

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.54

doi: 10.17223/19988621/85/1

MSC: 30C45

**Об обобщении некоторых классов почти выпуклых
и типично вещественных функций****Федор Федорович Майер¹, Мейрамбек Габдулиевич Тастанов²,
Анар Алтаевна Утемисова³, Абдыкарим Тунгушбаевич Байманкулов⁴***^{1, 2, 3, 4} Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова,
Костанай, Казахстан**¹ maiyer@mail.ru**² tastao@mail.ru**³ anar_utemisova@mail.ru**⁴ bat_56@mail.ru*

Аннотация. В работе вводится класс $C(\lambda, a, \gamma) = \left\{ f(z) : \left| \left((1 - \lambda z^2) f'(z) \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a \right\}$,

$0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $a > 1/2$, почти выпуклых порядка γ функций, обобщающий классы функций с ограниченным вращением ($a \rightarrow +\infty, \lambda = 0$) и функций, выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси ($a \rightarrow +\infty, \lambda = 1$).

Для класса $C(\lambda, a, \gamma)$ и его подклассов найдены неувлучшаемые теоремы искажения и точные радиусы выпуклости, а также получены аналогичные результаты в классе, обобщающем класс типично вещественных функций.

Ключевые слова: геометрическая теория функций, однолистные функции, оценки аналитических функций, типично вещественные функции, радиусы выпуклости

Для цитирования: Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/85/1

On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions

Fedor F. Maiyer¹, Meyrambek G. Tastanov²,
Anar A. Utemisova³, Abdykarim T. Baimankulov⁴

^{1, 2, 3, 4} Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan

¹ maiyer@mail.ru

² tastao@mail.ru

³ anar_utemisova@mail.ru

⁴ bat_56@mail.ru

Abstract. The paper introduces a class $C(\lambda, a, \gamma)$ of functions $f(z)$, analytic in the unit disk $E = \{z : |z| < 1\}$, having a power series expansion of the form $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, $z \in E$, and satisfying the condition $\left| \left[(1 - \lambda z^2) f'(z) \right]^{\frac{1}{\gamma}} - a \right| \leq a$, where $0 \leq \lambda \leq 1$,

$0 < \gamma \leq 1$, and $a > \frac{1}{2}$. It is proved that all functions of class $C(\lambda, a, \gamma)$ are close-to-

convex of the order of γ . Class $C(\lambda, a, \gamma)$ generalizes classes of functions with bounded turning $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0$ (as $a \rightarrow +\infty$, $\lambda = 0$) and functions $f(z)$ convex in the direction of the imaginary axis $\operatorname{Re}[(1 - \lambda z^2) f'(z)] \geq 0$ ($a \rightarrow +\infty$, $\lambda = 1$) and creates a simple parametric passage from one class to another.

Based on the subordination method in class $C(\lambda, a, \gamma)$ and its subclasses, exact estimates are obtained for $|f'(z)|$, $|f(z)|$, $|zf''(z)/f'(z)|$ and the exact radii of the convexity. In particular cases, they yield previously known results for functions with bounded turning and functions convex in the direction of the imaginary axis.

Using the relationship $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma) \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in T(\lambda, a, \gamma)$, the article introduces the class $T(\lambda, a, \gamma) = \left\{ F(z) : \left| \left[(1 - \lambda z^2) F(z) / z \right]^{\frac{1}{\gamma}} - a \right| \leq a \right\}$ functions generalizing

the class of typically real functions and the class of functions satisfying the condition $\operatorname{Re}[F(z)/z] \geq 0$. In the class $T(\lambda, a, \gamma)$ and its subclasses, exact estimates of $|F(z)|$, $|zF'(z)/F(z)|$ are found and the exact radii of starlikeness are determined, which generalizes the classical results for typically real functions.

Keywords: geometric theory of functions, single-leaf functions, estimates of analytic functions, typically real functions, radii of convexity

For citation: Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemisova, A.A., Baimankulov, A.T. (2023) On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 5–21. doi: 10.17223/19988621/85/1

Введение

Пусть A – класс аналитических в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, имеющих разложение вида $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, $z \in E$, а S есть класс всех функций $f(z) \in A$, однолистных в E .

Уже не один десяток лет внимание многих математиков привлекают различные подклассы класса K почти выпуклых функций $f(z)$, введенного Одзаки [1] и Капланом [2] с помощью условия

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) \geq 0, \quad z \in E, \quad (1)$$

где $g(z)$ – аналитическая функция, отображающая круг E на какую-нибудь выпуклую область. Известно, что $K \subset S$ и подклассами класса K являются классы выпуклых S^0 и звездообразных S^* функций.

В работах М. Рида и А. Реньи [3, 4] с помощью условия

$$\left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| \leq \gamma \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad z \in E, \quad (2)$$

введен подкласс $K(\gamma)$ класса K функций $f(z)$, однолистных и почти выпуклых порядка γ .

