

Научная статья

УДК 532.613, 532.517

doi: 10.17223/19988621/84/7

Влияние поверхностно-активного вещества на скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости

Евгений Иванович Борзенко¹, Анна Сергеевна Усанина²,
Геннадий Рафаилович Шрагер³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ borzenko@ftf.tsu.ru

² usaninaanna@mail.ru

³ shg@ftf.tsu.ru

Аннотация. Проведено численное исследование скорости всплытия одиночного газового пузырька в вязкой жидкости с растворенным поверхностно-активным веществом (ПАВ) и характеристик гидродинамического и диффузионного процессов на свободной поверхности в условиях доминирования сил вязкого трения над гравитационными силами. Представлена оригинальная методика расчета с учетом сил поверхностного натяжения и эффекта Марангони. Продемонстрированы эффекты влияния концентрации поверхностно-активных веществ на характеристики гидродинамического и диффузионного процессов.

Ключевые слова: газовый пузырек, вязкая жидкость, поверхностно-активное вещество, всплытие, скорость, численное моделирование, параметрические исследования

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10028, <https://rscf.ru/project/22-79-10028/>

Для цитирования: Борзенко Е.И., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Влияние поверхностно-активного вещества на скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 81–92. doi: 10.17223/19988621/84/7

Original article

EFFECT OF SURFACTANT ON BUBBLE RISING VELOCITY IN VISCOUS LIQUID

Evgeniy I. Borzenko¹, Anna S. Usanina², Gennadiy R. Shrager³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ borzenko@ftf.tsu.ru

² usaninaanna@mail.ru

³ shg@ftf.tsu.ru

Abstract. This paper presents a study of the rising velocity of a single gas bubble in a viscous liquid with a dissolved surfactant and the characteristics of hydrodynamic and

diffusion processes on the free surface under conditions of dominance of viscous friction forces over gravitational forces. The original computational method accounting for the surface tension forces and the Marangoni effect caused by the surfactant concentration gradient along the boundary is presented. The mathematical formulation of the problem includes the equations of motion, continuity, and convective diffusion. The boundary conditions on the free surface are written with account for the discontinuity of shear and normal stresses. The surfactant transport on the surface is described in accordance with the Langmuir model. The free surface motion is carried out in compliance with the kinematic condition. The approach is based on the simultaneous use of the finite volume method and the method of invariants, which allows one to explicitly identify a free surface with valid natural boundary conditions. The effect of concentration of surfactants on the characteristics of hydrodynamic and diffusion processes is demonstrated.

Keywords: gas bubble, viscous liquid, surfactant, rising velocity, numerical simulation, parametric studies

Acknowledgments: This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project № 22-79-10028), <https://rscf.ru/project/22-79-10028/>

For citation: Borzenko, E.I., Usanina, A.S., Shrager, G.R. (2023) Effect of surfactant on bubble rising velocity in viscous liquid. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 81–92. doi: 10.17223/19988621/84/7

Введение

Движение газовых пузырьков в вязких средах имеет большое практическое значения для различных отраслей промышленности. Характерной особенностью многих технологических процессов является наличие растворенных в жидкости поверхностно-активных веществ, которые влияют на динамику всплытия газовых включений. Их присутствие приводит к снижению скорости всплытия вследствие эффектов, вызванных неравномерным распределением ПАВ на поверхности раздела [1].

Экспериментальное исследование динамики жидкости в окрестности движущегося пузырька – достаточно сложная и трудоемкая задача, которая ограничивается лишь фиксацией интегральных характеристик, например скорости всплытия и формы поверхности [2–5]. Математическая постановка задачи о движении пузырька в вязкой среде с растворенным ПАВ является достаточно сложной, и ее успешная реализация возможна лишь с помощью численных методов. Численное моделирование процесса всплытия одиночного пузырька при числах Рейнольдса порядка 100 представлено в [6–8]. Модель stagnant-cap, которая разделяет поверхность пузырька на два участка, используется для упрощения математической постановки задачи. В кормовой части пузырька поверхность считается твердой, и на ней выполняется условие прилипания, а на передней части выполняется условие проскальзывания [6, 9, 10]. При использовании такого допущения распределение концентрации ПАВ вдоль поверхности пузырька выбирается на основе экспериментальных данных.

