

Научная статья

УДК 531-14, 531.113.8

doi: 10.17223/19988621/84/6

О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета

Софья Борисовна Богданова¹, Сергей Октябринович Гладков²

^{1,2} *Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Россия*

¹ *sonjaf@list.ru*

² *sglad51@mail.ru*

Аннотация. С помощью аналитически полученных в подвижном базисе уравнений движения найдены различные траектории тел в неинерциальных системах отсчета (НСО) при условии, что они движутся по заданным траекториям. Решение найденной системы уравнений проанализировано в одном конкретном случае, когда роль действующей силы принадлежит силе тяжести. С помощью численных методов найдены решения уравнений, приведены их графические иллюстрации в нескольких частных случаях, когда траектории НСО заданы в виде прямой, окружности и брахистохроны.

Ключевые слова: подвижный базис, абсолютное и относительное движение, неинерциальная система отсчета

Для цитирования: Богданова С.Б., Гладков С.О. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6

Original article

On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames

Sof'ya B. Bogdanova¹, Sergey O. Gladkov²

^{1,2} *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation*

¹ *sonjaf@list.ru*

² *sglad51@mail.ru*

Abstract. This paper considers a trajectory of the body moving under the influence of the force $\mathbf{F}$ in a non-inertial reference frame (NRF), which is "tied" to a given curve $y = y(x)$ and is described by a natural movable basis $\boldsymbol{\tau}$ - $\mathbf{n}$. For this NRF, a system of linear differential equations is obtained to simulate various types of trajectories resulting from the action of certain forces. The common Cartesian coordinate system is chosen as a fixed basis $\mathbf{i}$ - $\mathbf{j}$. Several examples of motion along the given trajectories $y = y(x)$ are considered with gravity as an acting force $\mathbf{F}$. For these specific cases, the analytic expressions for absolute (in the system $\mathbf{i}$ - $\mathbf{j}$), relative (in the system $\boldsymbol{\tau}$ - $\mathbf{n}$), and translational accelerations are given. The corresponding trajectories of motion under free fall conditions in terms of

NRF are constructed. The following trajectories $y = y(x)$ are studied: uneven motion along a straight line, a brachistochrone, and a circle. Using computer modeling tools, the results are presented as plots showing the qualitative difference between the trajectories of the same body in the inertial and non-inertial frames of reference. The considered limiting cases of motion confirm the validity of the obtained general system of equations in the NRF.

Keywords: movable basis, absolute and relative motion, non-inertial reference frame

For citation: Bogdanova, S.B., Gladkov, S.O. (2023) On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6

Введение

Задача, о которой пойдет речь, относится к классу задач из области механики относительного движения. Когда мы говорим о подвижном базисе (см.: [1–10]), то для неподвижного наблюдателя траектория движения определяется концом радиус-вектора, проведенного из начала неподвижной системы координат в точку наблюдения. При этом траектория движения должна диктоваться конкретно действующей силой, роль которой определяется только постановкой задачи.

Во избежание в дальнейшем изложении путаницы с сокращениями заметим, что аббревиатуры НСК (неинерциальная система координат) и НСО (неинерциальная система отсчета) в нашем понимании абсолютно идентичны.

Цель настоящей работы – определение формы тех траекторий, в которые будут деформироваться траектории в неподвижных системах координат при переходе к НСО. Подчеркнем, что ни в одной из известных нам публикаций соответствующего решения мы не обнаружили, и в силу практической значимости этой задачи мы остановимся на ее решении по возможности наиболее подробно.

Основные уравнения

Предположим, что имеется некоторая заданная двумерная кривая, определяемая уравнением $y_0 = y_0(x_0)$. Пусть на этой кривой в произвольной ее точке выбран подвижный базис $\mathbf{t}-\mathbf{n}$, где $\mathbf{t}$ – единичный вектор касательной, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к этой кривой (рис. 1). Отметим, что метод подвижного базиса был неоднократно апробирован при решении различного рода задач, ряд которых подробно описан, например, в публикациях [11–13].