Каждой функции $g(z) \in S^0$ соответствует свой подкласс почти выпуклых функций $f(z)$, наследующий в некоторой степени свойства функции $g(z)$.

Например, функциям $g_1(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, $g_2(z) = \frac{z}{1-z}$, $g_3(z) = -\ln(1-z)$ соответствуют следующие подклассы почти выпуклых функций: $\operatorname{Re}((1-z^2)f'(z)) \geq 0$, $\operatorname{Re}((1-z)^2 f'(z)) \geq 0$, $\operatorname{Re}((1-z)f'(z)) \geq 0$.

Среди таких подклассов особый интерес представляют функции, выпуклые в определенном направлении, а также классы функций, соединяющие с помощью параметра различные подклассы класса K . Например, в работе [5] исследовался класс функций, выпуклых в положительном направлении действительной оси (подкласс функций (1) с $g(z) = z/(1-z)$). Работа [6] дала толчок целому ряду исследований класса выпуклых в направлении мнимой оси функций, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}((1-z^2)f'(z)) \geq 0, \quad z \in E. \quad (3)$$

В работе [7] изучались свойства класса функций $f(z) \in A$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}((1-\lambda z^2)f'(z)) \geq 0$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $z \in E$. При $\lambda = 1$ получается условие на класс функций, выпуклых в направлении мнимой оси, а при $\lambda \rightarrow 0$ – условие $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0$ на класс функций с ограниченным вращением (подкласс функций (1) при $g(z) = z$), известное как признак однолистности Носиро [8] и Варшавского [9].

Как и для всего класса S однолистных функций, так и для его подклассов теоремы искажения интересовали многих математиков. Например, в числе первых точные оценки $|f'(z)|$ в классе $K(\gamma)$ были найдены в работе [4], для класса функций с условием (3) – в [10], а для класса функций с ограниченным вращением – в [11].

Введем класс $C(\lambda, a, \gamma)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $a > 1/2$, функций $f(z) \in A$, удовлетворяющих условию

$$\left| \left((1 - \lambda z^2) f'(z) \right)^{\gamma} - a \right| \leq a, z \in E. \quad (4)$$

Цель настоящей работы – нахождение неулучшаемых теорем искажения и точных радиусов выпуклости в классе $C(\lambda, a, \gamma) \subset K(\gamma)$, а также получение аналогичных результатов в некотором классе функций, построенном на основе класса $C(\lambda, a, \gamma)$ и обобщающем класс типично вещественных функций.

1. Описание основных классов функций

При $\gamma = 1/2$ условие (4) означает, что множество значений $(1 - \lambda z^2) f'(z)$, $z \in E$, содержится в области $\{w: |w^2 - a| < a, \operatorname{Re} w > 0\}$, ограниченной лемнискатой Бернулли. В общем случае, при $0 < \gamma \leq 1$, множество значений $(1 - \lambda z^2) f'(z)$, $z \in E$ содержится в области, симметричной относительно действительной оси, ограниченной кривой, сходной с правой половиной лемнискаты Бернулли с узловой точкой $w = 0$ и углом между касательными в узловой точке, равным $\gamma\pi$. При $a \rightarrow +\infty$ данная область преобразуется в угол $\{w: |\arg w| \leq \gamma\pi/2\}$.

Основным методом исследования в работе является метод подчиненности. Пусть функции $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ являются аналитическими в круге E и, кроме того, функция $\varphi_0(z)$ однолистка в круге E . Говорят, что функция $\varphi(z)$ подчинена функции $\varphi_0(z)$ в круге E и пишут $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. С учетом этого на языке подчиненности условие (4) можно записать в виде:

$$(1 - \lambda z^2) f'(z) \prec (w(z))^{\gamma}, w(z) = \frac{a(1+z)}{a - (a-1)z}, a > \frac{1}{2},$$

где $w(z)$ – отображение круга E на круг $\{w: |w - a| \leq a\}$. Поскольку $|\arg(w(z))| \leq \gamma\pi/2$, $z \in E$, то при любом $a > 1/2$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$|\arg((1 - \lambda z^2) f'(z))| \leq \gamma \frac{\pi}{2}, z \in E, \quad (5)$$

т.е. выполняется условие (2) с выпуклой в круге E функцией $g(z) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{1 + \sqrt{\lambda}z}{1 - \sqrt{\lambda}z}$,

так как $g'(z) = (1 - \lambda z^2)^{-1}$. Поэтому для всех $0 \leq \lambda \leq 1$, $a > 1/2$ класс $C(\lambda, a, \gamma)$

является подклассом класса $K(\gamma)$ функций $f(z)$, однолистных и почти выпуклых порядка γ .

Заметим, что при $a \rightarrow +\infty$ условие (4) преобразуется в условие (5). Поэтому при $\lambda = 1$ класс $C(\lambda, \infty, \gamma)$ совпадает с классом $C(\gamma)$ функций [12], почти выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси. Функции класса $C(\gamma)$ обладают наглядным геометрическим свойством [12]: область $f(E)$ достижима извне углами раствора $(1-\gamma)\pi$ с биссектрисами, параллельными мнимой оси.

