes g) = \eta(f, g),$$

т.е.

$$\theta(f \otimes g) = f \circ g. \quad (1)$$

На самом деле θ является гомоморфизмом алгебр. Для проверки нужно показать справедливость равенства $\theta((f \otimes g)(f_1 \otimes g_1)) = \theta(f \otimes g)\theta(f_1 \otimes g_1)$, где $f, f_1 \in I(X, R)$, $g, g_1 \in I(Y, S)$, или равенства

$$ff_1 \circ gg_1 = (f \circ g)(f_1 \circ g_1) \quad (2)$$

в алгебре $I(X \times Y, R \otimes S)$. Технические вычисления мы опустим. Также без труда проверяется, что θ – гомоморфизм $R \otimes S$ -модулей.

Следствие 1.2. Если R – коммутативное кольцо, то имеем гомоморфизм R -алгебр

$$I(X, R) \otimes_R I(Y, R) \rightarrow I(X \times Y, R).$$

Доказательство. В теореме 1.1 нужно положить $R = T = S$. Гомоморфизм θ в данной ситуации действует следующим образом. Для функций $f \in I(X, R)$, $g \in I(Y, R)$ и элемента $(a, b) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ имеем $\theta(f \otimes g) = f \circ g$, где $(f \circ g)(a, b) = f(x_1, x_2) \cdot g(y_1, y_2)$.

Замечание 1.3. Гомоморфизм из следствия 1.2 не обязан быть изоморфизмом. Простейший пример получается, если в качестве кольца R взять произведение $\prod_{p=2,3,5,\dots} \mathbb{Z}_p$ и положить $X = Y = \mathbb{N}$.

2. Случай групповых алгебр

Как и в предыдущем разделе, R и S – некоторые алгебры. G и H – произвольные группы.

Лемма 2.1. 1) Существует канонический гомоморфизм T -алгебр $R \otimes_T S \rightarrow R[G] \otimes_T S[H]$.

2) Тензорное произведение $R[G] \otimes_T S[H]$ является левым $R \otimes_T S$ -модулем.

Доказательство. 1) Имеем гомоморфизмы T -алгебр $R \rightarrow R[G]$, $r \mapsto r \cdot 1$ ($r \in R$), и $S \rightarrow S[H]$, $s \mapsto s \cdot 1$ ($s \in S$). Они индуцируют гомоморфизм T -алгебр $\alpha: R \otimes S \rightarrow R[G] \otimes S[H]$, $r \otimes s \mapsto r \cdot 1 \otimes s \cdot 1 = r \otimes s$ [3. § 9.2, следствие в)].

2) Исходя из гомоморфизма α на группе $R[G] \otimes S[H]$ можно задать структуру притягивающего левого $R \otimes S$ -модуля с помощью формулы

$$(r \otimes s) \left(\sum_{a \in G} r_a a \otimes \sum_{b \in H} s_b b \right) = \sum_{a \in G} r r_a a \otimes \sum_{b \in H} s s_b b. \quad (3)$$

Далее будем использовать более краткую и удобную форму записи элементов тензорного произведения $R[G] \otimes S[H]$. Именно, верно равенство

$$\sum_{a \in G} r_a a \otimes \sum_{b \in H} s_b b = \sum_{a \in G, b \in H} (r_a \otimes s_b)(a \otimes b). \quad (4)$$

Произвольный элемент $u \in R[G] \otimes S[H]$ может быть записан следующим образом:

$$u = \sum_{a \in G, b \in H} p_{ab}(a \otimes b), \quad (5)$$

где $p_{ab} \in R \otimes S$ для всех a и b .

Для сокращения записи вместо $\sum_{a \in G}$ (соответственно, $\sum_{a \in G, b \in H}$) пишем $\sum_a$ (соответственно, $\sum_{a,b}$).

С помощью равенства (5) можно вывести простую формулу для умножения в кольце $R[G] \otimes S[H]$. Пусть $u = \sum_{a,b} p_{ab}(a \otimes b)$ и $v = \sum_{a,b} q_{ab}(a \otimes b)$ – элементы этого кольца. Вычисления подтверждают справедливость следующего равенства:

$$uv = \sum_{a,b} \left(\sum_{(c,d) \cdot (e,f) = (a,b)} p_{cd} q_{ef} (a \otimes b) \right). \quad (6)$$

Видим, что умножение представляет собой некоторую свертку (что вполне естественно).