Целью настоящей работы является исследование скорости всплытия одиночного газового пузырька в вязкой жидкости с растворенным ПАВ и характеристик

гидродинамического и диффузионного процессов на свободной поверхности в условиях доминирования сил вязкого трения над гравитационными силами.

Математическая постановка задачи

Рассматривается задача о всплытии воздушного пузырька в вязкой жидкости с растворенным ПАВ. Движение предполагается осесимметричным, а газ в пузырьке – идеальным. Область течения и система координат представлены на рис. 1, а. Движение вязкой жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности, а перенос ПАВ – уравнением конвективной диффузии, которые в векторной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c &= D \nabla^2 c. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, t – время, p – давление, μ – коэффициент динамической вязкости, c – объемная концентрация поверхностно-активного вещества, D – коэффициент объемной диффузии, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения.

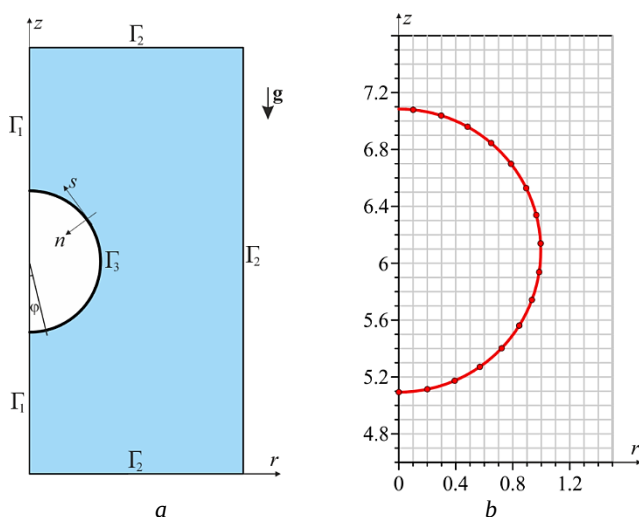


Рис. 1. Область течения (а) и ее дискретизация (б) в окрестности пузырька
Fig. 1. (a) Flow region and (b) its discretization in the vicinity of a bubble

На оси симметрии Γ_1 выполняются условия симметрии, на внешних границах Γ_2 жидкость покоится. При этом границы Γ_2 удалены на достаточное расстояние от пузыря, чтобы избежать их влияния на динамику всплытия. Граничные условия на свободной поверхности включают динамические условия для нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{aligned}
 -p + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} &= -p^* + \sigma(k_1 + k_2), \\
 \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) &= -\nabla_s \sigma,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где p^* – давление газа в пузырьке, σ – коэффициент поверхностного натяжения, k_1, k_2 – главные кривизны свободной поверхности, n, s – нормальное и касательное направление на свободной поверхности соответственно. Движение поверхности описывается кинематическим граничным условием. Значение коэффициента σ определяется по формуле Фрумкина

$$\sigma = \sigma_0 + R_g T c_\infty^\Sigma \ln \left(1 - \frac{c^\Sigma}{c_\infty^\Sigma} \right), \tag{3}$$

где σ_0 – коэффициент поверхностного натяжения для чистой жидкости, R_g – универсальная газовая постоянная, T – температура на границе раздела, c^Σ – поверхностная концентрация ПАВ, c_∞^Σ – поверхностная концентрация насыщения.

Поверхностная концентрация ПАВ рассчитывается в соответствии со следующим уравнением [1]:

$$\frac{\partial c^\Sigma}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\mathbf{u} c^\Sigma) = D^\Sigma \nabla_s^2 c^\Sigma + S^\Sigma. \tag{4}$$

Здесь D^Σ – поверхностный коэффициент диффузии, S^Σ – источниковый член, определяемый по формуле

$$S^\Sigma = -D \nabla c^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n}, \tag{5}$$

где $c^{|\Sigma}$ – объемная концентрация ПАВ вблизи границы, значение которой определяется из условия [1]

$$-D \nabla c^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n} = k_a c^{|\Sigma} (c_\infty^\Sigma - c^\Sigma) - k_d c^\Sigma. \tag{6}$$

В последнем уравнении k_a, k_d – константы скорости адсорбции и десорбции соответственно. Выражение (6) является граничным условием на свободной границе для уравнения конвективной диффузии системы (1).

