

Научная статья

УДК 531.38

doi: 10.17223/19988621/84/11

Устойчивость равномерного прямолинейного движения тягача с двумя прицепами

Алексей Сергеевич Смирнов¹, Егор Алексеевич Дегилевич²

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

^{1,2} Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

² ООО «Центр Технологического Консалтинга», Санкт-Петербург, Россия

¹ smirnov.alexey.1994@gmail.com

² DegilevichEgor@gmail.com

Аннотация. Исследуется устойчивость движения тягача, едущего прямолинейно и с постоянной скоростью, за которым следуют два одноосных прицепа. При этом помимо шарнирного соединения элементов данной системы учитывается податливость каждого сцепления. Строится математическая модель системы, в ходе исследования которой выявляются условия устойчивости ее движения. Полученные результаты представлены в удобной графической форме, в виде областей устойчивости на плоскости безразмерных параметров задачи.

Ключевые слова: тягач, прицеп, метод D-разбиений, область устойчивости движения

Для цитирования: Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Устойчивость равномерного прямолинейного движения тягача с двумя прицепами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 139–151. doi: 10.17223/19988621/84/11

Original article

Stability of uniform rectilinear motion of a tractor with two trailers

Aleksey S. Smirnov¹, Egor A. Degilevich²

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

^{1,2} Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

² CMT-Engineering, Saint Petersburg, Russia

¹ smirnov.alexey.1994@gmail.com

² DegilevichEgor@gmail.com

Abstract. This paper investigates the stability of uniform linear motion of a tractor followed by two identical single-axle trailers. It is shown that in addition to the articulated

connection of the first trailer with the tractor and the second trailer with the first one, the mechanical compliance of each coupling should be taken into account when identifying the conditions of motion stability for the system. The Appel equations are used to develop a mathematical model of the motion of the system with two nonholonomic constraints in a linear formulation. Dimensionless problem parameters, dimensionless generalized coordinates, and dimensionless time are introduced to represent the mathematical model in the most compact and convenient form. By analyzing the characteristic equation of the sixth order using the D-decomposition method and the Liénard-Chipard criterion, the stability motion regions are constructed on the plane of two dimensionless parameters for different values of the other two dimensionless parameters. The obtained data are compared with the solution of the motion stability problem for a tractor with one trailer. The results allow determining the qualitative and quantitative features of the derived solution. The conclusions drawn in this paper are of interest not only from a theoretical point of view, but can also be useful for practical applications.

Keywords: tractor, trailer, D-decomposition method, motion stability region

For citation: Smirnov, A.S., Degilevich, E.A. (2023) Stability of uniform rectilinear motion of a tractor with two trailers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 139–151. doi: 10.17223/19988621/84/11

Введение

Вопросам движения тягача с присоединенным к нему прицепом посвящен целый ряд научных работ [1–12]. Это связано с тем, что такие системы часто встречаются как в повседневной жизни, так и в промышленности, а также являются неотъемлемой частью одного из важнейших разделов аналитической динамики – неголономной механики. Естественно, что первоочередное значение здесь приобретают вопросы устойчивости движения таких систем. В самом деле, иногда происходят различные нештатные ситуации, когда прицеп, следующий за автомобилем по горизонтальной дороге, начинает совершать опасные поперечные колебания, которые могут привести к неблагоприятным последствиям. Хорошо известна классическая задача такого рода, представленная в [3], а само описанное в ней явление потери устойчивости называют «шимми прицепа» по аналогии с эффектом, возникающим на стойке шасси самолета при его движении по земле [13].

Следует отметить, что особый интерес представляют задачи о движении тягача, за которым следует не один, а несколько прицепов [10]. Эти вопросы недостаточно подробно освещены в научной литературе, а вместе с тем они имеют серьезное практическое значение при эксплуатации подобных систем, поэтому заслуживают отдельного внимания. Именно к этому направлению относится предлагаемая статья, в которой обсуждается динамика тягача с двумя прицепами и строится математическая модель такой системы, в результате аналитического исследования которой определяются условия устойчивости движения и дается их наглядная графическая интерпретация.

