

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/84/10

Метод разделения переменных для задач линейно вязкоупругого анизотропного тела

Александр Андреевич Светашков¹,
Николай Амвросьевич Куприянов², Михаил Сергеевич Павлов³

^{1, 2, 3} *Томский политехнический университет, Томск, Россия*

³ *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *svetashkov@tpu.ru*

² *kupriyanov@tpu.ru*

³ *mmpavlov@tpu.ru*

Аннотация. В современной технике широко применяются композиционные материалы. Их особенностями являются вязкоупругие свойства связующего и компонент, а также анизотропия и неоднородность механических свойств. Последнее многократно усложняет прочностные расчеты. Для решения задач линейно вязкоупругого тела, обладающего свойствами анизотропии, сформулирован обобщенный принцип соответствия, согласно которому для вязкоупругого решения константы упругой анизотропии достаточно заменить некоторыми функциями времени.

Ключевые слова: эффективные модули лагранжеевского и кастильяновского типов, вариационная задача, анизотропия, ортотропия, интегральные операторы

Для цитирования: Светашков А.А., Куприянов Н.А., Павлов М.С. Метод разделения переменных для задач линейно вязкоупругого анизотропного тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 123–138. doi: 10.17223/19988621/84/10

Original article

The method of separation of variables for linear viscoelastic anisotropic body problems

Aleksandr A. Svetashkov¹, Nikolay A. Kupriyanov², Mikhail S. Pavlov³

^{1, 2, 3} *Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

³ *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *svetashkov@tpu.ru*

² *kupriyanov@tpu.ru*

³ *mmpavlov@tpu.ru*

Abstract. Nowadays, polymers are widely used in various fields. Such materials often exhibit viscoelastic properties. Engineering analysis considering viscoelasticity is laborious

and requires certain expertise. This paper proposes a method for solving linear viscoelastic problems in a simpler way and presents a variant of the solution extension to an anisotropic case.

The Volterra correspondence principle allows one to analyze viscoelastic bodies on the basis of the analytical solution like an elastic problem. The developed method is described in a similar way. It allows determining of some functions of time and material constants whose values at a certain point in time can be used as elastic constants. The solutions to these two problems are identical. To substantiate this statement, the authors consider the conditions for maximum equivalence of specific potential energy functionals of strain and stress (for the cases of kinematic and force boundary conditions, respectively) of viscoelastic and reference elastic media. The functions satisfying these conditions have been found, and a new method for solving the problems of linear viscoelasticity of an anisotropic body has been shown using several examples.

Keywords: effective modules of Lagrange and Castilian types, variational problem, anisotropy, orthotropy, integral operators

For citation: Svetashkov, A.A., Kupriyanov, N.A., Pavlov, M.S. (2023) The method of separation of variables for linear viscoelastic anisotropic body problems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 123–138. doi: 10.17223/19988621/84/10

Введение

Начало математического анализа вязкоупругих сред было положено Максвеллом, который сформулировал закон деформирования, зависящего от времени, в дифференциальном виде [1]. Далее Больцман и Вольтерра определили общий математический аппарат для описания линейной ползучести [2–4]. В течение XX столетия вопрос математического описания вязкоупругих свойств материалов был существенно развит [5, 6].

Практически единственным аналитическим способом точного решения прикладных задач остается принцип соответствия (Вольтерра). Главной проблемой для практического использования данного принципа, помимо вычислительной сложности, является необходимость иметь соответствующее упругое решение. В свою очередь, число аналитически решенных упругих задач ограничено. В связи с этим разработано большое число приближенных, в первую очередь численных, методов.

Ильющин [7], Шепери [8], сформулировали способы решения задач линейной вязкоупругости, основанные на преобразовании Лапласа и получившие широкое распространение в том числе и для задач, учитывающих анизотропию свойств анализируемой среды. Например, Wu и соавт. [9] используют подобный подход для анализа динамического отклика сваи в трансверсально изотропном слоистом грунте.

Калоеров и Кошкин в работе [10] развивают метод малого параметра для задач изгиба анизотропных вязкоупругих пластин.

Каминский и Селиванов в [11] рассматривают метод ветвящихся цепных дробей применительно к линейно вязкоупругим анизотропным телам.

Хольцапфель и Гассер [12] разработали способ моделирования вязкоупругих армированных волокнами композитов методом конечных элементов, опираясь в том числе на работу Симо [13], где, в свою очередь, была представлена трехмерная вязкоупругая модель с конечными деформациями, не ограниченная условием изотропии.

В задаче о деформации плоского ортотропного тела [14] использован метод представления ядер вязкоупругой ортотропии в виде, в котором временная составляющая каждого из ядер одинакова. Разница между ядрами определяется только наличием постоянных множителей. Аналогичный метод применили и М.Н.М. Аллам, Б.Е. Победря [15].

Цель настоящей работы – развитие и обобщение метода разделения переменных [16] на случай вязкоупругих материалов, обладающих свойствами анизотропии.