В начальный момент времени пузырек имеет форму сферы с радиусом R и находится в покоящейся жидкости на глубине H . При этом объемная концентрация ПАВ равна c_0 , а поверхностная концентрация определяется из условия равновесия процесса адсорбции и десорбции

$$c^\Sigma = \frac{k_a c^{|\Sigma} c_\infty^\Sigma}{k_d + k_a c^{|\Sigma}}.$$

Физическое содержание представленной математической модели подробно описано в [11].

Для проведения численного моделирования поставленная задача записывается в безразмерном виде с использованием величины R для масштаба длины и следующих безразмерных переменных:

$$\mathbf{U} = \frac{\mu \mathbf{u}}{\rho g R^2}, \quad \tau = \frac{\rho g R t}{\mu}, \quad P = \frac{p - \rho g H}{\rho g R}, \quad C = \frac{c}{c_0}, \quad \Gamma = \frac{c^\Sigma}{c_\infty^\Sigma}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

Тогда система уравнений (1) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \text{Ga} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) &= -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{e}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\ \text{Pe} \left(\frac{\partial C}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla C \right) &= \nabla^2 C, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{g} / g$.

Граничные условия на свободной поверхности (2) в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} -P + \frac{\partial U_n}{\partial n} &= -P^* + \frac{\bar{\sigma}}{\text{Bo}} (\bar{k}_1 + \bar{k}_2), \\ \left(\frac{\partial U_n}{\partial s} + \frac{\partial U_s}{\partial n} \right) &= -\frac{1}{\text{Bo}} \nabla_s \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (8)$$

Математическая постановка сопряженной задачи (4)–(6) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Pe}^\Sigma \left(\frac{\partial C^\Sigma}{\partial \tau} + \nabla_s \cdot (\mathbf{U} C^\Sigma) \right) &= \nabla_s^2 C^\Sigma + \frac{\bar{S}^\Sigma}{K}, \\ \bar{S}^\Sigma &= -\nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n}, \\ -\nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= \text{Pe Ha K} \left[C^{|\Sigma} (1 - \Gamma) - \frac{1}{\text{La}} \Gamma \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Значение безразмерного коэффициента поверхностного натяжения определяется согласно формуле

$$\bar{\sigma} = 1 + \text{Ma} \ln(1 - \Gamma).$$

Постановка задачи в безразмерных переменных (7)–(9) включает следующие безразмерные числа подобия: $\text{Ga} = \frac{\rho^2 g R^3}{\mu^2}$ – число Галилея, $\text{Pe} = \frac{\rho g R^3}{\mu D}$ – объем-

ное число Пекле, $\text{Bo} = \frac{\rho g R^2}{\sigma_0}$ – число Бонда, $\text{Pe}^\Sigma = \frac{\rho g R^3}{\mu D^\Sigma}$ – поверхностное число

Пекле, $A = \text{Ha K}$, $\text{Ha} = \frac{c_0 k_a \mu}{\rho g R}$ – число Хатта (Hatta), $K = \frac{c_\infty^\Sigma}{c_0 R}$ – безразмерная

длина адсорбции, $\text{La} = \frac{c_0 k_a}{k_d}$ – число Лангмюра, $\text{Ma} = \frac{R_g T c_\infty^\Sigma}{\sigma_0}$ – число Марангони.

Метод расчета

Для решения поставленной задачи используется оригинальная численная методика, в основе которой лежит смешанный эйлерово-лагранжев подход [12]. Система уравнений (7) дискретизируется на фиксированной разнесенной сетке методом контрольного объема. Алгоритм SIMPLE [13] применяется для выполнения разностного аналога уравнения неразрывности. Гидродинамические харак-

теристики на свободной поверхности рассчитываются с использованием метода инвариантов [14]. Свободная поверхность представляется набором маркерных частиц, которые являются расчетными узлами и перемещаются в соответствии с кинематическим условием. Вид расчетной сетки внутри области решения представлен на рис. 1 б.

По мере всплытия пузырька маркеры, расположенные в начальный момент времени равномерно, перемещаются вдоль границы, что приводит к необходимости их перераспределения. Данная процедура проводится с использованием интерполяционного сплайна для сглаживания поверхности [15] с дальнейшим применением метода прогонки для пятидиагональной матрицы [16].

Шаг по времени выбирается в соответствии с формулой

$$\Delta\tau = 0.25 Ga h^2,$$

где h – шаг квадратной сетки по пространству.