Поскольку из условия (4) следует условие (5), то $C(1, a, \gamma) \subset C(\gamma)$ при любом $a > 1/2$. Кроме того, $C(\gamma) \subset C(1) = C$ при всех γ , $0 < \gamma \leq 1$, а C есть класс всех функций $f(z) \in A$, удовлетворяющих условию (3) и выпуклых в направлении мнимой оси [6, 10].

Класс C тесно связан с классом T типично вещественных функций, введенным В. Рогозински [13], который изучался в работах ряда авторов (см., напр., [13–15]). Функция $F(z) \in A$ называется типично вещественной, если $F(z)$ является вещественной при вещественном z и $\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ в остальных точках круга E . При этом (см.: [13])

$$F(z) \in T \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{1-z^2}{z} F(z) \right) \geq 0, z \in E. \quad (6)$$

Поэтому с помощью соотношения $F(z) = zf'(z)$ осуществляется простой переход от класса C к классу T и обратно. В связи с этим введем в рассмотрение класс $T(\lambda, a, \gamma)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $a > 1/2$, функций, удовлетворяющих условию

$$\left| \left(\frac{1-\lambda z^2}{z} F(z) \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a, z \in E. \quad (7)$$

Между функциями классов $C(\lambda, a, \gamma)$ и $T(\lambda, a, \gamma)$ существует простая связь:

$$f(z) \in C(\lambda, a, \gamma) \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in T(\lambda, a, \gamma). \quad (8)$$

Очевидно, что $T(\lambda, a, \gamma) \subset T(\lambda, \infty, \gamma)$, $T(1, \infty, \gamma) = T(\gamma) \subset T(1) = T$ для всех $a > 1/2$, $0 < \gamma \leq 1$. Таким образом, при $\lambda = 1$ все функции класса $T(\lambda, a, \gamma)$, $a > 1/2$, $0 < \gamma \leq 1$, являются типично вещественными.

2. Теоремы искажения в классах $C(\lambda, a, \gamma)$ и $T(\lambda, a, \gamma)$

В работе М. Рида [3] в классе $K(\gamma)$ почти выпуклых порядка γ функций найдена точная оценка

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Ее уточнение для класса $C(\lambda, a, \gamma)$ и его подклассов дает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$. Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r} \right)^\gamma \frac{1}{1+\lambda r^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^\gamma \frac{1}{1-\lambda r^2}, \quad (9)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} \right| \leq \frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)}. \quad (10)$$

Правая оценка в (9) достигается для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+t)}{a-(a-1)t} \right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2} \quad (11)$$

в точке $z=r$, оценка (10) – для функции (11) в точке $z=-r$, а левая оценка в (9) – в точке $z=ir$ для функции

$$f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+it)}{a-(a-1)it} \right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2}. \quad (12)$$

Доказательство. Поскольку $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$, то в силу (4) выполняется подчиненность

$$\varphi(z) = (1-\lambda z^2) f'(z) \prec \varphi_0(z) = \left(\frac{a(1+z)}{a-(a-1)z} \right)^\gamma. \quad (13)$$

Поэтому в силу (13) при любом $r, 0 < r < 1$, имеет место включение областей $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r)$, т.е., с учетом вида области $\varphi_0(E)$, в круге $|z| \leq r$ справедлива оценка

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r} \right)^\gamma \leq |(1-\lambda z^2) f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^\gamma. \quad (14)$$

Учитывая, что $1-\lambda|z|^2 \leq |1-\lambda z^2| \leq 1+\lambda|z|^2$, из последней оценки получаем

$$(1-\lambda r^2) |f'(z)| \leq |(1-\lambda z^2) f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^\gamma,$$

откуда вытекает правая оценка (9). Аналогично, поскольку

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r} \right)^\gamma \leq |(1-\lambda z^2) f'(z)| \leq (1+\lambda r^2) |f'(z)|,$$

получаем левую оценку (9).

Для доказательства оценки (10) нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть функция $\Phi(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1$, является аналитической в круге E и удовлетворяет условию

$$\left| \exp \left\{ \frac{1}{\gamma} \Phi(z) \right\} - a \right| \leq a, \quad a > \frac{1}{2}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (15)$$

Тогда в круге $|z| \leq r$ справедлива точная оценка

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{\gamma(2a-1)nr^{n-1}}{(1-r^n)(a+(a-1)r^n)}, \quad (16)$$

которая достигается для функции $\Phi(z) = \Phi_0(z^n)$ в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$, где

$$\Phi_0(z) = \gamma \ln \frac{a(1+z)}{a-(a-1)z}.$$

Доказательство леммы. Условие (15) равносильно тому, что $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$. Тогда, как показано в [16], в круге $|z| \leq r$ имеет место точная оценка

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{n \cdot r^{n-1}}{1-r^{2n}} \cdot R(D_0, \Phi(z)), \quad (17)$$

где $D_0 = \Phi_0(E)$, R – внутренний радиус области D_0 относительно точки $\Phi(z)$.