Постановка задачи

Рассмотрим тягач, движущийся в продольном направлении равномерно и прямолинейно со скоростью v , за которым следуют два одноосных прицепа, причем

первый прицеп шарнирно присоединен к тягачу, а второй – к первому прицепу (рис. 1, а). Для упрощения аналитического исследования задачи будем полагать, что оба прицепа представляют собой твердые тела и являются идентичными, т.е. обладают одинаковыми параметрами: m – масса, J – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости рисунка, l – длина, b – расстояние от оси колесной пары до точки крепления, a – расстояние от центра масс до той же точки. В качестве обобщенных координат примем углы отклонения φ_1 и φ_2 прицепов от продольного направления.

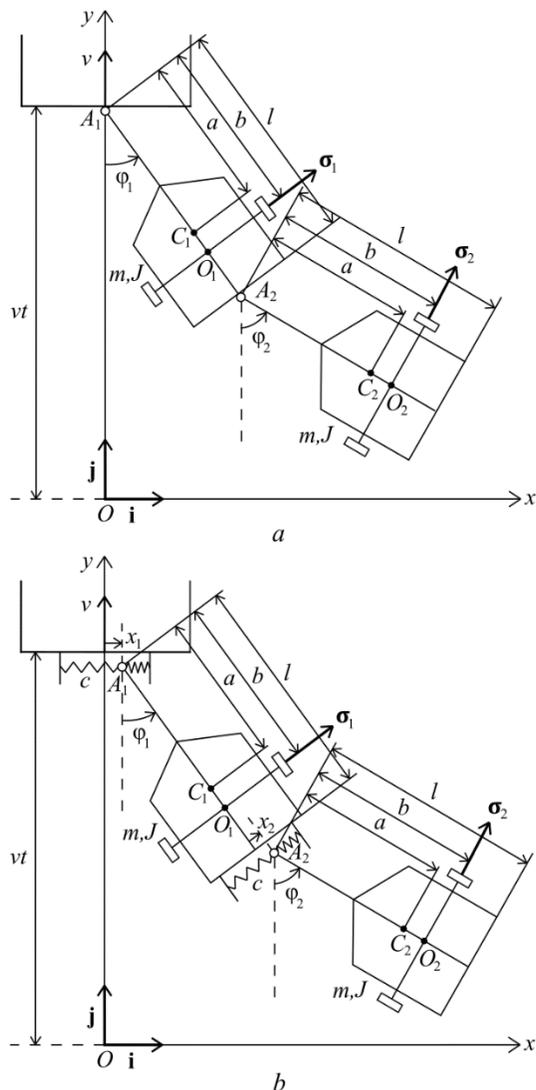


Рис. 1. Расчетная схема тягача с двумя прицепами:
(а) простейшая схема, (б) модифицированная схема

Fig. 1. Computational scheme of a tractor with two trailers: (a) simple and (b) modified schemes

Полагая, что колеса обоих прицепов не имеют бокового проскальзывания, запишем соответствующие условия

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{v}_{O_1} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{v}_{O_2} = 0, \quad (1)$$

которые показывают, что скорости \mathbf{v}_{O_1} и \mathbf{v}_{O_2} точек O_1 и O_2 , лежащих на осях колесных пар, перпендикулярны единичным векторам $\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\boldsymbol{\sigma}_2$, направленным по этим осям. Легко понять, что при достаточно малых значениях углов φ_1 и φ_2 можно записать следующие выражения для величин, входящих в формулу (1):

$$\mathbf{v}_{O_1} = b\dot{\varphi}_1 \mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_{O_2} = (l\dot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_2)\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{i} + \varphi_1 \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j},$$

где удержаны только слагаемые не выше первого порядка малости по обобщенным координатам и скоростям, а \mathbf{i} и \mathbf{j} – единичные векторы декартовой системы координат. Поэтому условия (1) с учетом выражений (2) примут вид:

$$b\dot{\varphi}_1 + v\varphi_1 = 0, \quad l\dot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_2 + v\varphi_2 = 0. \quad (3)$$

Видно, что эти соотношения фактически играют роль уравнений движения системы. Это означает, что система имеет только две кинематические степени свободы и не обладает динамическими степенями свободы, так что писать уравнения динамики здесь не требуется. Решая уравнения (3), устанавливаем следующий закон изменения обобщенных координат φ_1 и φ_2 во времени t :

$$\varphi_1(t) = \varphi_{10} e^{-\alpha t}, \quad \varphi_2(t) = (\varphi_{20} + \beta \varphi_{10} \alpha t) e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \frac{v}{b}, \quad \beta = \frac{l}{b}, \quad (4)$$