Следуя рис. 1, зададим на плоскости хоу кривую

$$\mathbf{R}_0(t) = i x_0(t) + j y_0(t), \quad (1)$$

по которой может перемещаться мгновенный подвижный базис НСК, характеризуемый ортами $\mathbf{t}-\mathbf{n}$, со скоростью $v_0 = |\dot{\mathbf{R}}_0(t)| = \left| \frac{d\mathbf{R}_0(t)}{dt} \right|$, где t – абсолютный момент времени в нерелятивистском приближении ($v_0 \ll c$, c – скорость света в вакууме). Везде далее для сокращения записи явная зависимость всех функций

от времени t будет опускаться. При этом кривизна кривой известна и задается уравнением [14, 15]

$$K = \frac{|\dot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{y}_0 \ddot{x}_0|}{(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

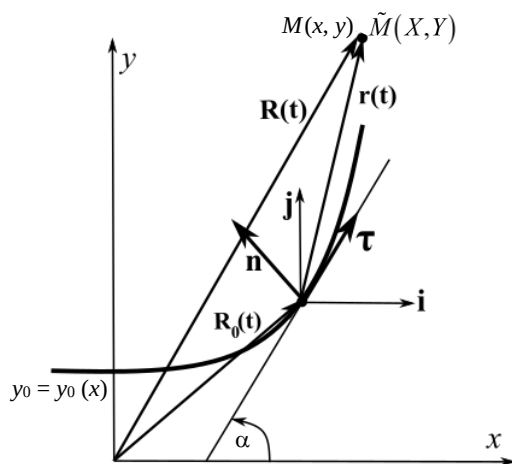


Рис. 1. Схематическое изображение постановки задачи. Здесь кривая $y_0 = y_0(x)$ считается годографом вектор-функции $\mathbf{R}_0(t) = \dot{\mathbf{i}}x_0(t) + \dot{\mathbf{j}}y_0(t)$

Fig. 1. Schematic representation of the problem formulation. Curve $y_0 = y_0(x)$ is a godograph of a vector-function $\mathbf{R}_0(t) = \dot{\mathbf{i}}x_0(t) + \dot{\mathbf{j}}y_0(t)$

Поскольку единичный вектор касательной в соответствии с рис. 1 может быть разложен по базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ согласно соотношению $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$, где α – угол между касательной к кривой и положительным направлением оси ox , то, пользуясь известной формулой дифференциальной геометрии $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\mathbf{n}$ [15], где ds – дифференциал длины дуги кривой, для единичного вектора нормали найдем, что $\mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha$. Следовательно, для обратного преобразования имеем

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \boldsymbol{\tau} \cos \alpha - \mathbf{n} \sin \alpha, \\ \mathbf{j} = \boldsymbol{\tau} \sin \alpha + \mathbf{n} \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Будем считать, что точечное тело массы m находится в произвольной точке $\tilde{M}(X, Y)$ (см. рис.1), где координаты (X, Y) относятся к НСО, а наблюдатель движется вместе с ней и находится в ее начале.

Точки $M(x, y)$ и $\tilde{M}(X, Y)$ по своему смыслу совпадают, но первая относится к инерциальной системе координат, а вторая – к НСК.

Как следует из этого рисунка, для неподвижной СК, характеризуемой ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, радиус-вектор можно представить в виде суммы $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}X + \mathbf{n}Y$. После дифференцирования вектора $\mathbf{R}$ имеем

$$\mathbf{v}_{abs} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}}, \quad (4)$$

где $\mathbf{v}_{abs}$ – абсолютная скорость движения тела относительно ИСО $\mathbf{i}-\mathbf{j}$.

Согласно (1) имеем $\dot{\mathbf{R}}_0 = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = v_0 \boldsymbol{\tau}$, где v_0 – скорость движения подвижного базиса $\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$ в ИСК по заданной кривой $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0$. А так как $\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}X + \mathbf{n}Y$, то производная от него

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau}X + \mathbf{n}Y) = \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y} + \dot{\boldsymbol{\tau}}X + \dot{\mathbf{n}}Y. \quad (5)$$

Первые два слагаемых в (5) вполне понятны, а для остальных с учетом формулы $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \frac{1}{v_0} = K\mathbf{n}$, имеем

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = v_0 K\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{dt} = -v_0 K\boldsymbol{\tau}. \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), находим