Описанная вычислительная методика тестировалась на задаче о всплытии пузырька в двух режимах, при этом значения безразмерных критериев соответствовали всплытию воздушного пузырька в глицерине. Первый режим всплытия пузырька – в жидкости без ПАВ, а второй режим – всплытие с растворенным ПАВ в рамках сформулированной постановки задачи. В обоих случаях устанавливается стационарная скорость всплытия пузырька U_0 . Известно, что для случая малых значений числа Re коэффициент сопротивления C_D определяется из решения

Адамара–Рыбчинского и равен $16/Re$, где $Re = \frac{2\rho R U_0}{\mu}$ – число Рейнольдса.

Проверка аппроксимационной сходимости проводилась по скорости всплытия пузырька в двух режимах и продемонстрирована на рис. 2.

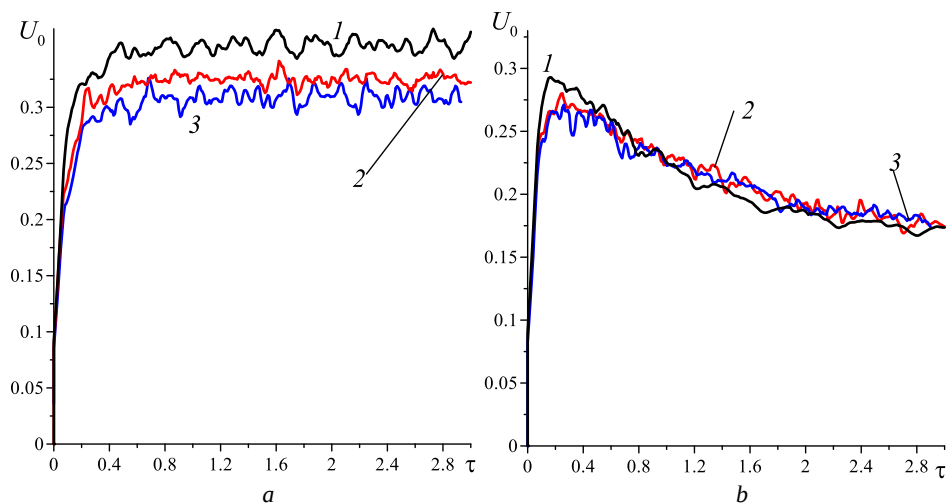


Рис. 2. Зависимость скорости всплытия пузырька от времени ($Ga = 0.1$, $Bo = 0.015$, $Pe = Pe^\Sigma = 103$, $Ma = 0.3$, $A = 0.48$; 1, 2, 3 – $h = 1/10, 1/20, 1/40$): а – $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$, б – $La = 56 \cdot 10^{-3}$

Fig. 2. Time dependence of the bubble rising velocity ($Ga = 0.1$, $Bo = 0.015$, $Pe = Pe^\Sigma = 103$, $Ma = 0.3$, $A = 0.48$; $h = (1) 1/10, (2) 1/20, \text{ and } (3) 1/40$): (a) $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$ and (b) $La = 56 \cdot 10^{-3}$

Колебательный характер поведения кривых сходимости связан с такими особенностями вычислительной технологии, как перестройка расчетных сеток внутри области и на поверхности раздела, возникновение нерегулярных узлов вблизи свободной границы и т.п.

Результаты расчетов

Скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости устанавливается, когда гравитационные силы уравниваются гидродинамическими силами. Силы гидродинамического сопротивления определяются соотношением нормальных и касательных напряжений на поверхности раздела. Для пузырька, всплывающего в чистой жидкости, справедливо допущение о нулевых касательных напряжениях. Наличие растворенного в жидкости ПАВ приводит к формированию на поверхности движущегося пузыря слоя с неоднородным распределением концентрации ПАВ. Как следствие, возникают ненулевые касательные напряжения, вызванные эффектом Марангони.

Рассмотрим процесс установления скорости всплытия пузырька в зависимости от числа Лангмюра La (рис. 3, а) при прочих равных ($Ga = 0.1$, $Bo = 0.015$, $Pe = Pe^{\Sigma} = 103$, $Ma = 0.3$, $A = 0.48$), что соответствует изменению начальной концентрации ПАВ c_0 . Малость Ga обеспечивает практически сферическую форму поверхности [17]. Значения физико-химических констант модели соответствуют паре воздух–глицерин, при этом пузырек имеет миллиметровые размеры. Для низких значений числа La , что соответствует малой концентрации, наблюдается достаточно быстрый выход скорости всплытия на стационарное значение. Увеличение La приводит к формированию максимума на кривой, при этом стационарное значение скорости уменьшается с ростом La .