1. Постановка задачи

Рассмотрим определяющие уравнения нестарееющего линейно вязкоупругого тела, обладающего свойствами анизотропии общего вида:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl}, \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь по индексам, заключенным в круглые скобки, производится суммирование от 1 до 3. Если же индексы заключены в угловые скобки, то суммирование не производится. Оператор релаксации зададим следующим образом:

$$\Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau, \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle.$$

Здесь $R_{ijkl}(t)$ – функции релаксации, обладающие следующими свойствами симметрии:

$$R_{ijkl}(t) = R_{jikl}(t) = R_{ijlk}(t).$$

Кроме того, имеют место соотношения [17]

$$R_{ijkl}(t) = R_{klij}(t),$$

$$R_{ijkl}(0) = G_{ijkl}^0.$$

Здесь G_{ijkl}^0 – тензор упруго-мгновенных постоянных. Число независимых функций памяти (и, следовательно, упругих постоянных) равняется 21.

Физические уравнения, разрешенные относительно напряжений, имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}, \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

$$C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl} \equiv \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau.$$

Свойства симметрии тензора функций ползучести $K_{ijkl}(t)$ аналогичны свойствам соответствующих функций релаксации $R_{ijkl}(t)$.

Система уравнений равновесия в перемещениях имеет следующий вид:

$$\left[C_{ijkl}^* u_{k,l} \right]_{,j} + X_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j, k, l = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь запятая перед индексом соответствует дифференцированию по пространственной координате. Например:

$$u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad \langle k, l = 1, 2, 3 \rangle,$$

здесь

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

Граничные условия в напряжениях имеют вид:

$$C_{ijkl}^* u_{k,l} n_j \Big|_{\Sigma_1} = S_i^0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j, k, l = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Здесь S_i^0 – граничные нагрузки, Σ_1 – часть границы Σ , на которой заданы напряжения, n_j – направляющие косинусы нормали к границе.

Граничные условия в перемещениях:

$$\bar{u} \Big|_{\Sigma_2} = \bar{u}^0,$$

где \bar{u}^0 – вектор граничных перемещений, Σ_2 – часть границы тела Σ , на которой заданы перемещения.

2. Вывод выражений эффективных модулей кастильянового типа

Как и в случае изотропного вязкоупругого тела [16], задача определения эффективных модулей анизотропии разбивается на две. Первая задача заключается в нахождении модулей, дающих решение граничной задачи II рода, когда на границе заданы напряжения. Вторая задача состоит в определении эффективных по времени модулей для граничных задач I рода, при заданных на границе перемещениях.

Для первого случая эффективные модули носят название эффективных по времени модулей кастильянового типа, для второго – эффективных по времени модулей лагранжевого типа. С целью простоты изложения в дальнейших рассуждениях будем опускать фразу «по времени» в ссылках на термин «эффективные модули».

Рассмотрим сначала определение эффективных модулей кастильянового типа граничной задачи II рода для вязкоупругих тел, обладающих свойствами анизотропии общего вида. Без ограничения общности будем полагать, что граничные напряжения можно представить в виде произведения заданной функции координат на заданную функцию времени:

$$\sigma_{ij} n_j = S_i^0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Не ограничивая общности, будем полагать, что

$$S_i^0 = S_{ik}^0(\bar{x}) H_{ik}(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

где n – количество членов в разложении граничной нагрузки.

Заданные функции времени $H_{ik}(t)$ будем считать положительными и отличными от 0 на интервале $(0; T]$, где T – граница временного интервала, на котором отыскивается решение граничной задачи.

Для формулировки вариационной задачи нам понадобятся определяющие уравнения упругой среды сравнения с модулями, зависящими от времени. Зададим их в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij}^0(t) = P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t), \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Здесь $P_{ijkl}(t)$ – искомые эффективные модули, вид которых пока неизвестен.

Запишем выражения функционалов удельных потенциальных энергий напряжений для сред с определяющими уравнениями (1), (2):

$$P(\dot{\sigma}_{ij}) = \int_0^T \dot{\sigma}_{ij}(t) \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} dt, \quad (5)$$

$$P_0(\dot{\sigma}_{ij}) = \int_0^T \dot{\sigma}_{ij}(t) P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t) dt, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Функционалы (5), (6) могут быть приведены к положительно-определенному виду [18]. Существуют постоянные $M > m > 0$, для которых будут справедливы следующие неравенства:

$$mP_0(\dot{\sigma}_{ij}) \leq P(\dot{\sigma}_{ij}) \leq MP_0(\dot{\sigma}_{ij}). \quad (7)$$

Константы M, m можно найти путем решения двух вариационных задач на условный экстремум:

$$m = \min P(\dot{\sigma}_{ij}), \quad M = \max P(\dot{\sigma}_{ij}),$$

$$P_0(\dot{\sigma}_{ij}) = 1, \quad P_0(\dot{\sigma}_{ij}) = 1.$$

Перейдем от решений задач на условный экстремум к решению задачи на безусловный экстремум для функционала

$$P_1(\dot{\sigma}_{ij}) = P(\dot{\sigma}_{ij}) - \mu P_0(\dot{\sigma}_{ij}), \quad (8)$$

введя множитель Лагранжа μ .