В силу свойств внутреннего радиуса области

$$R(D_0, \Phi_0(z)) = |\Phi'_0(z)| \cdot (1-|z|^2) = \frac{\gamma(2a-1) \cdot (1-|z|^2)}{|(1+z) \cdot (a+(a-1)z)|}.$$

Известно, что если область симметрична относительно некоторой прямой, не изменяется при ее симметризации относительно этой прямой и имеет ограниченный максимальный внутренний радиус, то его значение достигается в точке, лежащей на этой прямой. Учитывая, что область $D_0 = \Phi_0(E)$ симметрична относительно действительной оси и отрезок $[-1; 1] \in E$ преобразуется в луч $(-\infty; \gamma \ln 2a) \in \Phi_0(E)$, имеем

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi_0(z)) = \max_{-r \leq t \leq r} R(D_0, \Phi_0(t)).$$

Обозначим

$$\chi(t) = R(D_0, \Phi_0(t)) = \gamma(2a-1) \frac{(1-t)}{(a-(a-1)t)}, t \in [-r, r].$$

Поскольку $\chi'(t) < 0 \quad \forall t \in [-r, r]$, то на $[-r, r]$ максимум функции $\chi(t)$ достигается в точке $t = -r$. Следовательно,

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi_0(z)) = R(D_0, \Phi_0(-r)) = \gamma(2a-1) \frac{1+r}{(a+(a-1)r)}.$$

Поскольку $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$, то с учетом разложения $\Phi(z)$ в ряд Тейлора получаем, что $\Phi(|z| \leq r) \subset \Phi_0(|z| \leq r^n)$ при любом $r, 0 < r < 1$. Поэтому

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi(z)) \leq \max_{|z| \leq r^n} R(D_0, \Phi_0(z)) = \gamma(2a-1) \frac{1+r^n}{(a+(a-1)r^n)}.$$

Поэтому в силу (17) окончательно получаем

$$|\Phi'(z)| \leq \gamma(2a-1) \frac{n \cdot r^{n-1}}{1-r^{2n}} \cdot \frac{1+r^n}{(a+(a-1)r^n)},$$

что дает (16). Точность оценки (16) проверяется легко.

Докажем теперь оценку (10). В силу (13)

$$\Phi(z) = \ln((1-\lambda z^2) f'(z)) \prec \Phi_0(z) = \gamma \ln \left(\frac{a(1+z)}{a-(a-1)z} \right),$$

а это равносильно условию (15). Поэтому на основании леммы при $n=1$ получаем

$$\left| z \Phi'(z) \right| = \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} \right| \leq \frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)},$$

т.е. оценка (10) доказана.

Докажем точность оценок (9), (10).

Действительно, для функций (11) и (12) соответственно в точках $z=r$, $z=-r$ и $z=ir$ имеем

$$f_0'(z) = \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^\gamma \frac{1}{1-\lambda r^2}, \quad z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} = -\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)},$$

$$f_1'(z) = \left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r} \right)^\gamma \frac{1}{1+\lambda r^2},$$

т.е. оценки (9), (10) улучшить нельзя. Теорема 1 доказана.

Заметим, что предельный случай оценки (9) при $a \rightarrow +\infty$ получен в [7]. При $\lambda=1$ и $a \rightarrow +\infty$ класс $C(\lambda, a, \gamma)$ преобразуется в класс $C(\gamma) = C(1, +\infty, \gamma)$ функций [12], почти выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси. В этом случае из теоремы 1 вытекает следующий известный результат.

Следствие 1. Пусть функция $f(z) \in C(\gamma)$, т.е. удовлетворяет условию (5) при $\lambda=1$. Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma \frac{1}{1+r^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{1}{1-r^2}, \quad (18)$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (19)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2}. \quad (20)$$

Оценки (18) и (20) вытекают из оценок (9), (10) при $\lambda=1$ и $a \rightarrow +\infty$. Оценка (19) получается из (18) интегрированием по отрезку от 0 до r .

Правая оценка в (18) и оценка (19) достигаются для функции

$$f_0(z) = \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\gamma - 1 \right) \text{ в точке } z=r, \text{ оценка (20) достигается для этой же функ-}$$

ции в точке $z=-r$.

$$\text{Левая оценка (19) достигается для функции } f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{1+it}{1-it} \right)^\gamma \frac{dt}{1-t^2} \text{ в точке}$$

$z=ir$, что проверяется непосредственным вычислением.

Следствие 1 получено в [12], а при $\gamma=1$ оценка (18) получена в [10], позже, как частный случай, в [7].

При $\lambda=0$ из теоремы 1 получаем оценки в одном из подклассов функций с ограниченным вращением.