Теорема 2.2. Имеется канонический $R \otimes_T S$ -модульный изоморфизм и кольцевой изоморфизм T -алгебр $\omega: R[G] \otimes_T S[H] \rightarrow (R \otimes_T S)[G \times H]$.

Доказательство. Отображение

$$\begin{aligned} \psi: R[G] \times S[H] &\rightarrow (R \otimes S)[G \times H], \\ \psi\left(\sum_a r_a a, \sum_b s_b b\right) &= \sum_{a,b} (r_a \otimes s_b)(a, b) \end{aligned}$$

является сбалансированным. Следовательно, существует T -модульный гомоморфизм $\omega: R[G] \otimes S[H] \rightarrow (R \otimes S)[G \times H]$, для которого $\omega\left(\sum_a r_a a \otimes \sum_b s_b b\right) = \sum_{a,b} (r_a \otimes s_b)(a, b)$. На произвольном элементе u из $R[G] \otimes S[H]$, представленном в форме (3), ω действует следующим образом:

$$\omega(u) = \omega\left(\sum_{a,b} p_{ab}(a \otimes b)\right) = \sum_{a,b} p_{ab}(a, b). \quad (7)$$

Из равенства (7) несложно получить, что ω - $R \otimes S$ -модульный гомоморфизм, т.е. $\omega(pv) = p\omega(v)$, для всех $p \in R \otimes S$ и $v \in R[G] \otimes S[H]$. Используя равенства (6) и (7) можно проверить, что $\omega(uv) = \omega(u)\omega(v)$ для любых $u, v \in R[G] \otimes S[H]$. Следовательно, ω – гомоморфизм алгебр.

Пусть элемент $u \in R[G] \otimes S[H]$ записан, как в (5). Если $\omega(u) = 0$, то из (7), учитывая единственность записи элементов группового кольца, находим, что $p_{ab} = 0$ для всех a, b . Откуда $u = 0$ и ω – инъективное отображение. Если же $\sum_{(a,b)} s_{ab}(a, b) \in (R \otimes S)[G \times H]$, то $\omega\left(\sum_{a,b} s_{ab}(a \otimes b)\right) = \sum_{(a,b)} s_{ab}(a, b)$. Это означает, что ω – сюръекция. Очевидно, что единичный элемент ω переводит в единичный элемент. В итоге можно утверждать, что ω – изоморфизм.

Следствие 2.3. Группа $R[G] \otimes_T S[H]$ является свободным $R \otimes S$ -модулем. Множество элементов $a \otimes b$, $a \in G, b \in H$, образует свободный базис этого модуля.

3. Кольца структуральных матриц

Рассмотрим более детально ситуацию, когда предупорядоченные множества X и Y конечны. Прежде всего обратим внимание, что элементы конечного множества X (а также Y) допускают такую нумерацию $x_1, \dots, x_n$, что из $x_i \leq x_j$ следует $i \leq j$ [2. Лемма 1.2.5]. Если X содержит n элементов, то кольцо инцидентности $I(X, R)$ часто называют кольцом структуральных матриц (см.: [4]). Известно, что кольцо структуральных матриц представимо в виде кольца блочных треугольных матриц [5], и, таким образом, оно является одним из видов колец формальных (говорят еще «обобщенных») матриц. Подобным кольцам посвящена книга [6].

Развернем подробнее сказанное в предыдущем абзаце. Пронумеруем элементы множества X числами от 1 до n так, как указано выше. Тогда в принципе можно считать, что X – это множество $\{1, \dots, n\}$. Поставив в соответствие функции f из $I(X, R)$ матрицу $(f(x_i, x_j))$ (в позиции (i, j) стоит элемент $f(x_i, x_j)$), получим вложение колец $I(X, R) \rightarrow M(n, R)$. Образ этого вложения обозначим через $M(n, \leq, R)$. Тогда имеем равенство $M(n, \leq, R) = \{(a_{ij}) \in M(n, R) \mid i \not\leq j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$. Работая с конкретным кольцом структуральных матриц, как правило, сразу считают его подкольцом в $M(n, R)$.