Варьирование функционала (8) по $\dot{\sigma}_{ij}$ даст нам необходимые условия экстремума

$$\Gamma_{1111}^* \sigma_{11} + \Gamma_{1122}^* \sigma_{22} + \Gamma_{1133}^* \sigma_{33} - \mu [P_{1111}(t) \sigma_{11}(t) + P_{1122}(t) \sigma_{22}(t) + P_{1133}(t) \sigma_{33}(t)] = 0, \quad (9)$$

$$\Gamma_{2211}^* \sigma_{11} + \Gamma_{2222}^* \sigma_{22} + \Gamma_{2233}^* \sigma_{33} - \mu [P_{2211}(t) \sigma_{11}(t) + P_{2222}(t) \sigma_{22}(t) + P_{2233}(t) \sigma_{33}(t)] = 0, \quad (10)$$

$$\Gamma_{3311}^* \sigma_{11} + \Gamma_{3322}^* \sigma_{22} + \Gamma_{3333}^* \sigma_{33} - \mu [P_{3311}(t) \sigma_{11}(t) + P_{3322}(t) \sigma_{22}(t) + P_{3333}(t) \sigma_{33}(t)] = 0, \quad (11)$$

$$\Gamma_{1212}^* \sigma_{12} - \mu P_{1212}(t) \sigma_{12}(t) = 0, \quad (12)$$

$$\Gamma_{1313}^* \sigma_{13} - \mu P_{1313}(t) \sigma_{13}(t) = 0, \quad (13)$$

$$\Gamma_{2323}^* \sigma_{23} - \mu P_{2323}(t) \sigma_{23}(t) = 0. \quad (14)$$

Перепишем уравнения системы (9)–(14) для нормальных напряжений в следующем виде:

$$[\Gamma_{1111}^* - \mu P_{1111}(t)] \sigma_{11} + [\Gamma_{1122}^* - \mu P_{1122}(t)] \sigma_{22} + [\Gamma_{1133}^* - \mu P_{1133}(t)] \sigma_{33} = 0, \quad (15)$$

$$[\Gamma_{2211}^* - \mu P_{2211}(t)] \sigma_{11} + [\Gamma_{2222}^* - \mu P_{2222}(t)] \sigma_{22} + [\Gamma_{2233}^* - \mu P_{2233}(t)] \sigma_{33} = 0, \quad (16)$$

$$[\Gamma_{3311}^* - \mu P_{3311}(t)] \sigma_{11} + [\Gamma_{3322}^* - \mu P_{3322}(t)] \sigma_{22} + [\Gamma_{3333}^* - \mu P_{3333}(t)] \sigma_{33} = 0. \quad (17)$$

Условия нормировки:

$$\int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(t) P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t) dt = 1, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (18)$$

Кроме того, в точке стационарности (8) мы можем записать еще одно уравнение:

$$\int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(t) \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} dt = \mu, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (19)$$

Рассмотрим вначале левое неравенство (7). Из него видно, что $\mu_1 = m = 1$ есть наибольшее значение собственного числа μ , удовлетворяющее этому неравенству. Аналогично $\mu_2 = M = 1$ есть наименьшее значение μ , удовлетворяющее правому неравенству (7). На этом основании положим в уравнениях (9)–(17) и (19) $\mu = 1$ в качестве условия максимальной энергетической близости функционалов (5), (6), тогда разность (18) и (19) даст нам

$$\int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(t) [\Gamma_{ijkl}^* - P_{ijkl}(t)] \sigma_{kl} dt = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3).$$

Отсюда следует

$$[\Gamma_{ijkl}^* - P_{ijkl}(t)] \sigma_{kl} = 0, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (20)$$

Заметим, что система необходимых условий экстремума на (9)–(17) выполняется при подстановке в нее соотношений (20). Из (20) имеем следующие выражения эффективных модулей:

$$P_{ijkl}(t) = \frac{\Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl}}{\sigma_{kl}(t)}, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (21)$$

Полагая в (21)

$$\sigma_{kl} = \tilde{\sigma}_{kl}(\bar{x}) H(t),$$

где $H(t)$ – заданная функция времени, получим

$$P_{ijkl}(t) = \frac{\Gamma_{ijkl}^* H}{H(t)}, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (22)$$

Модули, определяемые соотношениями (22), будем называть эффективными модулями кастильянового типа. В последующем тексте будем отличать эффективные модули кастильянового типа с помощью верхнего индекса c . Таким образом, соотношения (22) можно записать следующим образом:

$$P_{ijkl}^c(t) = \frac{\Gamma_{ijkl}^* H}{H(t)}, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle.$$

3. Эффективные модули лагранжевого типа

Рассмотрим вывод выражений эффективных модулей лагранжевого типа. Процедуру вывода проведем на основании преобразований определяющих уравнений. В качестве примера возьмем трансверсально изотропную вязкоупругую среду с определяющими уравнениями, разрешенными относительно напряжений. В цилиндрических координатах имеем

$$\sigma_r = A_{11}^* \varepsilon_r + A_{12}^* \varepsilon_\theta + A_{13}^* \varepsilon_z, \quad (23)$$

$$\sigma_\theta = A_{12}^* \varepsilon_r + A_{11}^* \varepsilon_\theta + A_{13}^* \varepsilon_z, \quad (24)$$

$$\sigma_z = A_{13}^* (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + A_{33}^* \varepsilon_z, \quad (25)$$

$$\tau_{0z} = A_{44}^* \gamma_{0z}, \quad \tau_{rz} = A_{44}^* \gamma_{rz}, \quad \tau_{r0} = \frac{1}{2} (A_{11}^* - A_{12}^*) \gamma_{r0}. \quad (26)$$