Следствие 2. Пусть функция $f(z) \in C(0, a, \gamma)$, т.е. удовлетворяет условию

$$\left| (f'(z))^{\frac{1}{\gamma}} - a \right| \leq a, z \in E.$$

Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r} \right)^{\gamma} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^{\gamma}, \quad (21)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r}. \quad (22)$$

Правая оценка в (21) и оценка (22) достигаются для функции $f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+t)}{a-(a-1)t} \right)^{\gamma} dt$ соответственно в точках $z=r$ и $z=-r$, а левая оцен-

ка в (21) – для функции $f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+it)}{a-(a-1)it} \right)^{\gamma} dt$ в точке $z=ir$.

При $\lambda = \gamma = 1$ из теоремы 1 вытекает следствие 3.

Следствие 3. Пусть функция $f(z) \in C(1, a, 1)$, т.е. удовлетворяет условию

$$\left| (1-z^2)f'(z) - a \right| \leq a, z \in E.$$

Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\frac{a(1-r)}{(a+(a-1)r)(1+r^2)} \leq |f'(z)| \leq \frac{a}{(a-(a-1)r)(1-r)}, \quad (23)$$

$$|f(z)| \leq \ln \frac{a-(a-1)r}{a(1-r)}, \quad (24)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)}. \quad (25)$$

Правая оценка в (23), оценка (24) и оценка (25) достигаются для функции $f_0(z) = \ln \frac{a-(a-1)z}{a(1-z)}$ соответственно в точках $z=r$, $z=r$ и $z=-r$, а левая

оценка (23) достигаются для функции $f_1(z) = \int_0^z \frac{a(1+it)dt}{(a-(a-1)it)(1-t^2)}$ в точке $z=ir$.

Взаимосвязь (8) классов $C(\lambda, a, \gamma)$ и $T(\lambda, a, \gamma)$ позволяет легко получить оценки в классе $T(\lambda, a, \gamma)$, которые вытекают непосредственно из теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $F(z) \in T(\lambda, a, \gamma)$. Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$|F(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^{\gamma} \frac{r}{1-\lambda r^2}, \quad (26)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+\lambda z^2}{1-\lambda z^2} \right| \leq \frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)}, \quad (27)$$

которые достигаются для функции

$$F_0(z) = \left(\frac{a(1+z)}{a-(a-1)z} \right)^\gamma \frac{z}{1-\lambda z^2}$$

в точках $z = r$ (оценка (26)) и $z = -r$ (оценка (27)).

Доказательство. Оценка (26) получается сразу из оценки (9) с учетом соотношения $F(z) = zf'(z)$. Учитывая, что в силу данного соотношения

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{zF'(z)}{F(z)} - 1,$$

из оценки (10) получаем оценку (27). Точность оценок проверяется непосредственным расчетом.

Следствие 4. Если функция $F(z) \in T(\gamma)$, то в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$|F(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{r}{1-r^2}, \quad (28)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2}, \quad (29)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+2\gamma r+r^2}{1-r^2}, \quad (30)$$

$$|F'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{1+2\gamma r+r^2}{(1-r^2)^2}. \quad (31)$$

Экстремальная функция имеет вид $F_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\gamma \frac{z}{1-z^2}$.

Доказательство. При $\lambda = 1$, $a \rightarrow +\infty$ класс $T(\lambda, a, \gamma)$ преобразуется в подкласс $T(\gamma) = T(1, +\infty, \gamma)$ класса T типично вещественных функций [13–15]. В силу этого непосредственно из теоремы 2 вытекают оценки (28)–(29). Оценка (30) непосредственно следует из (29). Поскольку в силу (28) $\left| \frac{z}{F(z)} \right| \geq \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma (1-r^2)$,

то с учетом оценки (30) находим

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma (1-r^2) |F'(z)| \leq \left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+2\gamma r+r^2}{1-r^2}.$$

Отсюда получается оценка (31). Оценки (28)–(31) достигаются в точке $z = r$, что устанавливается непосредственной проверкой.

При $\gamma = 1$ следствие 4 дает следующий результат.

Следствие 5. Если функция $F(z)$ является типично вещественной в круге E , тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$|F(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad (32)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}, \quad (33)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad (34)$$

$$|F'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad (35)$$

которые достигаются для функции $F_0(z) = z/(1-z)^2$ в точке $z = r$.

Отметим, что оценки (33)–(34) получены в [15], а оценки (32) и (35) вытекают из результатов работы [14].

3. Радиусы выпуклости и звездообразности

С помощью оценки (10) нетрудно найти радиус выпуклости класса $C(\lambda, a, \gamma)$, т.е. наибольшее из чисел r , $0 < r < 1$, таких что каждая функция $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$ отображает круг $|z| \leq r$ на выпуклую область.

Теорема 3. Радиус выпуклости r_0 класса $C(\lambda, a, \gamma)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)} - \frac{1-\lambda r^2}{1+\lambda r^2} = 0 \quad (36)$$

и достигается в точке $z = ir_0$ для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+it)}{a-(a-1)it} \right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2}.$$

Доказательство. В силу оценки (10) в круге $|z| \leq r$ получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} &\geq -\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)} + \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} = \\ &= -\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)} - \frac{2\lambda r^2}{1+\lambda r^2}. \end{aligned}$$

В силу условия выпуклости $\operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -1$ функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$, где r_0 – наименьший положительный корень уравнения (36).