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y} + v_0(\mathbf{n}X - \boldsymbol{\tau}Y) = \boldsymbol{\tau}(\dot{X} - v_0 KY) + \mathbf{n}(\dot{Y} + v_0 KX). \quad (7)$$

Поэтому, согласно формуле (5), с учетом (7) абсолютная скорость материальной точки будет

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{abs} &= \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y} + [\boldsymbol{\tau}(1 - KY) + \mathbf{n}KX]v_0 = \\ &= \boldsymbol{\tau}[\dot{X} + (1 - KY)v_0] + \mathbf{n}[\dot{Y} + KXv_0], \end{aligned} \quad (8)$$

где первые два слагаемых описывают относительную скорость движения ($\mathbf{v}_{rel} = \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y}$), а вектор $[\boldsymbol{\tau}(1 - KY) + \mathbf{n}KX]v_0$ представляет собой линейную связь скорости тела в системе НСК ($\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$), движущегося вдоль кривой $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0$, со скоростью $v_0 = |\dot{\mathbf{R}}_0|$.

Дифференцирование формулы (8) дает $\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}$, где $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_{abs}$ – абсолютное ускорение в ИСО $\mathbf{i}-\mathbf{j}$. Первое слагаемое в правой части можно представить как

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = \frac{d}{dt}(v_0 \boldsymbol{\tau}) = \dot{v}_0 \boldsymbol{\tau} + v_0^2 K\mathbf{n}, \quad (9)$$

где $\dot{v}_0$ – тангенциальное ускорение, а $v_0^2 K$ – центростремительное; второе слагаемое с учетом (8) и (6) дает

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{X}\boldsymbol{\tau} + \ddot{Y}\mathbf{n} + \left\{ -\boldsymbol{\tau} \left(2v_0 K\dot{Y} + \frac{d(v_0 K)}{dt} Y + v_0^2 K^2 X \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{n} \left(2v_0 K\dot{X} + \frac{d(v_0 K)}{dt} X - v_0^2 K^2 Y \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где сумма $\ddot{X}\boldsymbol{\tau} + \ddot{Y}\mathbf{n}$ описывает относительное ускорение в НСК $\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$. Поэтому с учетом (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{rel} + \boldsymbol{\tau} \left(\dot{v}_0 - 2v_0 K \dot{Y} + \frac{d(v_0 K)}{dt} Y + v_0^2 K^2 X \right) + \\ + \mathbf{n} \left(v_0^2 K + 2v_0 K \dot{X} + \frac{d(v_0 K)}{dt} X - v_0^2 K^2 Y \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользовавшись вторым законом Ньютона $\mathbf{a}_{abs} = \frac{\mathbf{F}}{m}$, из общего выражения (11) получаем

$$\mathbf{a}_{rel} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{a}_{mov}, \quad (12)$$

где относительное ускорение $\mathbf{a}_{rel} = \ddot{\mathbf{X}}\boldsymbol{\tau} + \ddot{\mathbf{Y}}\mathbf{n}$, а переносное

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{mov} = \boldsymbol{\tau} \left(\dot{v}_0 - 2v_0 K \dot{Y} + \frac{d(v_0 K)}{dt} Y + v_0^2 K^2 X \right) + \\ + \mathbf{n} \left(v_0^2 K + 2v_0 K \dot{X} + \frac{d(v_0 K)}{dt} X - v_0^2 K^2 Y \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Если теперь подставить формулы (12) и (13) в динамическое уравнение Ньютона и спроектировать его на орты $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, то мы придем к следующей системе дифференциальных уравнений в НСК:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{F_\tau}{m} - \dot{v}_0 + 2v_0 K \dot{Y} - \frac{d(v_0 K)}{dt} Y - v_0^2 K^2 X, \\ \ddot{Y} = \frac{F_n}{m} - v_0^2 K - 2v_0 K \dot{X} - \frac{d(v_0 K)}{dt} X + v_0^2 K^2 Y. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнения (14) позволяют нам ответить на вопрос, как будет выглядеть траектория движения в подвижном базисе $\boldsymbol{\tau}$ – $\mathbf{n}$, если траектория движения наблюдателя, находящегося в центре базиса НСК, нам известна.