В соответствии с граничными условиями в перемещениях I рода будем искать решение в виде:

$$u(\bar{x}, t) = \tilde{u}(x) F(t). \quad (27)$$

Покажем, что подстановка (27) в (23)–(26) преобразует определяющие уравнения трансверсально изотропного вязкоупругого тела в соответствующие уравнения упругого тела с модулями, являющимися некоторыми функциями времени. Рассмотрим преобразование на примере определяющего уравнения для радиального напряжения σ_r , входящего в (23). Поскольку деформации, соответствующие (27), можно представить как

$$\varepsilon_r(\bar{x}, t) = \tilde{\varepsilon}_r(\bar{x}) F(t),$$

$$\varepsilon_0(\bar{x}, t) = \tilde{\varepsilon}_0(\bar{x}) F(t),$$

$$\varepsilon_z(\bar{x}, t) = \tilde{\varepsilon}_z(\bar{x}) F(t),$$

то, образуя свертки операторов A_{11}^* , A_{12}^* , A_{13}^* с функцией $F(t)$, мы получим

$$\sigma_r = A_{11}^* F \tilde{\varepsilon}_r + A_{12}^* F \tilde{\varepsilon}_0 + A_{13}^* F \tilde{\varepsilon}_z.$$

Выделим в последнем соотношении

$$g_{11}^l(t) = \frac{A_{11}^* F}{F(t)}, \quad g_{12}^l(t) = \frac{A_{12}^* F}{F(t)}, \quad g_{13}^l(t) = \frac{A_{13}^* F}{F(t)}. \quad (28)$$

В результате получим

$$\sigma_r = g_{11}^l(t) \tilde{\varepsilon}_r + g_{12}^l(t) \tilde{\varepsilon}_0 + g_{13}^l(t) \tilde{\varepsilon}_z \quad (29)$$

Следует отметить, что деформации в правой части (29) представляют собой определяющие уравнения упругого тела.

Модули $g_{11}^l(t)$, $g_{12}^l(t)$, $g_{13}^l(t)$, ... назовем модулями лагранжевого типа, соответствующими определяющим уравнениям трансверсально-изотропного тела.

Обобщение для вязкоупругого тела с анизотропией общего вида имеет вид:

$$g_{ijk}^l(t) = \frac{C_{ijkm}^* F}{F(t)}, \quad \langle i, j, k, m = 1, 2, 3 \rangle.$$

Здесь C_{ijkm}^* – тензор операторов ползучести.

4. Примеры задач

4.1. Изгиб прямоугольной вязкоупругой пластинки

Пусть мы имеем однородную прямоугольную вязкоупругую пластинку из материала, обладающего анизотропией общего вида. Решение соответствующей задачи для упругого тела приведено в [19]. На рис. 1 показана расчетная схема такой пластинки.

Пусть пластинка изгибается и скручивается равномерно распределенными по границам пластины моментами, которые постоянны по величине вдоль каждой из сторон пластины.

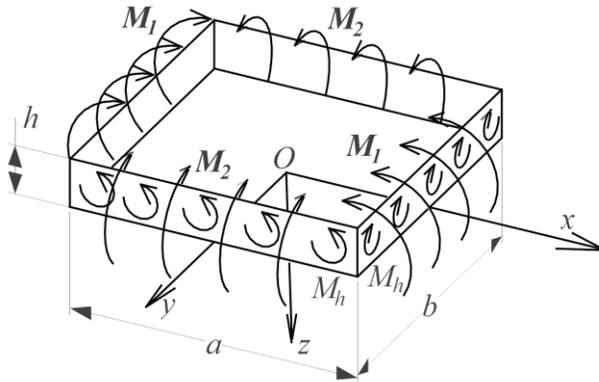


Рис. 1. Изгиб прямоугольной вязкоупругой пластинки
 Fig. 1. Bending of a rectangular viscoelastic plate

Примем, что срединной плоскостью пластины будет плоскость xOy и что усилия, приложенные к пластине, приводятся к постоянным по длине стороны крутящим и изгибающим моментам. Считая, что изгибающие и крутящие моменты меняются по толщине пластины по линейному закону (будучи нулевыми на срединной поверхности), получим, что напряжения распределяются по толщине так же, как и в случае изотропной пластины.