где φ_{10} и φ_{20} – начальные значения величин φ_1 и φ_2 соответственно. Видно, что поведение угла φ_2 оказывается более сложным, чем характер изменения угла φ_1 , так как в структуре выражения для φ_2 содержится функция $te^{-\alpha t}$, имеющая не-монотонный характер. В результате можно сделать вывод, что в рамках данной модели гарантируется асимптотическая устойчивость движения, однако при этом второй прицеп будет испытывать более значительные отклонения от продольного направления, чем первый [10]. Тем не менее на практике иногда приходится наблюдать ярко выраженную неустойчивость движения, которая, как показывают приведенные рассуждения, не может быть выявлена посредством анализа представленной простейшей модели тягача с двумя прицепами.

Сказанное означает, что для выявления условий устойчивости движения, которые и представляют существенный интерес, следует модифицировать исходную расчетную схему так, чтобы она обладала динамическими степенями свободы, требующими привлечения уравнений динамики неголономных систем, при этом также приблизив ее к реальным условиям. С этой целью, следуя классической модели тягача с одним прицепом, на основе которой и было описано явление потери устойчивости прицепа в книге [3], откажемся от предположения абсолютной жесткого крепления шарниров в точках A_1 и A_2 , поскольку при практической реализации указанные точки шарнирного соединения не являются неподвижными относительно тягача и первого прицепа соответственно. Поэтому мы будем дополнительно учитывать податливость сцепления первого прицепа с тягачом и второго прицепа с первым, что может быть осуществлено посредством внесения

в конструкцию системы упругих элементов. При этом примем для простоты жесткости обеих пружин одинаковыми и обозначим их за c . Ясно, что для описания движения системы в данной ситуации необходимо ввести еще две обобщенные координаты x_1 и x_2 , которые будут характеризовать смещения точек A_1 и A_2 в направлениях, отвечающих единичным векторам \mathbf{i} и $\boldsymbol{\sigma}_1$ соответственно. В результате вместо простейшей расчетной схемы будем иметь модифицированную расчетную схему, которая представлена на рис. 1, *b*. Как продемонстрирует последующий анализ, математическая модель в этом случае окажется намного более сложной, чем та, которая была построена и проанализирована выше для упрощенного варианта.

Таким образом, основной целью настоящей работы является определение и анализ условий устойчивости движения системы, приведенной на рис. 1, *b*, а также построение соответствующих им областей устойчивости в терминах безразмерных параметров задачи.

Построение математической модели

Перейдем к построению математической модели, отвечающей модифицированной расчетной схеме с рис. 1, *b*, полагая, что все обобщенные координаты являются малыми. Сначала запишем выражения, аналогичные формулам (2):

$$\mathbf{v}_{o_1} = (\dot{x}_1 + b\dot{\varphi}_1)\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_{o_2} = (\dot{x}_1 + l\dot{\varphi}_1 + \dot{x}_2 + b\dot{\varphi}_2)\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{i} + \varphi_1\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j}.$$

Тогда из условий (1) получим следующие два уравнения неголономных связей:

$$\dot{x}_1 + b\dot{\varphi}_1 + v\varphi_1 = 0, \quad \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}_1 + \dot{x}_2 + b\dot{\varphi}_2 + v\varphi_2 = 0, \quad (6)$$

которые здесь уже не являются уравнениями движения. Для получения динамических уравнений проще всего воспользоваться известными уравнениями Аппеля для неголономных систем [14]. С этой целью составим энергию ускорений системы

$$S = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2 + \dot{x}_{C_2}^2 + \dot{y}_{C_2}^2) + \frac{1}{2}J(\ddot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1^4 + \ddot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2^4). \quad (7)$$

Для ее вычисления выпишем декартовы координаты центров масс обоих прицепов с точностью до величин первого порядка малости по обобщенным координатам

$$x_{C_1} = x_1 + a\varphi_1, \quad y_{C_1} = vt - a, \quad x_{C_2} = x_1 + l\varphi_1 + x_2 + a\varphi_2, \quad y_{C_2} = vt - l - a, \quad (8)$$