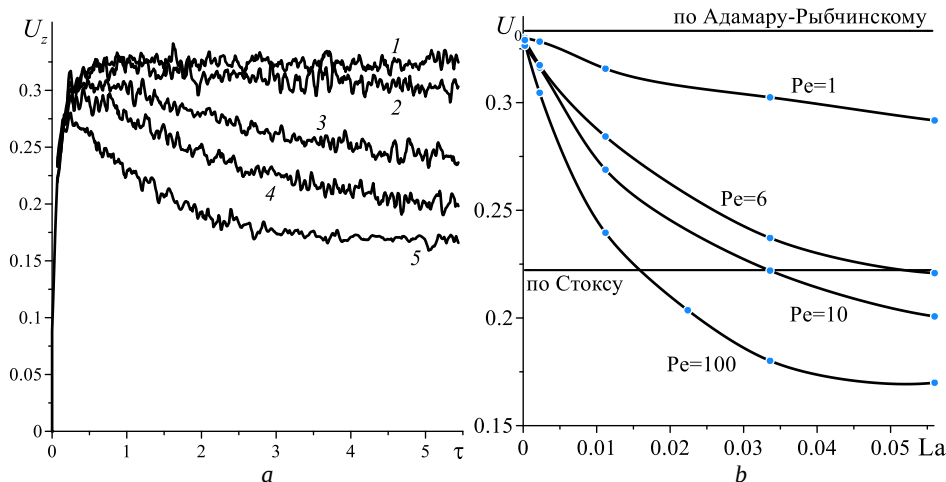


Рис. 3. Зависимость скорости всплытия пузырька от времени (а): 1, 2, 3, 4, 5 – $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$, $2.2 \cdot 10^{-3}$, $11 \cdot 10^{-3}$, $22 \cdot 10^{-3}$, $56 \cdot 10^{-3}$; зависимость установившейся скорости всплытия от параметра La (б)

Fig. 3. (a) Bubble rising velocity versus time: $La =$ (1) $0.22 \cdot 10^{-3}$, (2) $2.2 \cdot 10^{-3}$, (3) $11 \cdot 10^{-3}$, (4) $22 \cdot 10^{-3}$, and (5) $56 \cdot 10^{-3}$; (b) steady rising velocity versus parameter La

На начальной стадии распределение концентрации вдоль свободной границы имеет практически однородный характер, поэтому динамика всплытия близка к случаю чистой жидкости. Однако с течением времени происходит перераспределение поверхностно-активного вещества вдоль границы, что приводит к проявлению эффектов, описанных выше. Аналогичный характер установления скорости всплытия пузырька в жидкости с ПАВ наблюдается в эксперименте [2, 4]. Эволюция профиля поверхностной концентрации представлена на рис. 4, *a*. Угол φ отсчитывается от оси z , ноль соответствует нижней части пузыря (см. рис 1, *a*). С течением времени распределение Γ устанавливается, в нижней части формируется зона повышенной концентрации вследствие сноса ПАВ потоком вязкой жидкости.

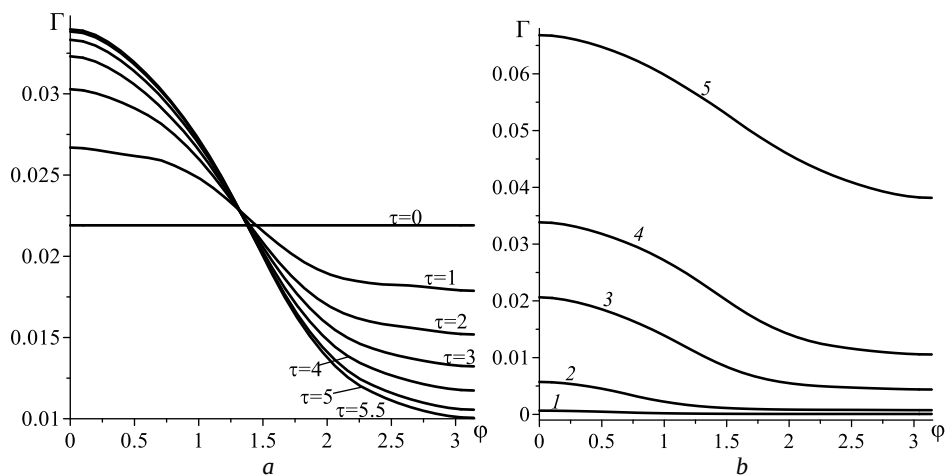


Рис. 4. Концентрация ПАВ вдоль границы от φ : (a) $La = 0.022$; (b) $La = 0.22 \cdot 10^{-3}, 2.2 \cdot 10^{-3}, 11 \cdot 10^{-3}, 22 \cdot 10^{-3}, 56 \cdot 10^{-3}$ — кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответственно, $\tau = 5$