Выражения упругих перемещений согласно [19] представимы как

$$u = \frac{6}{h^3} \left[M_1 (a_{15}z^2 + a_{16}yz + 2a_{11}xz) + M_2 (a_{25}z^2 + a_{26}yz + 2a_{12}xz) + M_h (a_{56}z^2 + a_{66}yz + 2a_{16}xz) \right], \quad (30)$$

$$v = \frac{6}{h^3} \left[M_1 (a_{14}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{16}xz) + M_2 (a_{24}z^2 + 2a_{22}yz + a_{26}xz) + M_h (a_{46}z^2 + 2a_{26}yz + 2a_{66}xz) \right], \quad (31)$$

$$w = \frac{6}{h^3} \left[M_1 (-a_{11}x^2 - a_{12}y^2 + a_{13}z^2 - a_{16}xy) + M_2 (-a_{12}x^2 - a_{22}y^2 + a_{23}z^2 - a_{26}xy) + M_h (-a_{16}x^2 - a_{26}y^2 + a_{36}z^2 - a_{66}xy) \right]. \quad (32)$$

Рассмотрим решение для случая ортотропного материала, т.е. когда тело имеет три плоскости упругой симметрии. Одна из плоскостей параллельна срединной поверхности пластины. Определяющие уравнения упругого ортотропного тела имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, & \gamma_{xz} &= a_{55}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad (34)$$

$$a_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad (35)$$

$$a_{44} = \frac{1}{G_1}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_3}. \quad (36)$$

Перейдем от a_{ij} к константам G_i, K_i где $i = 1, 2, 3$, полагая, что в каждой из трех плоскостей симметрии ортотропного тела выполняются соотношения между упругими константами, аналогичные изотропному телу. Будем иметь

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{3G_1} + \frac{1}{9K_1}, \quad \frac{1}{E_2} = \frac{1}{3G_2} + \frac{1}{9K_2}, \quad \frac{1}{E_3} = \frac{1}{3G_3} + \frac{1}{9K_3}, \quad (37)$$

$$\frac{\nu_{22}}{E_1} = \frac{1}{6G_1} - \frac{1}{9K_1}, \quad \frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{1}{6G_2} - \frac{1}{9K_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{1}{6G_3} - \frac{1}{9K_3}. \quad (38)$$

Таким образом, модель ортотропного тела содержит 9 постоянных, определяемых (36)–(38). По сравнению со случаем общей анизотропии 12 постоянных будут нулевыми:

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0, \quad (39)$$

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{56} = 0. \quad (40)$$

С учетом (39), (40) соотношения (30)–(32) будут иметь вид:

$$u = \frac{6}{h^3} [2a_{11}xzM_1 + M_2 2a_{12}xz + M_h a_{66}yz], \quad (41)$$

$$v = \frac{6}{h^3} [-a_{12}yzM_1 + M_2 a_{22}yz + M_h 2a_{66}xz], \quad (42)$$

$$w = \frac{6}{h^3} [M_1 (-a_{11}x^2 - a_{12}y^2 - a_{13}z^2) + M_2 (-a_{12}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}z^2) - M_h a_{66}xy]. \quad (43)$$

При переходе к решению для вязкоупругой ортотропной пластинки необходимо в (41)–(43) упругие константы заменить вязкоупругими операторами

$$a_{11} \rightarrow a_{11}^*, \quad a_{12} \rightarrow a_{12}^*, \dots, a_{33} \rightarrow a_{33}^*,$$

где, согласно (34)–(38),

$$a_{11}^* = \frac{1}{E_1^*} = \frac{1}{3G_1^*} + \frac{1}{9K_1^*}, \quad a_{12}^* = -\frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} = \frac{1}{6G_1^*} - \frac{1}{9K_1^*}, \quad \dots, \quad a_{33}^* = \frac{1}{E_2^*} = \frac{1}{3G_3^*} + \frac{1}{9K_3^*}.$$

Зададим внешние нагрузки следующим образом:

$$M_1 = \tilde{M}_1 H_1(t), \quad M_2 = \tilde{M}_2 H_2(t), \quad M_h = \tilde{M}_3 H_3(t),$$

где $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3$ – константы. Здесь мы имеем случай, когда внешние нагрузки могут меняться во времени по индивидуальным законам. Поэтому необходимо применять принцип суперпозиции решений. Согласно данному принципу, перемещения тела от суммы усилий (или моментов) будут суммой перемещений от каждого усилия в отдельности.

Следуя приведенным соображениям, введем обозначения для эффективных модулей кастильянового типа ортотропного вязкоупругого тела:

$$g_{m,c}^l(t) = \frac{G_m^{*l-1} H_l(t)}{H_l(t)}, \quad K_{m,c}^l(t) = \frac{K_m^{*l-1} H_l(t)}{H_l(t)}, \quad \langle m = 1, 2, 3 \rangle, \quad \langle l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (44)$$

Тогда получим следующие соотношения. Перемещения от нагрузки, пропорциональной $H_1(t)$, будут иметь вид:

$$u_1 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_1 2a_{11}^* H_1, \quad (45)$$

$$v_1 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_1 2a_{12}^* H_1, \quad (46)$$

$$w_1 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_1 (-a_{11}^* H_1 x^2 - a_{12}^* H_1 y^2 + a_{13}^* H_1 z^2). \quad (47)$$

Перемещения, обусловленные действием изгибающих моментов M_2

$$u_2 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_2 2a_{12}^* H_2, \quad (48)$$

$$v_2 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_2 2a_{22}^* H_2, \quad (49)$$

$$w_2 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_2 (-a_{12}^* H_2 x^2 - a_{22}^* H_2 y^2 + a_{23}^* H_2 z^2). \quad (50)$$

Перемещения, обусловленные скручивающим моментом

$$u_3 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_3 2a_{66}^* H_3 yz, \quad (51)$$

$$v_3 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_3 2a_{66}^* H_3 xz, \quad (52)$$

$$w_3 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_3 a_{66}^* H_3 xy. \quad (53)$$

Здесь

$$a_{66}^* = \frac{1}{G_3}.$$

Общее решение поставленной задачи:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 v_i, \quad w = \sum_{i=1}^3 w_i.$$

Таким образом, получаем, что в случае, когда вязкоупругие операторы анизотропии входят в решение задачи в виде линейной комбинации, решение, полученное на основе метода разделения переменных, тождественно совпадает с решением, найденным с помощью классического метода Вольтерры.