Анализ уравнений движения (14) в некоторых частных случаях

Будем предполагать, что наше тело движется под воздействием только силы тяжести $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{j}$ (рис. 2). В качестве первого примера траекторию $\mathbf{R}_0(t)$ зададим в виде прямой, по которой инерциальная система координат движется с постоянной скоростью. Поскольку ее кривизна $K = 0$, а скорость движения $v = \text{const}$, то, как и должно быть, переносное ускорение исчезает ($\mathbf{a}_{mov} = 0$), и

формула (12) сводится к очевидной: $\mathbf{a}_{rel} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a}_{abs}$.

Для силы тяжести $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ ее проекции на базис НСК $\boldsymbol{\tau}$ – $\mathbf{n}$ таковы:

$$F_\tau = -mg \sin \alpha, \quad F_n = -mg \cos \alpha.$$

Поэтому система (14) сильно упрощается, и в результате имеем:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g \sin \alpha, \\ \ddot{Y} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (15)$$

Решение данной системы уравнений для различных значений угла α показано на рис. 3.

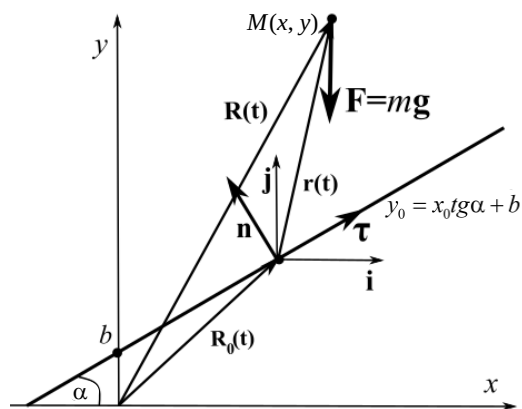


Рис. 2. Подвижный базис τ - n движется по прямой $y_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha + b$

Fig. 2. The movable basis τ - n moves along a straight line $y_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha + b$

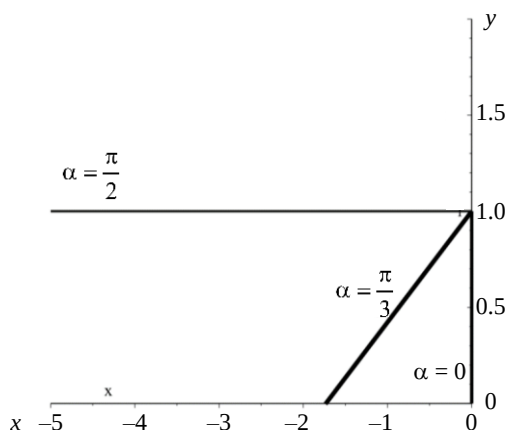


Рис. 3. Траектории движения тела в НСК (выделенные линии) при начальных условиях:

$$X(0)=0, Y(0)=1, X'(0)=0, Y'(0)=0$$

Fig. 3. Trajectories of the body in a non-inertial frame of reference (heavy lines) at initial conditions: $X(0)=0, Y(0)=1, X'(0)=0, Y'(0)=0$

Результат построения подтверждает корректность уравнений (14). Действительно:

I. Если прямая $y_0 = y_0(x_0)$ горизонтальна, $\alpha = 0$, то из вершины движущейся НСК τ - n падение тела видно естественным образом, т.е. по вертикальной прямой.

II. Если прямая $y_0 = y_0(x_0)$ вертикальна, то есть угол α прямой ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), то НСК τ - n движется параллельно падающему телу, и его траектория падения также воспринимается как параллельная прямая.

III. Если прямая $y_0 = y_0(x_0)$ имеет угол наклона, скажем, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то и падение

тела в НСК τ - n видится по наклонной прямой.

Как мы только что убедились, траектории тела в НСК τ - n при ее равномерном движении по заданной прямой не зависят от величины скорости этого движения, поскольку при $v = \text{const}$ НСК, по сути, является инерционной. Рассмотрим теперь такой случай. Пусть теперь $v \neq \text{const}$, но движение происходит по прямой. Тогда снова $K = 0$, а из (12) и (13) следует, что $\mathbf{a}_{\text{mov}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau}$, и уравнение движения в НСК τ - n становится таким: $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{F}m^{-1} - \dot{v}\boldsymbol{\tau}$. С учетом приведенных выше проекций вектора $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ на оси τ - n (14) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g \sin \alpha - \dot{v}, \\ \ddot{Y} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (16)$$

Решения уравнений (16) для двух законов изменения скорости $v(t)$ проиллюстрированы рис. 4, 5.