Fig. 4. Surfactant concentration along the boundary versus φ : (a) $La = 0.022$; (b) $La = (1) 0.22 \cdot 10^{-3}, (2) 2.2 \cdot 10^{-3}, (3) 11 \cdot 10^{-3}, (4) 22 \cdot 10^{-3},$ and (5) $56 \cdot 10^{-3}$ at $\tau = 5$

Зависимость установившейся скорости всплытия от числа La представлена на рис. 3, *b* для различных значений параметра Re . Видно, что с ростом числа Лангмюра скорость монотонно убывает и выходит на постоянное значение. Такое поведение объясняется характером кривых установившегося распределения концентрации на поверхности пузырька (рис. 4, *b*). С ростом La растут абсолютные значения концентрации, при этом ее градиент вдоль поверхности, который определяет значение касательного напряжения, для случаев $La = 22 \cdot 10^{-3}, 56 \cdot 10^{-3}$ при $Re = 100$ практически совпадает, как следствие установившиеся значения скорости всплытия отличаются слабо. Уменьшение Re приводит к падению роли конвективного переноса вещества и, соответственно, меньшим градиентам концентрации ПАВ вдоль поверхности, что, в свою очередь, снижает коэффициент сопротивления.

Распределения аксиальной и радиальной скоростей жидкости на свободной поверхности представлены на рис. 5. Для малого значения La форма профилей скорости соответствует решению Адамара–Рыбчинского (кривая 1). Увеличение концентрации ПАВ в жидкости приводит к формированию касательного напря-

жения на поверхности, пропорционального градиенту концентрации, которое препятствует движению частиц вдоль поверхности к кормовой части пузырька. В результате при $La = 56 \cdot 10^{-3}$ радиальная скорость близка к нулю, а профиль аксиальной – практически однородный. Пузырь всплывает как твердое тело. Значение установившейся скорости всплытия при этом ниже, чем по Стоксу, что, по-видимому, объясняется зависимостью лапласовского давления на границе раздела от концентрации ПАВ.

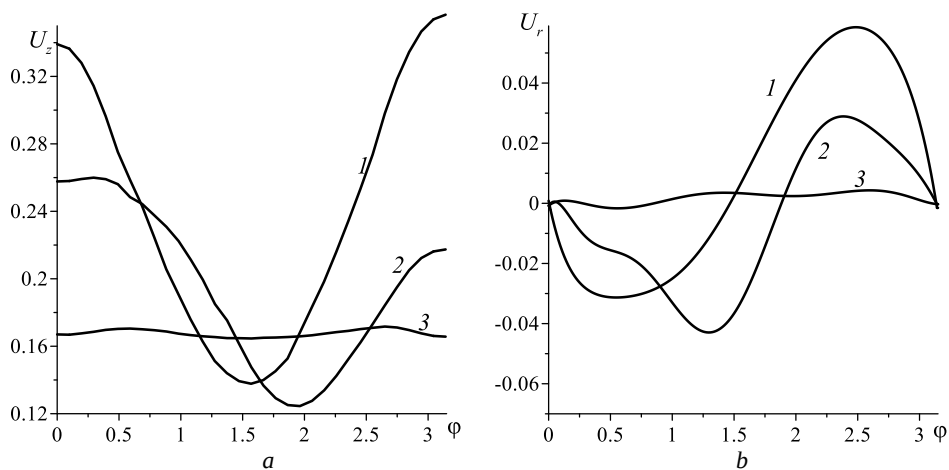


Рис. 5. Распределение скоростей U_z и U_r вдоль поверхности в момент $t = 5$:

1, 2, 3 – $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$, $11 \cdot 10^{-3}$, $56 \cdot 10^{-3}$

Fig. 5. Distribution of velocities U_z and U_r along the surface at a time instant of $t=5$:

$La = (1) 0.22 \cdot 10^{-3}$, (2) $11 \cdot 10^{-3}$, and (3) $56 \cdot 10^{-3}$

На верхней части пузыря коэффициент поверхностного натяжения больше, чем на нижней, следовательно, давление на верхней части больше, чем на нижней, что приводит к дополнительному сопротивлению по сравнению со случаем всплытия твердой сферы.