Пусть $B = (b_{ij})$ – булева матрица, соответствующая предпорядку $\leq$ на X , т.е. $b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leq j; \\ 0, & i \not\leq j. \end{cases}$

Кольцо $M(n, \leq, R)$ также обозначают как $M(n, B, R)$, где

$$M(n, B, R) = \{(a_{ij}) \in M(n, R) \mid b_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

Матрица B обладает свойствами: $b_{ii} = 1$, и из $b_{ik} = b_{kj} = 1$ следует $b_{ij} = 1$ (говорят, что B – рефлексивная и транзитивная булева матрица). Опираясь на данные свойства, можно доказать существование подстановки σ степени n такой, что булева матрица σB является верхней блочно треугольной матрицей [4, 5] (здесь $\sigma B = (b_{\sigma(i)\sigma(j)})$, см.: [6]). Ясно, что кольцо $M(n, \sigma B, R)$ состоит из блочно треугольных матриц. Наконец, существует канонический изоморфизм колец $M(n, B, R) \cong M(n, \sigma B, R)$, $(a_{ij}) \mapsto (a_{\sigma(i)\sigma(j)})$.

Прежде чем сформулировать основные результаты раздела, приведем некоторые рассуждения. Сначала расширим понятие кронекерова произведения матриц на матрицы со значениями в разных кольцах. Пусть R и S – кольца, n и m – натуральные числа. Для матриц $A = (a_{ij}) \in M(n, R)$ и $B = (b_{ij}) \in M(m, S)$ кронекерово произведение $A \otimes B$ определим как блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} \otimes B & \dots & a_{1n} \otimes B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \otimes B & \dots & a_{nn} \otimes B \end{pmatrix},$$

блок $a_{ij} \otimes B$ которой равен

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \otimes b_{11} & \cdots & a_{ij} \otimes b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} \otimes b_{m1} & \cdots & a_{ij} \otimes b_{mm} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $A \otimes B$ имеет порядок nm и принимает значения в кольце $R \otimes S$.

Строки и столбцы матрицы $A \otimes B$ пронумеруем естественным образом парами чисел (i, j) , где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, после чего элемент $a_{ij} \otimes b_{kl}$ будет находиться в позиции $((i, k), (j, l))$. Обратим еще внимание на весьма полезное равенство

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \quad (8)$$

Для колец инцидентности $I(X, R)$ существуют аналоги матричных единиц. Обозначим через e_{xy} такую функцию $X \times X \rightarrow R$, что

$$e_{xy}(s, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (s, t) = (x, y); \\ 0, & (s, t) \neq (x, y). \end{cases}$$

Функции e_{xy} обладает свойством: если $x \leq z \leq y$, то $e_{xz}e_{zy} = e_{xy}$.

Изоморфизм алгебр $I(X, R) \rightarrow M(n, B, R)$, $f \mapsto (f(x_i, x_j))$, полученный ранее, обозначим через Γ_X . Ясно, что Γ_X переводит функции e_{xy} в матричные единицы кольца $M(n, B, R)$.

Пусть $I(Y, S)$ – еще одна алгебра инцидентности и $M(m, C, S)$ – соответствующее кольцо структуральных матриц с булевой матрицей C . Далее пусть $\Gamma_Y : I(Y, S) \rightarrow M(m, C, S)$ – изоморфизм алгебр, аналогичный Γ_X .

Понятно, что $B \otimes C$ – булева рефлексивная и транзитивная матрица. Следовательно, имеем кольцо структуральных матриц $M(nm, B \otimes C, R \otimes S)$. Проверка показывает, что предпорядоченному множеству $X \times Y$ соответствует булева матрица $B \otimes C$. Значит, мы располагаем изоморфизмом

$$\Gamma_{X \times Y} : I(X \times Y, R \otimes S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S).$$

С другой стороны, существует каноническое отображение

$$\Delta : M(n, B, R) \otimes M(m, C, S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S), \quad G \otimes_r H \rightarrow G \otimes H.$$

Из равенства (1) вытекает, что Δ – гомоморфизм алгебр. Введенные гомоморфизмы удовлетворяют равенству

$$\Delta(\Gamma_X \otimes \Gamma_Y) = \Gamma_{X \times Y} \theta, \quad (9)$$

т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I(X, R) \otimes I(Y, S) & \xrightarrow{\Gamma_X \otimes \Gamma_Y} & M(n, B, R) \otimes M(m, C, S) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \Delta \\ I(X \times Y, R \otimes S) & \xrightarrow{\Gamma_{X \times Y}} & M(nm, B \otimes C, R \otimes S) \end{array} \quad (10)$$

Следствие 3.1. 1) Если X и Y – конечные предпорядоченные множества, то гомоморфизм θ является изоморфизмом.