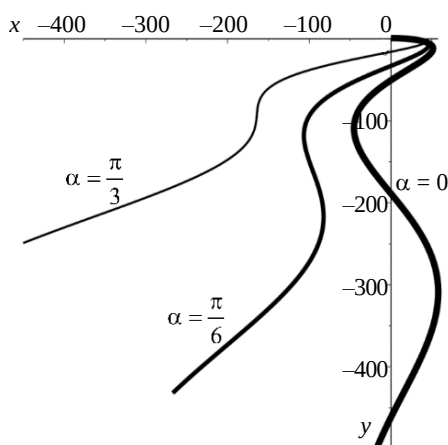


Рис. 4. Изменение скорости подчиняется закону $v = -50 \cos t$, начальные условия $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

Fig. 4. Velocity variation according to the law $v = -50 \cos t$ at initial conditions $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

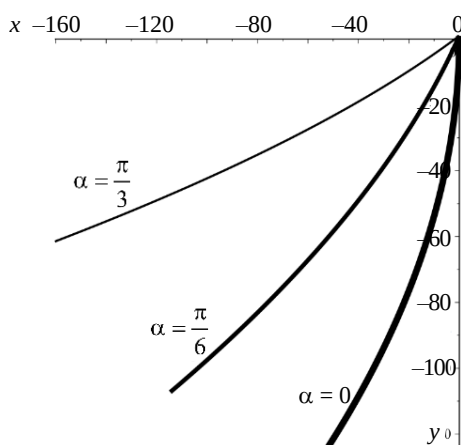


Рис. 5. Изменение скорости подчиняется закону $v = t^3 / 3$. Начальные условия $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

Fig. 5. Velocity variation according to the law $v = t^3 / 3$ at initial conditions $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

Рассмотрим теперь случай, когда НСК τ - n движется по брахистохроне (рис. 6), а сам мгновенный базис τ - n находится в центре масс движущегося по линии наибо́льшего спуска тела.

Поскольку $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}\mathbf{j}$, то, согласно преобразованиям (3), для силы тяжести имеем: $\mathbf{F} = -mg(\sin \alpha \cdot \boldsymbol{\tau} + \cos \alpha \cdot \mathbf{n})$. При этом параметрическое уравнение брахистохроны можно записать следующим образом (см.: [16]):

$$\begin{cases} x_0(\alpha) = \frac{H}{2}(2\alpha - \pi + \sin 2\alpha), \\ y_0(\alpha) = \frac{H}{2}(1 - \cos 2\alpha), \end{cases} \quad (17)$$

где $0,5\pi \leq \alpha \leq \pi$, а зависимость угла α от времени в случае движения по брахистохроне подчиняется линейному закону [7–9,12]

$$\alpha(t) = t\sqrt{0,5gH^{-1}} + 0,5\pi. \quad (18)$$

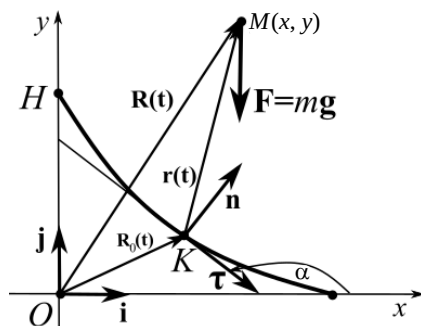


Рис. 6. НСК τ - n движется по брахистохроне, центр которой находится в центре масс тела
Fig. 6. The non-inertial frame of reference τ - n moves along a brachistochrone whose center is located in the center of the body mass

С учетом сказанного параметрическое решение (17) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} x_0(t) = t\sqrt{0,5Hg^{-1}} - 0,5H \sin\left(t\sqrt{0,5Hg^{-1}}\right), \\ y_0(t) = -0,5H \left(1 - \cos\left(t\sqrt{0,5Hg^{-1}}\right)\right), \end{cases} \quad (19)$$