гарантирующие квадратичную аппроксимацию энергии ускорений (7). Дифференцируя их дважды по времени и исключая ускорения \ddot{x}_1 и \ddot{x}_2 при помощи уравнений неголономных связей (6), получим

$$\ddot{x}_{C_1} = -v\dot{\varphi}_1 + (a-b)\ddot{\varphi}_1, \quad \ddot{y}_{C_1} = 0, \quad \ddot{x}_{C_2} = -v\dot{\varphi}_2 + (a-b)\ddot{\varphi}_2, \quad \ddot{y}_{C_2} = 0. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим после преобразований следующее выражение для энергии ускорений в квадратичной аппроксимации:

$$S = \frac{1}{2}m\left[(r^2 + (b-a)^2)(\ddot{\varphi}_1^2 + \ddot{\varphi}_2^2) + 2(b-a)v(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_2)\right], \quad (10)$$

где принято, что $J = mr^2$, причем r – радиус инерции каждого прицепа относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной плоскости

рисунка; а также в выражении (10) отброшены несущественные слагаемые, не зависящие от обобщенных ускорений. Записывая далее выражение для элементарной работы упругих сил, обусловленных податливыми сцеплениями

$$\delta'W = -cx_1\delta x_1 - cx_2\delta x_2, \quad (11)$$

и исключая входящие в него вариации δx_1 и δx_2 посредством соотношений, вытекающих из уравнений неголономных связей (6) (с учетом того, что виртуальные перемещения вычисляются при «замороженном времени», т.е. $\delta t = 0$):

$$\delta x_1 = -b\delta\varphi_1, \quad \delta x_2 = -(l-b)\delta\varphi_1 - b\delta\varphi_2, \quad (12)$$

получим следующее выражение:

$$\delta'W = Q_1\delta\varphi_1 + Q_2\delta\varphi_2, \quad Q_1 = cbx_1 + c(l-b)x_2, \quad Q_2 = cbx_2. \quad (13)$$

Записывая далее уравнения Аппеля в обобщенных координатах в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}_1} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}_2} = Q_2 \quad (14)$$

и объединяя эти уравнения с уравнениями неголономных связей (6), получим следующую систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций φ_1 , φ_2 , x_1 и x_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} m(r^2 + (b-a)^2)\ddot{\varphi}_1 + m(b-a)v\dot{\varphi}_1 = cbx_1 + c(l-b)x_2, \\ m(r^2 + (b-a)^2)\ddot{\varphi}_2 + m(b-a)v\dot{\varphi}_2 = cbx_2, \\ \dot{x}_1 + b\dot{\varphi}_1 + v\varphi_1 = 0, \\ \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}_1 + \dot{x}_2 + b\dot{\varphi}_2 + v\varphi_2 = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Для того чтобы записать эту систему в более удобной форме, введем в рассмотрение следующие величины:

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad \delta = \frac{a}{b}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \gamma = \frac{v}{bk}, \quad \beta = \frac{l}{b}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{b}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{b}, \quad \tau = kt. \quad (16)$$

Поясним их физический и геометрический смысл: ρ – безразмерный радиус инерции каждого прицепа; δ – безразмерное расстояние от центра масс каждого прицепа до точки его шарнирного крепления; k – частота колебаний груза m на пружине жесткости c (эта величина необходима для дальнейшего обезразмеривания); γ – безразмерная скорость движения тягача; β – безразмерная длина каждого прицепа (причем, исходя из смысла задачи, $l > b$, так что $\beta > 1$); ξ_1 и ξ_2 – безразмерные обобщенные координаты; τ – безразмерное время. Отметим, что безразмерные параметры ρ , δ и γ введены так же, как и в работах [11, 12], где рассматривалась устойчивость движения тягача с одним прицепом. Условия устойчивости движения в этой задаче имели вид:

$$\gamma > 0, \quad \delta < 1, \quad \rho < \sqrt{\delta(1-\delta)}, \quad (17)$$

и они понадобятся нам при дальнейших сопоставлениях, которые в силу идентичного введения параметров можно будет провести наиболее наглядным образом. Что же касается параметра β , то он уже ранее вводился нами при исследовании простейшей модели тягача с двумя прицепами в выражении (4). В результате с учетом обозначений (16) систему (15) можно привести к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho^2 + (1-\delta)^2)\varphi_1'' + \gamma(1-\delta)\varphi_1' - \xi_1 - (\beta-1)\xi_2 = 0, \\ (\rho^2 + (1-\delta)^2)\varphi_2'' + \gamma(1-\delta)\varphi_2' - \xi_2 = 0, \\ \xi_1' + \varphi_1' + \gamma\varphi_1 = 0, \\ \xi_1' + \beta\varphi_1' + \xi_2' + \varphi_2' + \gamma\varphi_2 = 0, \end{array} \right. \quad (18)$$

где штрихом обозначается производная по безразмерному времени τ : $(\)' = d / d\tau$. Система уравнений (18) представляет собой математическую модель движения системы, изображенной на рис. 1, б. Ее несомненным достоинством является достаточная компактность, которая связана с изначально принятой идентичностью параметров обоих прицепов, и именно она позволяет далее проделать еще ряд аналитических построений в отношении исследования устойчивости движения рассматриваемой системы.

