

Научная статья

УДК 536.2; 544.012

doi: 10.17223/19988621/86/3

Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 1. Теоретические исследования

Борис Владимирович Бошнятов¹, Анатолий Алексеевич Глазунов²,
Александр Николаевич Ищенко³, Юлия Николаевна Карнет⁴

^{1,4} *Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия*

^{2,3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *bosbosh@mail.ru*

² *gla@niipmm.tsu.ru*

³ *ichan@niipmm.tsu.ru*

⁴ *iam@iam.ras.ru*

Аннотация. В математически строгой постановке, используя классические уравнения гидродинамики, рассмотрен стационарный процесс молекулярного теплопереноса в двухфазных дисперсных средах повышенной концентрации. На основе решения краевой задачи для N -частичной дисперсной среды с учетом дистанционного взаимодействия частиц установлена область применимости теоретических моделей теплопроводности, которые не учитывают взаимодействие частиц. Получена аналитическая зависимость для эффективного коэффициента теплопроводности в структурно-симметричных дисперсных средах, в которых нельзя четко выделить непрерывную компоненту.

Ключевые слова: дисперсные среды, композитные материалы, взаимодействие дисперсных частиц, уравнение Лапласа, эффективный коэффициент теплопроводности

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 121112200122-7, госзадание FSWM-2020-0032).

Для цитирования: Бошнятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н. Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 1. Теоретические исследования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3

Original article

Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersive media. 1. Theoretical study

Boris V. Boshenyatov¹, Anatoliy A. Glazunov²,
Aleksandr N. Ishchenko³, Yuliya N. Karnet⁴

^{1,4} *Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^{2,3} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *bosbosh@mail.ru*

² gla@niipmm.tsu.ru

³ ichan@niipmm.tsu.ru

⁴ iam@iam.ras.ru

Abstract. It is traditionally believed that various theories and formulas for averaging (homogenization) the properties of inhomogeneous dispersive media, which do not take into account the distance interaction of dispersed particles, are applicable only at low volume concentrations of particles $0 < f_2 < 0.1$. The molecular heat transfer in two-phase dispersive media, both with and without allowance for the interaction of identical spherical particles, is considered in a mathematically rigorous formulation using the method of physical analogy and the concept of the Lorentz local field. It is shown that with an increase in the volume concentration of dispersed particles, the main influence on the effective thermal conductivity coefficient of the medium is exerted by a geometric constraint factor of the carrier phase, which is taken into account by the classical Maxwell's (Clausius–Mossotti) formula. The analytical dependences of the error in the Maxwell's formula, due to the neglected interaction of particles, on the concentration f_2 of the particles and the relative thermal conductivity of phases λ_2/λ_1 are obtained. Two corollaries from the Maxwell's formula are derived. The first corollary determines the exact boundaries enclosing the effective thermal conductivity coefficients of homogeneous and isotropic suspensions. They coincide with the known Hashin–Shtrikman bounds. The second corollary gives an exact solution that is invariant with respect to the phase inversion transformation. This solution is used to calculate the effective thermal conductivity coefficient in three-dimensional disordered structurally symmetric two-phase media.

Keywords: dispersive media, composite materials, interaction of dispersed particles, Laplace's equation, effective thermal conductivity coefficient

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state order No. 121112200122-7).

For citation: Boshenyatov, B.V., Glazunov, A.A., Ishchenko, A.N., Karnet, Yu.N. (2023) analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersive media. 1. Theoretical study. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3

Введение

Дисперсные среды (суспензии, эмульсии, композитные материалы и др.) широко распространены в природе и промышленном производстве [1–3]. Однако математическое описание законов движения [4–6] и определение физических характеристик таких сред, в особенности при повышенных концентрациях дисперсной фазы [7–9], до сих пор являются одними из наиболее сложных проблем физики и механики. Дело в том, что при этом необходимо учитывать дистанционное взаимодействие частиц, так называемое гидродинамическое взаимодействие [10–12].

Гидродинамическое взаимодействие возникает из-за того, что каждая дисперсная частица при движении генерирует в окружающей жидкости соответствующее поле скоростей. При повышенной концентрации дисперсной фазы частицы взаимодействуют друг с другом посредством этих гидродинамических полей возмущений; таким образом, движение каждой частицы зависит не только

от координат, но и от скоростей окружающих ее дисперсных частиц [12–14]. Для определения усредненных, эффективных характеристик (гомогенизации) такой дисперсной среды в строгой постановке необходимо вначале найти ее локальные характеристики, т.е. решить задачу о динамике N частиц, произвольным образом расположенных в пространстве, с учетом их гидродинамического взаимодействия. Эффективные характеристики дисперсной среды получают последующим усреднением локальных характеристик. Первая задача оказалась чрезвычайно сложной, поскольку является разновидностью известной в науке фундаментальной проблемы многих тел, которая до сих пор не имеет общего решения. Достаточно сказать, что первые работы [15–17], в которых удалось в первом приближении по концентрации учесть гидродинамическое взаимодействие сферических частиц [18], появились лишь приблизительно через 100 лет после создания теории электропроводности и вязкости разреженной суспензии, в которой взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь [19, 20].