где время движения t подчиняется неравенству

$$0 \leq t \leq \pi\sqrt{0,5Hg^{-1}}. \quad (20)$$

Согласно (19) скорость НСК по брахистохроне определяется в результате зависимости: $v = \sqrt{2gH} \sin\left(0,5t\sqrt{2gH^{-1}}\right)$, а кривизна брахистохроны согласно (2)

и (19) будет подчиняться закону $K(t) = \frac{1}{2H \sin\left(0,5t\sqrt{2gH^{-1}}\right)}$. Факторизация этих

выражений дает

$$vK = \sqrt{0,5gH^{-1}} = \text{const}. \quad (21)$$

Соотношение (21), справедливое только для брахистохроны, оно сильно упрощает уравнения (14). В результате

$$\begin{cases} \ddot{X} = \sqrt{2gH^{-1}}\dot{Y} - 0,5gH^{-1}X, \\ \ddot{Y} = -2g \sin\left(0,5t\sqrt{2gH^{-1}}\right) - \sqrt{2gH^{-1}}\dot{X} - 0,5gH^{-1}Y. \end{cases} \quad (22)$$

Вводя здесь безразмерное время $\tau = 0,5t\sqrt{2gH^{-1}}$, уравнения (22) можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} X'' = 2Y' - X, \\ Y'' = -4H \sin \tau - 2X' - Y, \end{cases} \quad (23)$$

где штрихи означают дифференцирование по τ , которое подчиняется неравенству $0 \leq \tau \leq 0,5\pi$.

Численное решение уравнений (23) проиллюстрировано на рис. 7.

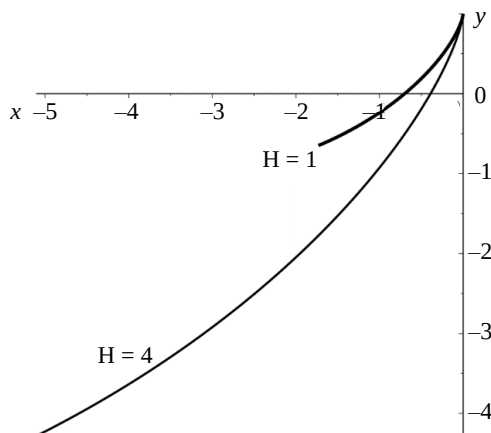


Рис. 7. Решение системы уравнений (14) при начальных условиях $X(0)=0, Y(0)=1, \dot{X}(0)=0, \dot{Y}(0)=0$ демонстрирует, как выглядит свободное падение тела в НСК, движущейся по брахистохроне

Fig. 7. The solution to the system of equations (14) at initial conditions $X(0)=0, Y(0)=1, \dot{X}(0)=0, \dot{Y}(0)=0$ demonstrates the free fall of a body in the non-inertial frame of reference moving along the brachistochrone

Рассмотрим теперь последний пример. Пусть НСК τ - $\mathbf{n}$ равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R (рис. 8). В этом случае $v_0 = \omega R = \text{const}$, $K = \frac{1}{R} = \text{const}$, а движение начинается из точки A против часовой стрелки.

Поскольку угол α меняется непрерывно от 0 до $2\pi k$, то сила тяжести согласно преобразованиям (3) подчиняется соотношению $\mathbf{F} = -mg(\sin \alpha \cdot \boldsymbol{\tau} + \cos \alpha \cdot \mathbf{n})$. Как видно из рис. 8, угол α зависит от времени линейно, и его можно определить в виде $\alpha = \omega t$. Переносное ускорение, согласно формуле (13), имеет в этом случае вид:

$$\mathbf{a}_{\text{mov}} = \boldsymbol{\tau}(\dot{v}_0 - 2v_0 K \dot{Y} + v_0^2 K^2 X) + \mathbf{n}K(v_0^2 + 2v_0 X - v_0^2 KY).$$

Поэтому система уравнений (14) принимает вид:

$$\begin{cases} \ddot{X} = F_{\tau} m^{-1} + 2\omega \dot{Y} - \omega^2 X, \\ \ddot{Y} = F_n m^{-1} - \omega^2 R - 2\omega \dot{X} + \omega^2 Y, \end{cases} \quad (24)$$