Определение условий устойчивости движения

Обращаясь теперь к установлению условий устойчивости движения тягача с двумя прицепами, запишем определитель системы уравнений (18) и приравняем его нулю:

$$\begin{vmatrix} (\rho^2 + (1-\delta)^2)\lambda^2 + \gamma(1-\delta)\lambda & 0 & -1 & -(\beta-1) \\ 0 & (\rho^2 + (1-\delta)^2)\lambda^2 + \gamma(1-\delta)\lambda & 0 & -1 \\ \lambda + \gamma & 0 & \lambda & 0 \\ \beta\lambda & \lambda + \gamma & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Раскрывая этот определитель, например, по элементам третьей строки, приходим после серии преобразований к следующему характеристическому уравнению шестой степени в безразмерном виде:

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0, \quad (20)$$

причем его коэффициенты определяются выражениями:

$$\begin{aligned} a_0 &= (\rho^2 + (1-\delta)^2)^2, \\ a_1 &= 2(\rho^2 + (1-\delta)^2)\gamma(1-\delta), \\ a_2 &= \gamma^2(1-\delta)^2 + (\rho^2 + (1-\delta)^2)(\beta^2 - 2\beta + 3), \\ a_3 &= \gamma[(3-\beta)(\rho^2 + (1-\delta)^2) + (1-\delta)(\beta^2 - 2\beta + 3)], \end{aligned} \quad (21)$$

$$a_4 = \gamma^2(1-\delta)(3-\beta) + 1,$$

$$a_5 = 2\gamma,$$

$$a_6 = \gamma^2.$$

Видно, что все семь коэффициентов зависят лишь от четырех безразмерных параметров задачи: ρ , δ , γ и β . Для определения условий устойчивости можно воспользоваться критерием Льенара–Шипара [15]. Согласно ему, во-первых, должны быть выполнены условия Стодолы, т.е. все коэффициенты (21) должны быть положительными. В частности, из положительности коэффициентов a_1 и a_5 можно немедленно установить, что $\gamma > 0$ и $\delta < 1$, как это было и в задаче о тягаче с одним прицепом, где условия устойчивости имели вид (17).

Во-вторых, для устойчивости следует также потребовать выполнения половины условий Гурвица, которые выражают положительность главных миноров определителя Гурвица нечетного порядка. Однако для характеристических уравнений высокого порядка вычисление подобных определителей с учетом перебора различных значений параметров задачи в большом количестве их комбинаций становится слишком трудоемким делом. Поэтому в данной ситуации целесообразно использовать метод D -разбиений [15, 16], который позволяет построить границы искомой области устойчивости в пространстве безразмерных параметров задачи. Согласно ему, необходимо получить отображение мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения в пространство безразмерных параметров. Для этого следует подставить $\lambda = i\omega$ в уравнение (20) и приравнять вещественную и мнимую части получившегося выражения нулю. В результате приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} u(\omega, \rho, \delta, \gamma, \beta) = a_6 - a_4\omega^2 + a_2\omega^4 - a_0\omega^6 = 0, \\ v(\omega, \rho, \delta, \gamma, \beta) = a_5\omega - a_3\omega^3 + a_1\omega^5 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

где необходимо учесть, что коэффициенты характеристического уравнения имеют вид (21). Таким образом, в уравнениях (22) помимо параметра ω , который следует изменять от $-\infty$ до $+\infty$, входят и четыре безразмерных параметра ρ , δ , γ и β . Система (22) описывает так называемую кривую D -разбиения, которая и представляет указанное отображение мнимой оси и разделяет пространство безразмерных параметров задачи на несколько областей с различным расположением корней характеристического уравнения относительно мнимой оси. Для того чтобы выявить область устойчивости движения системы, проще всего взять любую точку в каждой из этих областей и применить к ней критерий Льенара–Шипара. Если в какой-либо области для принятой точки указанный критерий будет выполняться, то это будет означать, что он будет выполнен и в каждой точке этой области, т.е. она и будет являться областью устойчивости. Ясно, что для ее детального исследования и графического изображения целесообразно использовать уже компьютерные методы анализа, к чему мы далее и переходим.