Для экстремальной функции $f_0(z)$ имеем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{\gamma(2a-1)iz}{(1+iz)(a-(a-1)iz)} + \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2}.$$

Поэтому в точке $z = ir_0$ получаем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} + 1 = -\frac{\gamma(2a-1)r_0}{(1-r_0)(a+(a-1)r_0)} - \frac{2\lambda(r_0)^2}{1+\lambda(r_0)^2} + 1.$$

Следовательно, радиус выпуклости увеличить нельзя. Теорема доказана.

Теорема 3 при $\lambda = 1$, $a \rightarrow +\infty$ дает радиус выпуклости класса $C(\gamma) = C(1, \infty, \gamma)$, полученный в [12], при $\gamma = 1$ – в [10], при $\lambda = 0$, $a \rightarrow +\infty$ – радиус выпуклости класса $C(0, \infty, \gamma) = \{f(z) : |\arg f'(z)| \leq \gamma\pi/2, z \in E\}$, равный $r_0 = \sqrt{\gamma^2 + 1} - 1$, получен в [17] (следствие 1, случай $n = 1$), и при $\gamma = 1$ дает известный результат [11] о радиусе выпуклости $r_0 = \sqrt{2} - 1$ класса функций с ограниченным вращением $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0, z \in E$.

Используя хорошо известную связь выпуклых и звездообразных функций $f(z) \in S^0 \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in S^*$, а также соотношение (8), из теоремы 3 получаем радиус звездообразности класса $T(\lambda, a, \gamma)$.

Следствие 4. Пусть $F(z) \in T(\lambda, a, \gamma)$. Тогда функция $F(z)$ является звездообразной в круге $|z| \leq r^*$, где r^* – наименьший положительный корень уравнения (36). Радиус звездообразности является точным.

При $\lambda = 1$, $\gamma = 1$, $a \rightarrow +\infty$, учитывая, что $T(1, +\infty, 1) = T$, следствие 4 дает точный радиус звездообразности класса типично вещественных функций

$$r^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \right),$$

ранее найденный независимо друг от друга в работах [15, 18].

Кроме того, при $\lambda = 0$, $\gamma = 1$, $a \rightarrow +\infty$ получается точный радиус звездообразности [11] $r^* = \sqrt{2} - 1$ класса функций $F(z) \in A$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}(F(z)/z) \geq 0, z \in E$.

4. Случай функции с пропуском второго члена в разложении в степенной ряд

В случае когда функции $f(z), F(z)$ в разложении в степенной ряд имеют пропуски членов, теоремы 1–4 и их следствия можно уточнить. Пусть в разложении $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, z \in E$, в ряд Тейлора $a_2 = 0$, т.е.

$$f(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots, z \in E. \quad (37)$$

Тогда в разложении в степенной ряд функции $F(z) = zf'(z)$ второй член тоже будет равен нулю.

Теорема 5. Пусть функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (37) и $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$. Тогда в круге $|z| \leq r$ выполняются оценки

$$|f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r^2)}{a-(a-1)r^2} \right)^\gamma \frac{1}{1-\lambda r^2}, \quad (38)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} \right| \leq \frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2)(a+(a-1)r^2)}, \quad (39)$$

Оценки (38)–(39) точные и достигаются для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+t^2)}{a-(a-1)t^2} \right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2} \quad (40)$$

соответственно в точках $z = r$ и $z = ir$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, имеет место подчиненность (13), однако в силу разложения (37) функция $\varphi(z) = (1-\lambda z^2)f'(z)$ будет разлагаться в ряд вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ с $n \geq 2$. Поэтому из подчиненности (13) следует, что $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$ при любом r , $0 < r < 1$, и, следовательно,

$$\left| (1-\lambda z^2)f'(z) \right| \leq \left(\frac{a(1+r^2)}{a-(a-1)r^2} \right)^\gamma,$$

откуда вытекает оценка (38).

Аналогично, $\Phi(z) = \ln((1-\lambda z^2)f'(z))$ имеет разложение вида $\Phi(z) = c_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 2$, поэтому с использованием оценки (16) при $n = 2$ получаем неравенство (39).

Теорема 6. Пусть функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (37) и $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$. Тогда функция $f(z)$ будет выпуклой в круге $|z| \leq r$, где $r = r_0$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2) \cdot (a+(a-1)r^2)} - \frac{1-\lambda r^2}{1+\lambda r^2} = 0. \quad (40)$$

Радиус выпуклости r_0 является точным и достигается для функции (40) в точке $z = ir$.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 3 в силу оценки (39) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} &\geq -\frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2)(a+(a-1)r^2)} + \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} = \\ &= -\frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2)(a+(a-1)r^2)} - \frac{2\lambda r^2}{1+\lambda r^2}. \end{aligned}$$

В силу условия выпуклости $\operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -1$ функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$, где r_0 – наименьший положительный корень уравнения (41).