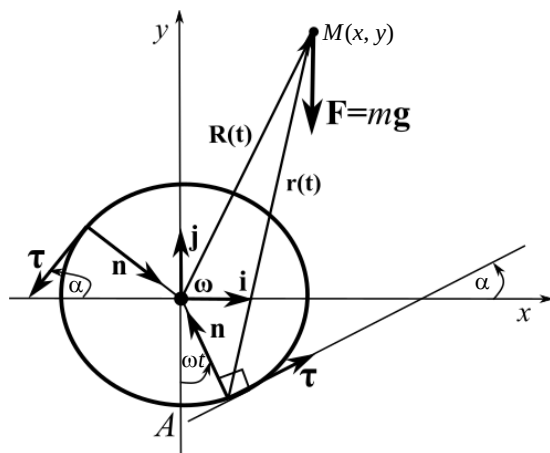


Рис. 8. НСК непрерывным образом движется по окружности, увлекая за собой и угол α
Fig. 8. The non-inertial frame of reference continuously moves around a circumference dragging the angle α with it

С учетом явного выражения для силы тяжести уравнения (24) переходят тогда в следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g \sin \alpha + 2\omega \dot{Y} - \omega^2 X, \\ \ddot{Y} = -g \cos \alpha - \omega^2 R - 2\omega \dot{X} + \omega^2 Y. \end{cases} \quad (25)$$

Результат численного интегрирования уравнений (25) показан на рис. 9.

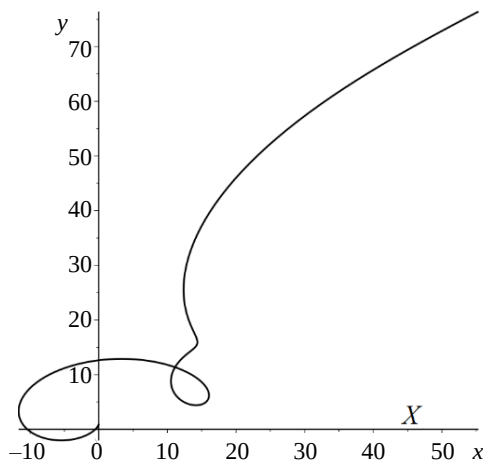


Рис. 9. Траектория тела в системе τ - n , совершающей 1,5 оборота по окружности радиуса $R = 1$ с частотой $\omega = 1$, $0 \leq t \leq 3\pi\omega^{-1}$. Начальные условия $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

Fig. 9. Trajectory of the body in τ - n system making 1.5 turns around the circumference of the radius $R = 1$ with a frequency of $\omega = 1$, $0 \leq t \leq 3\pi\omega^{-1}$ at initial conditions $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

Заключение

В заключение работы обобщим полученные результаты:

1. Получена общая система дифференциальных уравнений, описывающая траекторию движения тела в неинерциальной системе отсчета, движущейся по заданной кривой $y = y(x)$.

2. Проведен анализ полученных уравнений для свободно падающего (без трения) тела в случае, когда неинерциальная система отсчета τ - n движется по прямой, по брахистохроне и по окружности.

3. С помощью компьютерного моделирования построены траектории свободно падающего тела в неинерциальной системе отсчета τ - n , движущейся по прямой, брахистохроне и окружности.