Обсуждение результатов

Обращаясь к графической интерпретации полученных результатов на основе приведенных выше рассуждений, будем строить границы областей устойчивости на плоскости параметров $\delta\rho$ при различных значениях двух оставшихся параметров γ и β . При этом также построим и границу области устойчивости для тягача с одним прицепом согласно (17), которая не зависит от конкретных значений параметров $\gamma > 0$ и $\beta > 1$.

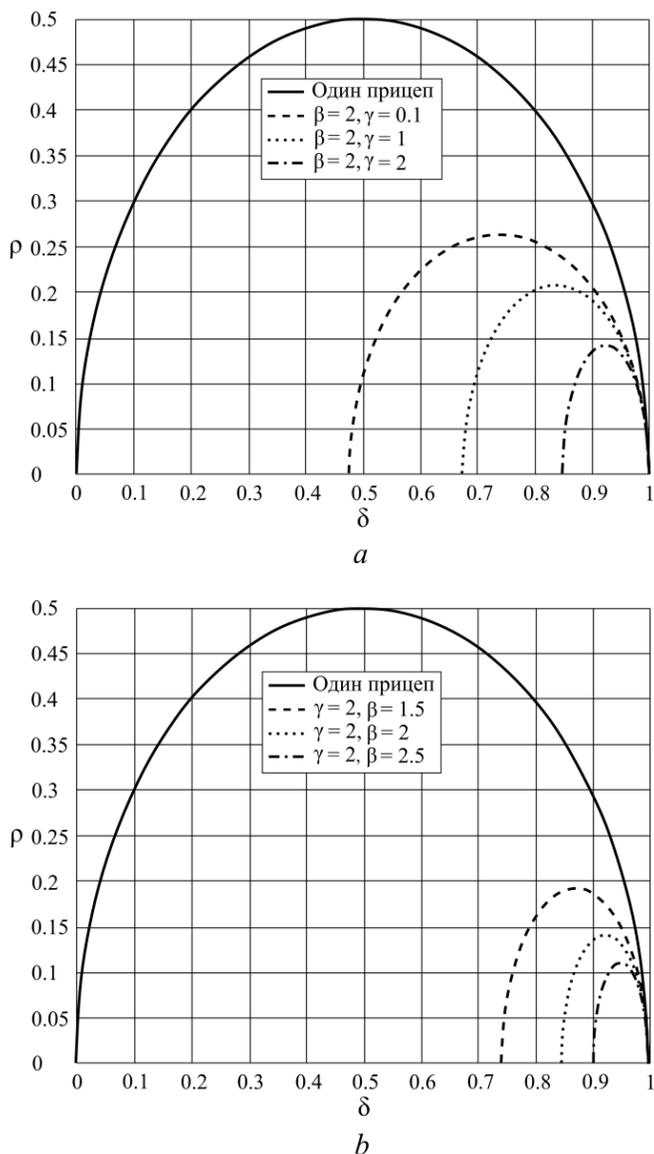


Рис. 2. Области устойчивости движения тягача с одним и двумя прицепами на плоскости параметров $\delta\rho$: (а) $\beta = 2$, γ варьирует; (б) $\gamma = 2$, β варьирует
Fig. 2. Stability regions of the tractor motion with one and two trailers on the plane of parameters $\delta\rho$: (а) $\beta = 2$ at variable γ and (б) $\gamma = 2$ at variable β

На рис. 2, а приведены указанные границы для случая $\beta = 2$, когда параметр γ варьирует (приняты значения $\gamma = 0.1; 1; 2$), а на рис. 2, б представлены эти границы для случая $\gamma = 2$, когда варьирует уже параметр β (приняты значения $\beta = 1.5; 2; 2.5$). При этом области устойчивости расположены ниже построенных

границ. Из приведенных иллюстраций видно, что при фиксированном значении β увеличение параметра γ приводит к уменьшению области устойчивости, и та же тенденция имеет место при увеличении параметра β для случая зафиксированного параметра γ . Отметим, что при изменении параметров γ и β в достаточно широких диапазонах устойчивость движения системы обеспечивается выбором значения δ , несколько меньшего 1, и заданием весьма небольшого значения ρ .

Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях область устойчивости движения тягача с двумя прицепами оказывается существенно более узкой, чем для тягача с одним прицепом, как этого можно было ожидать. Это важное обстоятельство и предопределяет довольно редкое использование на практике тягачей, за которым следуют два прицепа, поскольку при этом крайне высок риск наступления неблагоприятных последствий, связанных с возникновением неустойчивости. Именно поэтому наибольшее распространение получили тягачи с одним прицепом, эксплуатация которых позволяет заметно уменьшить число подобных ситуаций.

Заключение

В настоящей работе была рассмотрена задача об устойчивости равномерного прямолинейного движения тягача, за которым следуют два идентичных одноосных прицепа. Показано, что для выявления условий устойчивости движения необходимо учесть податливость сцепления первого прицепа с тягачом и второго прицепа с первым. При помощи уравнений Аппеля для неголономных систем построена математическая модель системы в линейной постановке, записанная в удобном виде с учетом введения безразмерных параметров задачи, безразмерных обобщенных координат и безразмерного времени. Проведенный анализ ее характеристического уравнения, имеющего шестой порядок, позволил на основе метода D -разбиений с использованием критерия Льенара–Шипара построить области устойчивости движения на плоскости двух безразмерных параметров при различных значениях двух других безразмерных параметров. Приведенные графические иллюстрации позволяют установить качественные и количественные особенности полученного решения и сопоставить его с известным ранее решением для случая тягача с одним прицепом. Сделанные в работе выводы не только имеют теоретическое значение, но представляют и большой практический интерес.

В завершение следует отметить, что представленная в работе методика исследования остается пригодной и в том случае, когда геометрические, инерционные и упругие параметры обоих прицепов и их сцеплений оказываются различными. Разумеется, в этом случае задача будет обладать еще большим количеством параметров, что сильно усложнит как саму математическую модель, так и последующий анализ устойчивости движения на ее основе, который с самого начала, т.е. с момента получения характеристического уравнения, будет целесообразно проводить с использованием компьютерных процедур.

Список источников

1. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М. : Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. *Закин Я.Х.* Прикладная теория движения автопоезда. М. : Транспорт, 1967. 255 с.
3. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М. : Мир, 1971. 192 с.

4. Rouchon P., Fliess M., Levine J., Martin P. Flatness and motion planning: The car with n trailers // *Proceedings of the European Control Conference, Groningen, The Netherlands*, 1993. P. 1518–1522.
5. Tanaka K., Kosaki T. Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B*. 1997. V. 27 (3). P. 552–558. doi: 10.1109/3477.584963
6. Astolfi A., Bolzern P., Locatelli A. Path-Tracking of a Tractor-Trailer Vehicle Along Rectilinear and Circular Paths: A Lyapunov-Based Approach // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 2004. V. 20 (1). P. 154–160. doi: 10.1109/TRA.2003.820928
7. Lin J.J.-C., Yang C.-E., Hung W.-H., Kang S.-C. Accessibility evaluation system for site layout planning – a tractor trailer example // *Visualization in Engineering*. 2013. V. 1 (1). P. 1–11. doi: 10.1186/2213-7459-1-12
8. Nastasiu M., Ispas N. Comparative analysis into the tractor-trailer braking dynamics: tractor with single axle brakes, tractor with all wheel brakes // *Central European Journal of Engineering*. 2014. V. 4 (2). P. 142–147. doi: 10.2478/s13531-013-0155-0
9. Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смольников Б.А., Смирнов А.Л. Теория устойчивости в примерах и задачах. М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 208 с.
10. Смирнов А.С., Смольников Б.А., Леонтьев В.А. Принципы неголономной механики в управлении движением группы транспортных роботов // *Научно-технические ведомости СПбПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление*. 2017. № 3. С. 83–91. doi: 10.18721/JCSTCS.10307
11. Муравьев А.С., Смирнов А.С. Динамика и устойчивость движения тягача с прицепом // *Неделя науки СПбПУ : материалы науч. конф. с междунар. участием. С.-Петербург, 18–23 ноября 2019 г. СПб. : Политех-Пресс, 2019. С. 92–95.*
12. Муравьев А.С., Смирнов А.С. Устойчивость движения тягача с прицепом с учетом сил сопротивления // *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2020–2021 гг. СПб. : Наука, 2021. С. 29–40.*
13. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / под ред. И.И. Блехмана. М. : Машиностроение, 1979. Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. 351 с.
14. Меркин Д.Р., Смольников Б.А. Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003. 534 с.
15. Теория автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Высш. школа, 1986. Ч. 1: Теория линейных систем автоматического регулирования. 367 с.
16. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 560 с.