4.2. Изгиб вязкоупругой круглой плиты под действием равномерно распределенного давления

Плита шарнирно оперта по краю и изгибается равномерно распределенной нагрузкой. Материал плиты трансверсально-изотропный, плоскости изотропии параллельны срединной. Задача решается в цилиндрических координатах r, z . На рис. 2 показана расчетная схема для этой задачи.

Граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad z = \frac{h}{2}, \quad \sigma_z = -q, \quad \tau_{rz} = 0, \quad z = -\frac{h}{2}.$$

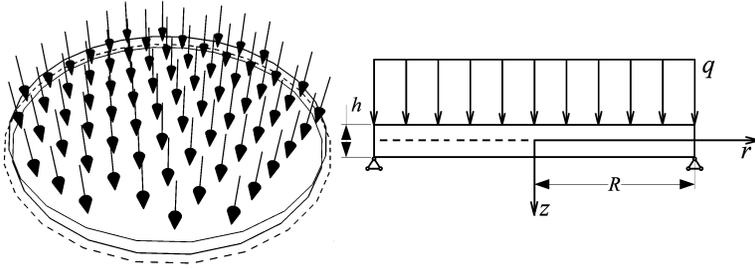


Рис. 2. Изгиб вязкоупругой круглой плиты
Fig. 2. Bending of a circular viscoelastic plate

Граничные условия по боковой поверхности удовлетворяются приближенно [19]. Уравнения, выражающие равенства нулю радиальной составляющей силы и момента, возьмем в виде:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z z dz = 0.$$

Упругие напряжения, рассчитанные с помощью функции напряжений трансверсально-изотропного тела, имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{3q}{4h^3} (3 + \nu) (R^2 - r^2) z + qm \left(\frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{20h} \right), \quad (54)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{3q}{4h^3} [(3 + \nu) R^2 - (1 + 3\nu) r^2] z + qm \left(\frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{20h} \right), \quad (55)$$

$$\sigma_z = \frac{q}{2} \left(-1 + \frac{3z}{h} - 4 \frac{z^3}{h^3} \right), \quad (56)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3q}{4h} r \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (57)$$

Здесь
$$m = \frac{E}{1 - \nu} \frac{1}{G_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (3 + \nu) \frac{E}{1 - \nu}. \quad (58)$$

Для перехода к вязкоупругому решению в (54)–(57) необходимо произвести замены

$$E \rightarrow E^*, \quad \nu \rightarrow \nu^*, \quad \nu_1 \rightarrow \nu_1^*, \quad E_1 \rightarrow E_1^*, \quad m \rightarrow m^*$$

и далее рассчитать воздействие оператора m^* на заданную функцию

$$q = \tilde{q}H(t), \quad \tilde{q} = const.$$

Положим, что объемная релаксация в плоскости изотропии и в плоскости, ортогональной ей, отсутствует.

$$K^* = K = const, \quad K_1^* = K_1 = const.$$

В этом случае вязкоупругое поведение материала определяется базовыми упруго-наследственными операторами G^*, G_1^* :

$$G^* x = G \left[x(t) - \lambda \mathfrak{E}_{\gamma + \lambda}^* x \right], \quad (59)$$

$$G_1^* x = G_1 \left[x(t) - \lambda_1 \mathfrak{E}_{\gamma_1 + \lambda_1}^* x \right]. \quad (60)$$

Здесь \mathfrak{E}_α^* – дробно-экспоненциальные операторы Работнова [6]. В частном случае операторы \mathfrak{E}_α^* с экспоненциальным ядром имеют вид:

$$\mathfrak{E}^*(\gamma)x = \mathfrak{E}_\gamma^*x = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}x(\tau)d\tau. \quad (61)$$

Для получения вязкоупругого решения необходимо свести операторы E^* , V^* и E_1^* , V_1^* , а также m^* к операторам, содержащим пары операторов G^* , K и G_1^* , K_1 . Для этого можно использовать алгебру операторов Работнова [6].

Решение задачи на основе метода разделения переменных получается путем замен констант упругости на эффективные модули в выражении (58):

$$G \rightarrow g_c(t) = \frac{H(t)}{G^{*\alpha-1}H}, \quad G_1 \rightarrow g_c^1(t) = \frac{H(t)}{G_1^{*\alpha-1}H}.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда параметры задачи заданы следующим образом.