Для функции (40) имеем $f_0(z) = z + a_3 z^3 + \dots \in C(\lambda, a, \gamma)$, кроме того,

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{2\gamma(2a-1)z^2}{(1-z^2)(a-(a-1)z^2)} + \frac{2\lambda z^2}{1+\lambda z^2},$$

и в точке $z = ir_0$ получаем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} + 1 = -\frac{2\gamma(2a-1)r_0^2}{(1-r_0^2)(a+(a-1)r_0^2)} - \frac{2\lambda(r_0)^2}{1+\lambda(r_0)^2} + 1.$$

Следовательно, радиус выпуклости увеличить нельзя.

Рассмотрим два частных случая. При $\lambda = 0$, $a \rightarrow +\infty$ из (41) получаем уравнение $r^4 + 4\gamma r^2 - 1 = 0$, откуда

$$r_0 = \sqrt{\sqrt{4\gamma^2 + 1} - 2\gamma}. \quad (42)$$

Если $\lambda = 1$, $a \rightarrow +\infty$, то (41) преобразуется в уравнение

$$r^6 - (4\gamma + 1)r^4 - (4\gamma + 1)r^2 + 1 = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$(r^4 - 2(2\gamma + 1)r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0,$$

откуда находим

$$r_0 = \sqrt{2\gamma + 1 - 2\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}}. \quad (43)$$

Таким образом, доказано

Следствие 5. Пусть функция $f(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$ является аналитической в круге E . Тогда точные радиусы выпуклости классов функций с условием $|\arg f'(z)| \leq \gamma\pi/2$ или $|\arg((1-z^2)f'(z))| \leq \gamma\pi/2$ определяются соответственно по формулам (42) и (43).

Для класса функций $|\arg f'(z)| \leq \gamma\pi/2$ радиус выпуклости (42) получен в [17] (следствие 1, случай $n = 2$), а для класса функций $|\arg((1-z^2)f'(z))| \leq \gamma\pi/2$ радиус выпуклости (43) получен в [12].

Заметим, что разложение $f(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$, в частности, будет иметь место, если функция $f(z)$ является нечетной. В этом случае $f(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$

Заключение

В работе введены два взаимосвязанных друг с другом класса аналитических в единичном круге E функций.

Первый из них является подклассом класса почти выпуклых порядка γ функций и обобщает классы функций с ограниченным вращением и функций, выпуклых в направлении мнимой оси. Второй из классов обобщает класс типично вещественных функций и функций, для которых $\operatorname{Re} F(z)/z \geq 0$. На основе метода подчиненности в данных классах функций получены теоремы искажения и найдены радиусы выпуклости (звездообразности). Все результаты являются точными и дают обобщения целого ряда ранее известных результатов. Дополнительно рассмотрен случай, когда разложение функций этих классов в степенной ряд имеет пропуск второго члена.

Список источников

1. Ozaki S. On the theory of multivalent functions // Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A. Math. Phys. Chem. 1935. V. 2. P. 167–188.
2. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. 1952. № 1 (2). P. 169–185. doi: 10.1307/mmj/1028988895
3. Reade M. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. 1956. V. 23 (3). P. 459–462. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0
4. Renyi A. Some remarks on univalent functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sec. A. 1959. V. 3. P. 111–121. URL: <http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>
5. Bshouty D., Lyzzaik A. Univalent functions starlike with respect to a boundary point // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 83–87.
6. Robertson M.S. Analytic functions star-like in one direction // Amer. J. Math. 1936. V. 58 (3). P. 465–472. doi: 10.2307/2370963
7. Lecko A. Some subclasses of close-to-convex functions // Annales Polonici Mathematici. 1993. V. 58 (1). P. 53–64. URL: <https://bibliotekanauki.pl/articles/1311892>
8. Noshiro K. On the theory of schlicht functions // J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I Math. 1934. V. 2 (3). P. 129–155. doi: 10.14492/hokmj/1531209828
9. Warschawski S.E. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping // Trans. Am. Math. Soc. 1935. V. 38 (2). P. 310–340. doi: 10.1090/S0002-9947-1935-1501813-X
10. Hengartner W., Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 28 (2). P. 519–524. URL: <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
11. MacGregor T. Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 104. P. 532–537. doi: 10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7
12. Майер Ф.Ф. Геометрические свойства некоторых классов аналитических в круге функций, выпуклых в направлении мнимой оси // Вестник науки Костанайского государственного университета им. А. Байтурсынова. Сер. естественно-технических наук. 2002. Т. 6, № 2. С. 48–50. URL: https://nauka.kz/page.php?page_id=372&lang=3&page=5931
13. Rogosinski W. Über Positive Harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen // Math. Zeitschr. 1932. V. 35 (1). P. 93–121. doi: 10.1007/BF01186552
14. Голузин Г.М. О типично вещественных функциях // Математический сборник. Новая сер. 1950. Т. 27 (69), № 2. С. 201–218. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5913&option_lang=eng
15. Гельфер С.А. Типично вещественные функции // Математический сборник. Новая сер. 1964. Т. 64 (106), № 2. С. 171–184. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4441&option_lang=rus
16. Митюк И.П. Оценки в некоторых классах аналитических функций // Метрические вопросы теории функций. Киев : Наукова думка, 1980. С. 90–99.
17. Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Козловский С.А. Точные оценки и радиусы выпуклости некоторых классов аналитических функций // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14, № 1. С. 42–49. doi: 10.14529/mmph220105
18. Libera R.J. Some radius of convexity problems // Duke Math. J. 1964. V. 31(1). P. 143–158. doi: 10.1215/S0012-7094-64-03114-X