References

1. Rokard Y. (1954) *L'instabilité en mécanique. Automobiles. Avions. Ponts suspendus*. Paris: Masson.
2. Zakin Ya.Kh. (1967) *Prikladnaya teoriya dvizheniya avtopoezda* [Applied theory of road train motion]. Moscow: Transport.
3. Ziegler H. (1968) *Principles of Structural Stability*. Waltham – Massachusetts – Toronto – London: Blaisdell Publishing Company.
4. Rouchon P., Fliess M., Levine J., Martin P. (1993). Flatness and motion planning: The car with n trailers. *Proceedings of the European Control Conference, Groningen, The Netherlands*. pp. 1518–1522.
5. Tanaka K., Kosaki T. (1997) Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B*. 27(3). pp. 552–558. doi: 10.1109/3477.584963

6. Astolfi A., Bolzern P., Locatelli A. (2004) Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 20(1). pp. 154–160. doi: 10.1109/TRA.2003.820928
7. Lin J.J.-C., Yang C.-E., Hung W.-H., Kang S.-C. (2013) Accessibility evaluation system for site layout planning – a tractor trailer example. *Visualization in Engineering*. 1(1). pp. 1–11. doi: 10.1186/2213-7459-1-12
8. Nastasoiu M., Ispas N. (2014) Comparative analysis into the tractor-trailer braking dynamics: tractor with single axle brakes, tractor with all wheel brakes. *Central European Journal of Engineering*. 4(2). pp. 142–147. doi: 10.2478/s13531-013-0155-0
9. Merkin D.R., Bauer S.M., Smirnov A.L., Smolnikov B.A. (2007) *Teoriya ustoychivosti v primerakh i zadachakh* [The theory of stability in examples and problems]. Moscow – Izhevsk: R&C Dynamics.
10. Smirnov A.S., Smol'nikov B.A., Leont'ev V.A. (2017) Printsipy negolonomnoy mekhaniki v upravlenii dvizheniem gruppy transportnykh robotov [Principles of nonholonomic mechanics in controlling a transport robot group]. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie – St. Petersburg Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*. 3. pp. 83–91. doi: 10.18721/JCSTCS.10307
11. Murav'yov A.S., Smirnov A.S. (2019) Dinamika i ustoychivost' dvizheniya tyagacha s pritsepom [Dynamics and stability of movement of a tractor with a trailer]. *Week of Science of SPbPU, Proceedings of a Scientific Conference with International Participation. St. Petersburg, November 18–23, 2019*. Saint Petersburg: POLYTECH-PRESS. pp. 92–95.
12. Murav'yov A.S., Smirnov A.S. (2021) Ustoychivost' dvizheniya tyagacha s pritsepom s uchetom sil soprotivleniya [The motion stability of a tractor with a trailer taking into account the resistance forces]. *Proceedings of the seminar "Computer Methods in Continuum Mechanics" 2020–2021*. Saint Petersburg: Nauka. pp. 29–40.
13. Blekhnman I.I. (ed.) (1979) *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. Tom 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technology. Handbook. Volume 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Moscow: Mashinostroenie.
14. Merkin D.R., Smol'nikov B.A. (2003) *Prikladnye zadachi dinamiki tverdogo tela* [Applied problems of the dynamics of rigid bodies]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University Publishing House.
15. Voronov A.A. (ed.) (1986) *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Chast' 1. Teoriya lineynykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Automatic control theory. Part I. Theory of linear systems of automatic control]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. (2000) *Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln* [Introduction to the theory of oscillations and waves]. Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.

Сведения об авторах:

Смирнов Алексей Сергеевич – ассистент Высшей школы механики и процессов управления Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Дегилевич Егор Алексеевич – инженер ООО «Центр Технологического Консалтинга», аспирант Института проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: DegilevichEgor@gmail.com

Information about the authors:

Smirnov Aleksey S. (Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Degilevich Egor A. (CMT-Engineering, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: DegilevichEgor@gmail.com

Статья поступила в редакцию 04.10.2022; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 04.10.2022; accepted for publication 10.07.2023