Список источников

1. Ландау Л.Д. Курс теоретической физики : в 10 т. М. : Физматлит, 1988. Т. 1: Механика.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики : в 5 т. М. : Физматлит, 2010. Т. 1: Механика.
3. Стрелков С.П. Механика. М. : Физматлит, 1975.
4. Иванов А.И. О брахистохроне частицы переменной массы с постоянным отношением количества присоединяемых и отделяемых частиц // Доклады АН УССР. Серия А. 1968. С. 683–686.
5. Dupeux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C. The spinning ball spiral // New Journal of Physics. 2010. V. 12. Art. 093004.
6. Denman H.H. Remarks on brachistochrone – tautochrone problems // Amer. J. Phys. 1985. V. 53. P. 224–227.
7. Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашиов И.Н. Численное моделирование динамики околоземных космических объектов искусственного происхождения с использованием параллельных вычислений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4 (16). С. 34–48.
8. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Андиясан А.В., Мамадраимова Н.А. Математическое моделирование движения сферической частицы по наклонной поверхности в сдвиговом потоке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 75–88. doi: 10.17223/19988621/52/8
9. Ashby N., Brittin W.E., Love W.F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction // Amer. J. Phys. 1975. V. 43 (10). P. 902–905
10. Hayen J.C. Brachistochrone with Coulomb friction // Int. J. Non-Linear Mech. 2005. V. 40 (8). P. 1057–1075.
11. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. Ст. 161101. P. 1–5.
12. Гладков С.О., Богданова С.Б. О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 86–98.
13. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases // Journal of Mathematical Sciences. 2020. V. 245 (4). P. 528–537.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Физматлит, 1962. Т. 1.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. : Физматлит, 1967. Т. 3.
16. Богданова С.Б., Григорьевский Н.В. Об одном методическом подходе к описанию свойств циклоиды // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, № 3. С. 47–56.

References

1. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
2. Sivukhin D.V. (2010) *Obshchiy kurs fiziki. Mekhanika* [General course of physics. Mechanics]. Moscow: Fizmatlit.
3. Strelkov S.P. (1975) *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow: Nauka.
4. Ivanov A.I. (1968) O brakhistokhrone chastitsy peremennoy massy s postoyannym otношением количества prisoedinyayemykh i otdelyayemykh chastits [On the brachistochron of a variable-mass particle with a constant ratio of the number of attached and separated particles]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 683–686.
5. Dupeux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C. (2010) The spinning ball spiral. *New Journal of Physics*. 12. Article 093004. doi: 10.1088/1367-2630/12/9/093004
6. Denman H.H. (1985) Remarks on brachistochrone-tautochrone problems. *American Journal Physics*. 53. pp. 224–227. doi: 10.1119/1.14125
7. Bordovitsyna T.V., Aleksandrova A.G., Chuvashov I.N. (2011) Chislennoe modelirovanie dinamiki okolozemnykh kosmicheskikh ob"ektov iskusstvennogo proiskhozhdeniya s ispol'zovaniem parallel'nykh vychisleniy [Numerical simulation of near earth artificial space object dynamics using parallel computation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 16. pp. 34–48.
8. Matvienko O.V., Andropova A.O., Andriasyan A.V., Mamadramova N.A. (2018) Matematicheskoe modelirovanie dvizheniya sfericheskoy chastitsy po naklonnoy poverkhnosti v sdvigovom potoke [Mathematical modelling of the spherical particle motion along an inclined surface in the shear flow]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 75–88. doi: 10.17223/19988621/52/8
9. Ashby N., Brittin W.E., Love W.F., Wyss W. (1975) Brachistochrone with Coulomb friction. *American Journal of Physics*. 43(10). pp. 902–905. doi: 10.1119/1.9976
10. Hayen J.C. (2005) Brachistochrone with Coulomb friction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 40(8). pp. 1057–1075. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2005.02.004
11. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskii fazovyy perekhod v zadache o brachistokhrone [Geometric phase transition in the problem of brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoires of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 161101. pp. 1–5.
12. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2022) O forme brakhistokhrony, vrashchayushcheyasya v vertikal'noy ploskosti [On the shape of the brachistichrone rotating in a vertical plane]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 86–98. doi: 10.17223/19988621/78/7
13. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 245(4). pp. 528–537. doi: 10.1007/s10958-020-04709-0
14. Fikhtengol'ts G.M. (1962) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Moscow: Fizmatlit.
15. Smirnov V.I. (1967) *Kurs vysshey matematiki* [Course of higher mathematics]. Moscow: Fizmatlit.
16. Bogdanova S.B., Grigorevskiy N.V. (2021) Ob odnom metodicheskom podkhode k opisaniyu svoystv tsikloidy [On the one methodological approach to the description of the cycloid properties]. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh – Physics in Higher Education*. 27(3). pp. 47–58.

Сведения об авторах:

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ), Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ), Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

Information about the authors:

Bogdanova Sof'ya B. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

Gladkov Sergey O. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 08.10.2022; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 08.10.2022; accepted for publication 10.07.2023