References

1. Ozaki S. (1935) On the theory of multivalent functions. *Science reports of the Tokyo Bunrika Daigaku section A, Mathematics, physics, chemistry*. 2. pp. 167–188.
2. Kaplan W. (1952) Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Mathematical Journal*. 1(2). pp. 169–185. DOI: <https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895>

3. Reade M. (1956) The coefficients of close-to-convex functions. *Duke Mathematical Journal*. 23(3). pp. 459–462. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>
4. Renyi A. (1959) Some remarks on univalent functions. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, sectio A – Mathematica*. 3. pp. 111–121. DOI: <http://sci-gems.math.bas.bg/8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>
5. Bshouty D., Lyzzaik A. (2005) Univalent functions starlike with respect to a boundary point // *Contemp. Math*. 382. pp. 83–87.
6. Robertson M.S. (1936) Analytic functions star-like in one direction // *Amer. J. Math*. 58(3). pp. 465–472. doi: <https://doi.org/10.2307/2370963>
7. Lecko A. (1993) Some subclasses of close-to-convex functions // *Annales Polonici Mathematici*. 58(1). pp. 53–64. <https://bibliotekanauki.pl/articles/1311892>
8. Noshiro K. (1934) On the theory of schlicht functions. *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University. Series 1, Mathematics*. 2(3). pp. 129–155. DOI: <https://doi.org/10.14492/hokmj/1531209828>
9. Warschawski S.E. (1935) On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. *Transactions of the American Mathematical Society*. 38(2). pp. 310–340. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1935-1501813-X>
10. Hengartner W., Schober G. (1971) Analytic functions close to mappings convex in one direction. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 28(2). pp. 519–524. <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
11. MacGregor T. (1962) Functions whose derivative has a positive real part. *Transactions of the American Mathematical Society*. 104. pp. 532–537. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7>
12. Mayer F.F. (2002) Geometricheskiye svoystva nekotorykh klassov analiticheskikh v krughe funktsiy, vypuklykh v napravlenii mnimoy osi. [Geometric properties of some classes of functions analytic in a circle and convex in the direction of the imaginary axis]. *Kostanay. Vestnik nauki KGU im. A. Baytursynova. Seriya estestvenno-tekhnicheskikh nauk*. 6(2). pp. 48–50. DOI: https://nauka.kz/page.php?page_id=372&lang=3&page=5931
13. Rogosinski W. (1932) Über Positive Harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen. *Mathematische Zeitschrift*. 35(1). pp. 93–121. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01186552>
14. Goluzin G.M. (1950) O tipichno veshchestvennykh funktsiyakh. [On typically real functions]. *Matematicheskii sbornik*. 27(69). pp. 201–218. DOI: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5913&option_lang=eng
15. Gel'fer S.A. (1964) Tipichno veshchestvennyye funktsii [Typically real functions]. *Matematicheskii sbornik*. 64(106). pp. 171–184. DOI: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4441&option_lang=rus
16. Mityuk I.P. (1980) Otsenki v nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy [Estimates in some classes of analytic functions]. *Metricheskie voprosy teorii funktsij*. Kiev: Naukova dumka.
17. Mayer F.F., Tastanov M.G., Utemisova A.A., Kozlovskiy S.A. (2022) Tochnyye otsenki i radiusy vypuklosti nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy [Exact estimates and radii of convexity of some classes of analytic functions]. *Vestnik YuUrGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika*. 14(1). pp. 42–49. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph220105>
18. Libera R.J. (1964) Some radius of convexity problems. *Duke Mathematical Journal*. 31(1). pp. 143–158. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03114-X>

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: maiyer@mail.ru

Тастанов Мейрамбек Габдулиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: tastao@mail.ru

Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Байманкулов Абдыкарим Тунгушбаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: bat_56@mail.ru

Information about the authors:

Mayer Fedor F. (Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: maiyer@mail.ru

Tastanov Meyrambek G. (Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: tastao@mail.ru

Utemisova Anar A. (Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Baimankulov Abdykarim T. (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: bat_56@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27.02.2023; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 27.02.2023; accepted for publication 10.10.2023