Параметры ядер релаксации:

$$\lambda = 0.00253, \quad \gamma = 0.0005, \quad \lambda_1 = 0.0055, \quad \gamma_1 = 0.00071 \text{ min}^{-1}.$$

Упруго-мгновенные значения модулей сдвига:

$$G = 0,8 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \nu = 0,17, \\ G_1 = 0,591 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \nu_1 = 0,1.$$

Размеры пластины:

$$R = 12 \text{ м}, \quad h = 0,02 \text{ м}.$$

Нагрузка:

$$q = 1,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Для выбранных параметров материала пластинки величина η , определяемая как отношение мгновенного модуля к длительному

$$\eta = \frac{G_0}{G_\infty} = \frac{\lambda + \gamma}{\gamma},$$

составила для соответствующих направлений $\eta = 6,06$ и $\eta_1 = 8,75$. На рис. 3 показано сравнение радиальных напряжений, рассчитанных по методу разделения переменных, с расчетом по методу Вольтерры. Максимальное расхождение составляет величину, чуть большую 1%.

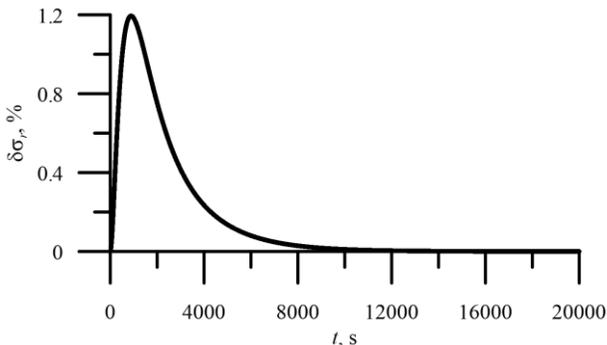


Рис. 3. Отклонения радиальных напряжений
Fig. 3. Deviations of radial stresses

Значительно меньшую погрешность имеют тангенциальные напряжения σ_θ , показанные на рис. 4.

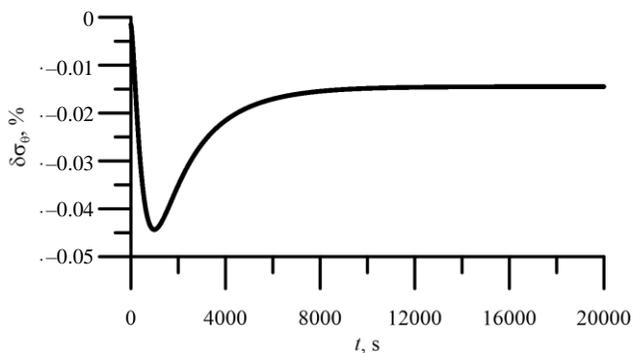


Рис. 4. Отклонения тангенциальных напряжений
Fig. 4. Deviations of tangential stresses

Таким образом, проведенные расчеты напряженного состояния круглой анизотропной вязкоупругой плиты показывают достаточную точность в сравнении с аналитическим методом Вольтерры.

Заключение

Полученные в настоящей работе теоретические результаты сформулированы для двух типов задач линейно вязкоупругого анизотропного тела. Задачи II рода могут быть разрешены на основе применения эффективных модулей кастильянского типа; задачи I рода предлагается решать с помощью эффективных модулей лагранжевого типа.

Результаты численной апробации предлагаемого алгоритма позволяют сделать следующие выводы:

1. Для задач анизотропного вязкоупругого тела, в которых выражения упругих напряжений и деформаций линейно зависят от упругих констант анизотропии, решения, полученные методом разделения переменных, тождественно совпадают с решением по методу Вольтерры.

2. Для произвольной формы зависимости упругих напряжений от констант анизотропии получаем некоторые различия в расчетах по методу разделения переменных от метода Вольтерры. Однако данные отличия мало влияют на итоговые значения вязкоупругих напряжений.

Ограничения предлагаемого метода вытекают из процедур их вывода. Так, эффективные модули кастильянского типа обращают в тождества уравнения равновесия в напряжениях и определяющие уравнения, разрешенные относительно деформаций. Однако данные модули не удовлетворяют системе уравнений равновесия в перемещениях и определяющим уравнениям, разрешенным относительно напряжений.

Как следствие, в решениях задач возникает некоторая погрешность по сравнению с аналитическим методом Вольтерры. Замечено, что сравнительно больших значений такая погрешность может достигать на тех участках истории

нагружения, где имеет место изменение скорости реологических процессов в материале.

Неоспоримые достоинства предлагаемого подхода состоят в следующем:

- а) метод не опирается на факт наличия упругого решения соответствующей линейно-вязкоупругой задачи;
- б) применение метода разделения переменных позволяет автоматически удовлетворить граничным условиям в напряжениях или в перемещениях;
- в) метод может быть использован как при аналитическом, так и при численном решении задач;
- г) предлагаемый метод достаточно прост в применении – для получения вязкоупругого решения достаточно заменить константы упругости на соответствующие эффективные модули.