Следует отметить, что аналог гидродинамического взаимодействия имеет место и при взаимном влиянии полей возмущений иной физической природы, создаваемых дисперсными частицами в окружающей дисперсионной жидкости (или матрице), например тепловых или электромагнитных полей, в том числе при взаимодействии дисперсных частиц в жестких структурах – кластерах [21], и композитных материалах [22]. Так, в диэлектриках из композитного материала в локальное электрическое поле, действующее на каждую частицу, дополнительный вклад будет давать поляризация дисперсных частиц, находящихся по соседству, которая зависит от их формы, ориентации и пространственной структуры композита.

Как правило, задача о гидродинамическом взаимодействии (или аналогичном взаимодействии других полей) решается прямыми численными расчетами [23] или статистическими методами [3] с последующим вычислением на ЭВМ сложных интегралов, в приближении идеальной ($Re \gg 1$) или вязкой несжимаемой жидкости при числах Рейнольдса $Re \ll 1$ [24, 25].

Решение задачи о динамике N взаимодействующих сферических частиц в строгой математической постановке впервые было получено в работах [26, 27] на основе разработанного под руководством академика В.В. Струминского метода самосогласованного поля. Построенный метод позволяет, используя классические уравнения гидродинамики, получать аналитические решения разных классов задач (осаждение свободных частиц, движение тел в дисперсной среде, движение жестких кластерных структур в жидкости и др.) с учетом взаимодействия частиц без использования каких бы то ни было допущений эвристического характера.

В данной работе рассмотрен стационарный процесс молекулярного теплопереноса в двухфазных дисперсных средах в математически строгой постановке, с использованием единого подхода, основанного на концепции локального поля Лоренца и методе физической аналогии, пригодного для решения задач как без учета, так и с учетом взаимодействия сферических дисперсных частиц.

Преимуществом данного метода являются его универсальность и представление конечного результата в виде простых аналитических формул, не требующих сложных вычислительных процедур на ЭВМ для каждого конкретного случая. Универсальность метода обеспечивается тем, что при феноменологическом подходе не рассматриваются конкретные механизмы теплопереноса на молекуляр-

ном уровне (коэффициенты теплопроводности в каждой из двух фаз заданы), поэтому метод пригоден для описания теплопроводности в любых дисперсных средах независимо от агрегатного состояния фаз: суспензиях, эмульсиях, композитах, аэрозолях и др.

Во второй части исследования достоверность полученных в данной работе теоретических результатов подтверждается сравнением с экспериментами.

Макроскопическая модель теплопроводности в двухфазных дисперсных средах

Вначале рассмотрим в наиболее общем виде двухфазную дисперсную среду ($i = 1, 2$), состоящую из однородных и изотропных фаз с известными коэффициентами молекулярной теплопроводности λ_i , Дж/мс К. Каждая фаза занимает свой неизменный объем и может находиться в любом из трех агрегатных состояний. Пусть внутри каждой фазы теплопроводность описывается линейным законом Фурье

$$\mathbf{q}_i = -\lambda_i \nabla T_i, \quad (1)$$

где \mathbf{q}_i – поток тепловой энергии, Дж/м²с; ∇T_i – локальный градиент температуры внутри i -й компоненты смеси, К/м. Для макроскопического описания процесса теплопереноса в такой двухкомпонентной среде в общем случае используют симметричный тензор второго ранга, называемый эффективным коэффициентом теплопроводности среды λ^* , который также линейно связывает усредненные векторные поля:

$$\langle \mathbf{q}_i \rangle = -\lambda^* \langle \nabla T_i \rangle. \quad (2)$$

Угловые скобки в уравнении (2) и далее означают усреднение по ансамблю реализаций, которое в случае справедливости эргодической гипотезы совпадает с усреднением по представительному объему Ω , размер которого должен быть достаточно большим по сравнению с масштабом структурных неоднородностей среды, но достаточно малым по сравнению с масштабом неоднородностей усредненного таким образом поля температур. В макроскопическом масштабе эффективных параметров дисперсной среды объем Ω , по существу, является физической точкой. Пусть две фазы среды полностью заполняют объем усреднения Ω , тогда справедливо соотношение $f_1 + f_2 = 1$, где $f_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$ – объемная доля i -й фазы.

Проведя соответствующие усреднения в уравнении (2)

$$\langle \mathbf{q}_i \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \mathbf{q}_i dx dy dz, \quad \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \nabla T_i dx dy dz \quad (3)$$

и используя закон Фурье (1), получим два уравнения:

$$\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle f_1 + \langle \nabla T_2 \rangle f_2, \quad (4)$$

$$\lambda^* \langle \nabla T \rangle = \lambda_1 \langle \nabla T_1 \rangle f_1 + \lambda_2 \langle \nabla T_2 \rangle f_2. \quad (5)$$

В уравнениях (4), (5) параметры f_i , λ_i и напряженность внешнего поля $\langle \nabla T \rangle$ заданы.

Отметим, что поскольку дисперсная среда состоит из однородных и изотропных компонент, то коэффициенты теплопроводности λ_1 и λ_2 являются скалярами.