Заключение

Проведено численное исследование влияния ПАВ на динамику всплытия газового пузырька в вязкой жидкости в условиях доминирования сил вязкого трения над гравитационными силами ($Ga = 0.1$). Физическая постановка задачи предполагает формирование поверхностного слоя на свободной границе за счет процессов адсорбции и десорбции ПАВ. Основу математического описания рассматриваемого процесса образуют уравнения Навье–Стокса, неразрывности, уравнения конвективной диффузии ПАВ в объеме жидкости и на поверхности раздела. Вычислительная технология включает использование метода контрольного объема для расчета характеристик внутри области и метода инвариантов для определения гидродинамических характеристик свободной поверхности. В результате параметрических исследований получены зависимости установив-

шейся скорости всплытия пузырька от определяющих параметров ($Pe = 1-100$, $La = 0.22 \cdot 10^{-3}-56 \cdot 10^{-3}$). Установлено, что эффект Марангони, вызванный зависимостью поверхностного натяжения от концентрации ПАВ, замедляет скорость всплытия по сравнению со случаем чистой жидкости, и при некоторых значениях параметров эта скорость может быть меньше таковой для стоковского режима.

Список источников

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М. : Физматлит, 1959. 700 с.
2. Pang M., Jia M., Fei Y. Experimental study on effect of surfactant and solution property on bubble rising motion // J. Mol. Liq. 2023. V. 375. Art. 121390. doi: 10.1016/j.molliq.2023.121390
3. Fayzi P., Bastani D., Lotfi M. A note on the synergistic effect of surfactants and nanoparticles on rising bubble hydrodynamics // Chem. Engineering & Processing: Process Intensification. 2020. V. 155. Art. 108068. doi: 10.1016/j.cep.2020.108068
4. Luo Y. et al. Experimental Study of the Effect of the Surfactant on the Single Bubble Rising in Stagnant Surfactant Solutions and a Mathematical Model for the Bubble Motion // Ind. Eng. Chem. Res. 2022. V. 61 (26). P. 9514–9527. doi: 10.1021/acs.iecr.2c01620
5. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. Динамика всплытия пузырька в присутствии поверхностно-активных веществ // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 142–151. doi: 10.7868/S0568528116020067
6. Fleckenstein S., Bothe D. Simplified modeling of the influence of surfactants on the rise of bubbles in VOF-simulations // Chem. Eng. Sci. 2013. V. 102. P. 514–523. doi: 10.1016/j.ces.2013.08.033
7. Pesci C. et al. Computational analysis of single rising bubbles influenced by soluble surfactant // J. Fluid Mech. 2018. V. 856. P. 709–763. doi: 10.1017/jfm.2018.723
8. Matsumoto Y., Uda T., Takagi S. The Effect of Surfactant on Rising Bubbles // IUTAM Symposium on Computational Approaches to Multiphase Flow. Dordrecht : Springer Netherlands, 2004. P. 311–321. doi: 10.1007/1-4020-4977-3_31
9. He Z., Maldarelli C., Dagan Z. The size of stagnant caps of bulk soluble surfactant on the interfaces of translating fluid droplets // J. Colloid Interface Sci. 1991. V. 146 (2). P. 442–451. doi: 10.1016/0021-9797(91)90209-Q
10. Kentheswaran K. et al. Direct numerical simulation of gas-liquid mass transfer around a spherical contaminated bubble in the stagnant-cap regime // Int. J. Heat Mass Transf. 2022. V. 198. Art. 123325. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123325
11. Manikantan H., Squires T.M. Surfactant dynamics: hidden variables controlling fluid flows // J. Fluid Mech. 2020. V. 892. P. 1–115. doi: 10.1017/jfm.2020.170
12. Якутенок В.А., Борзенко Е.И. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на основе метода SIMPLE // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 3. P. 52–58.
13. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Pub. Corp., 1980. 197 p.
14. Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Доклады АН СССР. 1974. Т. 217, № 2. P. 295–298.
15. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 p.
16. Askar S.S., Karawia A.A. On Solving Pentadiagonal Linear Systems via Transformations // Math. Probl. Eng. 2015. V. 2015. Art. 232456. P. 1–9. doi: 10.1155/2015/232456
17. Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities // J. Fluid Mech. 1981. V. 105 (1). P. 61–85. doi: 10.1017/S002211208100311X