Список источников

1. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // *Philosophical Transactions*. 1867. V. 157. P. 49–88. doi: 10.1098/rstl.1867.0004
2. *Boltzman L.* Zur theorie der elastischen nachwirkung // *Wiener Berichte*. 1874. Is. 70. P. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. *Volterra V.* Lecons sur Les Fonctions de Lignes. Paris : Gautierr Villars, 1912. 230 p.
4. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations. London ; Glasgow : Blackie & Son Limited, 1930. 226 p.
5. *Cristensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. New York : Academic, 1980. 364 p.
6. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.
7. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости. М. : Наука, 1970. 280 с.
8. *Schapery R.A.* Stress analysis of viscoelastic composite materials // *Journal of Composite Materials*. 1967. V. 1, is. 3. P. 228–267.
9. *Wu W., Jiang G., Huang S., Leo C.J.* Vertical dynamic response of pile embedded in layered transversely isotropic soil // *Mathematical Problems in Engineering*. 2014. V. 2014. Art. 126916. 12 p.
10. *Kaloerov S.A., Koshkin A.A.* Solving the problem of linear viscoelasticity for piecewise-homogeneous anisotropic plates // *International Applied Mechanics*. 2017. V. 53, is. 6. P. 1123–1129. doi: 10.1007/s10778-018-0851-9
11. *Kaminskii A.A., Selivanov M.F.* A Method for solving boundary-value problems of linear viscoelasticity for anisotropic composites // *International Applied Mechanics*. 2003. V. 39, is. 11. P. 1294–1304. doi: 10.1023/B:INAM.0000015599.90700.86
12. *Holzapfel G.A., Gasser T.C.* A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2003. V. 190, is. 34. P. 4379–4403. doi: 10.1016/S0045-7825(00)00323-6
13. *Simo J.C.* On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987. V. 60. P. 153–173. doi: 10.1016/0045-7825(87)90107-1
14. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. : Наука, 1980. 304 с.
15. *Аллам М.Н.М., Победря Б.Е.* К решению квазистатических задач анизотропной вязкоупругости // *Известия Академии наук Армянской ССР. Механика*. 1978. № 2. С. 19–27.
16. *Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A.* Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // *Acta Mechanica*. 2020. V. 231, is. 9. P. 3583–3606. doi: 10.1007/s00707-020-02698-4

17. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М. : Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
18. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method // *Acta Mechanica*. 2018. V. 229, is. 6. P. 2539–2559. doi: 10.1007/s00707-018-2129-z
19. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.

References

1. Maxwell J.C. (1867) On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions*. 157. pp. 49–88. doi: 10.1098/rstl.1867.0004
2. Boltzman L. (1874) Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Wiener Berichte*. 70. pp. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. Volterra V. (1912) *Lecons sur Les Fonctions de Lignes*. Paris: Gautierr Villars.
4. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations*. London – Glasgow: Blackie & Son Limited.
5. Cristensen R.M. (1980) *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York: Academic.
6. Rabotnov Y. N. (1969) *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam: North-Holland.
7. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termovязкоупругosti* [Fundamentals of mathematical theory of thermoviscoelasticity]. Moscow: Nauka.
8. Schapery R.A. (1967) Stress analysis of viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1(3). pp. 228–267. doi: 10.1177/00219983670010030
9. Wu W., Jiang G., Huang S., Leo C.J. (2014) Vertical dynamic response of pile embedded in layered transversely isotropic soil. *Mathematical Problems in Engineering*. 12. Article 126916. pp. 1–12. doi: 10.1155/2014/126916
10. Kaloerov S.A., Koshkin A.A. (2017) Solving the problem of linear viscoelasticity for piecewise-homogeneous anisotropic plates. *International Applied Mechanics*. 53(6). pp. 1123–1129. doi: 10.1007/s10778-018-0851-9
11. Kaminskii A.A., Selivanov M.F. (2003) A method for solving boundary-value problems of linear viscoelasticity for anisotropic composites. *International Applied Mechanics*. 39(11). pp. 1294–1304. doi: 10.1023/B:INAM.0000015599.90700.86
12. Holzapfel G.A., Gasser T.C. (2003) A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 190(34). pp. 4379–4403. doi: 10.1016/50045-7825(00)00323-6
13. Simo J.C. (1987) On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 60. pp. 153–173. doi: 10.1016/0045-7825(87)90107-1
14. Galin L.A. (1980) *Kontaknyye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. Moscow: Nauka.
15. Allam M.N.M., Pobedrya B.E. (1978) K resheniyu kvazistaticheskikh zadach anizotropnoy vyazkouprugosti [On the solution to quasi-static problems of anisotropic viscoelasticity]. *Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Mekhanika*. 2 pp. 19–27.
16. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. (2020) Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies. *Acta Mechanica*. 231(9). pp. 3583–3606. doi: 10.1007/s00707-020-02698-4
17. Pobedrya B.E. (1984) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta.
18. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. (2018) Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method. *Acta Mechanica*. 229(6). pp. 2539–2559. doi: 10.1007/s00707-018-2129-z
19. Lekhnitskiy S.G. (1981) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Mir.

Сведения об авторах:

Светашков Александр Андреевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор отделения общетехнических дисциплин Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: svetashkov@tpu.ru

Куприянов Николай Амвросьевич – кандидат технических наук, доцент отделения общетехнических дисциплин Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: kupriyanov@tpu.ru

Павлов Михаил Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель отделения нефтегазового дела Томского политехнического университета, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: mspavlov@tpu.ru

Information about the authors:

Svetashkov Aleksandr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: svetashkov@tpu.ru

Kupriyanov Nikolay A. (Candidate of Technical Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kupriyanov@tpu.ru

Pavlov Mikhail S. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 17.02.2023; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 17.02.2023; accepted for publication 10.07.2023