2) Гомоморфизм Δ в диаграмме (10) является изоморфизмом.

Доказательство. Так как $\Gamma_X \otimes \Gamma_Y$ и $\Gamma_{X \times Y}$ суть изоморфизмы, то утверждения 1 и 2 равносильны. И доказать их можно, исходя из одинаковых соображений. В случае 1 нужно использовать функции e_{xy} и аналогичные функции для двух оставшихся колец инцидентности.

Более внимательно посмотрим на Δ . Пусть E_{ij} и F_{kl} – матричные единицы колец $M(n, B, R)$ и $M(m, C, S)$ соответственно. Тогда $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ – свободный базис для $M(n, B, R)$ как левого R -модуля, $\{F_{kl} \mid k, l = 1, \dots, m\}$ – свободный базис для $M(m, C, S)$ как левого S -модуля. А все матрицы вида $E_{ij} \otimes F_{kl}$ образуют свободный базис для кольца $M(nm, B \otimes C, R \otimes S)$, если его рассмотреть как левый $R \otimes S$ -модуль. И все получается за счет того, что Δ переводит свободный базис в свободный базис. ■

Из теоремы 2.2 и следствия 3.1 непосредственно выводится такой результат.

Следствие 3.2. Пусть G и H – произвольные группы. Справедливы записанные ниже утверждения.

1. Если X и Y – конечные предпорядоченные множества, то существует изоморфизм алгебр

$$I(X, R)[G] \otimes_T I(Y, S)[H] \cong I(X \times Y, R \otimes_T S)[G \times H].$$

2. Пусть даны кольца структуральных матриц $M(n, B, R)$ и $M(m, C, S)$. Тогда имеет место изоморфизм алгебр

$$M(n, B, R)[G] \otimes_T M(m, C, S)[H] \cong M(nm, B \otimes C, R \otimes_T S)[G \times H].$$

Список источников

1. Passman D.S. The Algebraic Structure of Group Rings. New York : John Wiley and Sons, 1977. 734 p.
2. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York : Marcel Dekker, 1997. 334 p.
3. Pierce R.S. Associative Algebras. Berlin : Springer-Verlag, 1982. 406 p.
4. Dăscălescu S., Wyk L. van. Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs? // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124 (5). P. 1385–1391.
5. Smith K.C., Wyk L. van. An internal characterization of structural matrix rings // Commun. Algebra. 1994. V. 22 (4). P. 5599–5622.
6. Krylov P., Tuganbaev A. Formal Matrices. Berlin : Springer-Verlag, 2017. 164 p.

References

1. Passman D.S. (1997) *The Algebraic Structure of Group Rings*. New York: John Wiley and Sons.
2. Spiegel E., O'Donnell C.J. (1997) *Incidence Algebras*. New York: Marcel Dekker.
3. Pierce R.S. (1982) *Associative Algebras*. Berlin: Springer-Verlag.
4. Dăscălescu S., Wyk L. van (1996) Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs? *Proceedings of the American Mathematical Society*. 124(5). pp. 1385–1391.
5. Smith K.C., Wyk L. van (1994) An internal characterization of structural matrix rings. *Communications in Algebra*. 22(4). pp. 5599–5622.
6. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices*. Berlin: Springer-Verlag.

Сведения об авторах:

Дудин Илья Вячеславович – магистрант, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории алгебры и топологии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: overchalito228@gmail.com

Крылов Пётр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: krylov@math.tsu.ru

Information about the authors:

Dudin Ilya V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: overchalito228@gmail.com

Krylov Piotr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 20.04.2023; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 20.04.2023; accepted for publication 10.07.2023