References

1. Levich V.G. (1962) *Physicochemical Hydrodynamics*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
2. Pang M., Jia M., Fei Y. (2023) Experimental study on effect of surfactant and solution property on bubble rising motion. *Journal of Molecular Liquids*. 375. Article 121390. doi: 10.1016/j.molliq.2023.121390
3. Fayzi P., Bastani D., Lotfi M. (2020) A note on the synergistic effect of surfactants and nanoparticles on rising bubble hydrodynamics. *Chemical Engineering and Processing*. 155. Article 108068. doi: 10.1016/j.cep.2020.108068
4. Luo Y., Wang Z., Zhang B., Guo K., Zheng L., Xiang W., Liu H., Liu C. (2022) Experimental study of the effect of the surfactant on the single bubble rising in stagnant surfactant solutions and a mathematical model for the bubble motion. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 61(26). pp. 9514–9527. doi: 10.1021/acs.iecr.2c01620
5. Arkhipov V.A., Vasenin I.M., Usanina A.S. (2016) Dynamics of bubble rising in the presence of surfactants. *Fluid Dynamics*. 51(2). pp. 266–274. doi: 10.1134/S0015462816020137
6. Fleckenstein S., Bothe D. (2013) Simplified modeling of the influence of surfactants on the rise of bubbles in VOF-simulations. *Chemical Engineering Science*. 102. pp. 514–523. doi: 10.1016/j.ces.2013.08.033
7. Pesci C., Weiner A., Marschall H., Bothe D. (2018) Computational analysis of single rising bubbles influenced by soluble surfactant. *Journal of Fluid Mechanics*. 856. pp. 709–763. doi: 10.1017/jfm.2018.723
8. Matsumoto Y., Uda T., Takagi S. (2004) The effect of surfactant on rising bubbles. *IUTAM Symposium on Computational Approaches to Multiphase Flow*. Dordrecht: Springer Netherlands. pp. 311–321. doi: 10.1007/1-4020-4977-3_31
9. He Z., Maldarelli C., Dagan Z. (1991) The size of stagnant caps of bulk soluble surfactant on the interfaces of translating fluid droplets. *Journal of Colloid and Interface Science*. 146(2). pp. 442–451. doi: 10.1016/0021-9797(91)90209-Q
10. Kenthewaran K., Dietrich N., Tanguy S., Lalanne B. (2022) Direct numerical simulation of gas-liquid mass transfer around a spherical contaminated bubble in the stagnant-cap regime. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 198. Article 123325. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123325
11. Manikantan H., Squires T.M. (2020) Surfactant dynamics: hidden variables controlling fluid flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 892. pp. 1–115. doi: 10.1017/jfm.2020.170
12. Yakutenok V.A., Borzenko E.I. (2007) Chislennoe modelirovanie techeniy vyazkoy neszhi-maemoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu na osnove metoda SIMPLE [Numerical simulation flows of incompressible viscous fluid with free surface based on SIMPLE method]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 19(3). pp. 52–58.
13. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation.
14. Vasenin I.M., Sidonskiy O.B., Shrager G.R. (1974) Chislennoe reshenie zadachi o dvizhenii vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu [Numerical solution to the problem of viscous fluid motion with a free surface]. *Doklady AN SSSR*. 217(2). pp. 295–298.
15. Zavvalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. (1980) *Metody splayn-funktsiy* [Spline function methods]. Moscow: Nauka.
16. Askar S.S., Karawia A.A. (2015) On solving pentadiagonal linear systems via transformations. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Article 232456. pp. 1–9. doi: 10.1155/2015/232456
17. Bhaga D., Weber M.E. (1981) Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities. *Journal of Fluid Mechanics*. 105(1). pp. 61–85. doi: 10.1017/S002211208100311X

Сведения об авторах:

Борзенко Евгений Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Усанина Анна Сергеевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: usaninaanna@mail.ru

Шрагер Геннадий Рафаилович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Borzenko Evgeniy I. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Usanina Anna S. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usaninaanna@mail.ru

Shrager Gennadiy R. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 30.03.2023; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 30.03.2023; accepted for publication 10.07.2023