Из уравнений (4) и (5) следует формула для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в безразмерном виде [28]:

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha - 1} = \frac{\Psi_{21} f_2}{1 - (1 - \Psi_{21}) f_2}. \quad (6)$$

Здесь $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1}$, $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; неизвестный линейный оператор Ψ_{21} ($\Psi_2 = \Psi_{21}\Psi_1$) находится как результат решения задачи о взаимодействии фаз [10], где $\Psi_i = \frac{\langle \nabla T_i \rangle \langle \nabla T \rangle}{\langle \nabla T \rangle^2}$.

В рамках макроскопических уравнений (4), (5) задача о взаимодействии фаз имеет точные решения лишь для простейшей анизотропной среды, состоящей из неограниченных слоистых структур. Если слои параллельны интенсивности внешнего поля $\mathbf{E} = \langle \nabla T \rangle$, то $\langle \nabla T_1 \rangle = \langle \nabla T_2 \rangle$. Подставляя в формулу (6) $\Psi_{21} = 1$, получим $\lambda_{\pm}^* = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Если слои перпендикулярны интенсивности внешнего поля, то $\lambda_1 \langle \nabla T_1 \rangle = \lambda_2 \langle \nabla T_2 \rangle$ и $\Psi_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, соответственно, $\frac{1}{\lambda_{\perp}^*} = \frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{f_2}{\lambda_2}$. Эти точные решения совпадают с так называемыми границами Винера

$$\lambda_{\perp}^* \leq \lambda^* \leq \lambda_{\parallel}^*, \quad (7)$$

которые были получены вариационным методом в работе [29]. Там же было показано, что неравенства (7) определяют диапазон возможных значений эффективных коэффициентов теплопроводности для любых анизотропных дисперсных сред, когда о них известны лишь сведения о коэффициентах λ_i и концентрациях f_i .

Во всех других случаях конкретную задачу о взаимодействии фаз необходимо решать на более детальном микроструктурном уровне, решая уравнение Лапласа для дисперсной среды при соответствующих граничных условиях на бесконечности и межфазных границах с использованием дополнительной (к заданным λ_i и f_i) информации о форме дисперсных частиц и статистических характеристиках, которые дают полное представление о внутренней структуре среды. Для дисперсных частиц сферической формы задача о взаимодействии фаз может быть решена математически строго как без учета, так и с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц.

Отметим, что теплопроводность и другие аналогичные физические процессы, такие как электропроводность (коэффициент σ), диффузия (коэффициент D), электро- и магнитостатика (коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости ϵ и μ соответственно), описываются одинаковыми уравнениями и граничными условиями [28], т.е. в безразмерном виде все эти задачи математически полностью эквивалентны. Поэтому для сравнения теоретических моделей и экспериментов по теплопроводности могут быть использованы данные для любых других аналогичных коэффициентов, поскольку

$$\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1} = \frac{\sigma^*}{\sigma_1} = \frac{D^*}{D_1} = \frac{\epsilon^*}{\epsilon_1} = \frac{\mu^*}{\mu_1}$$

и $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Аналитическая модель теплопроводности в дисперсной среде произвольной концентрации без учета коллективного взаимодействия частиц

Рассмотрим точные решения задачи о теплопроводности в двухфазной дисперсной среде сферических частиц, которые диспергированы в непрерывной фазе случайным образом, статистически однородно и изотропно. Для такой среды искомый эффективный коэффициент теплопроводности λ^* в уравнениях (4)–(6) является скаляром.

Для решения задачи о взаимодействии фаз используем «принцип локальности» процесса теплопроводности, который следует из линейности определяющих уравнений и граничных условий. Принцип локальности означает, что градиент локального поля внутри каждой дисперсной частицы ∇T_2 однозначно (через искомый линейный оператор Ψ_{21}) определяется градиентом поля температур в дисперсионной жидкости ∇T_1 в той же точке. В объеме усреднения Ω градиент локального поля для каждой k -й частицы $\nabla T_1^{(k)}$ вычисляется в центре сферической полости, если из среды удалить эту частицу. Локальное поле в диэлектриках, пренебрегая коллективным взаимодействием сферических молекул, впервые вычислил Людвиг Лоренц [30], поэтому часто это поле называют «локальное поле Лоренца». В общем случае $\nabla T_1^{(k)}$ зависит не только от λ_i и f_i , но и от пространственной конфигурации частиц и их коллективного взаимодействия.

Если коллективное взаимодействие дисперсных частиц не учитывать, то оператор Ψ_{21} находится из решения краевой задачи уравнения Лапласа для одиночной сферы, находящейся в однородном внешнем поле $\langle \nabla T \rangle$. Ясно, что в данном случае внешнее поле является и локальным полем сферы $\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle$. Точное решение этой задачи (при идеальном тепловом контакте фаз: $T_1 = T_2$ и $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$, где \mathbf{n} – нормаль к поверхности раздела фаз) дано в монографии [31] и в наших обозначениях имеет вид:

$$\Psi_{21} = \frac{3}{\alpha + 2}. \tag{8}$$

После подстановки (8) в (6) получим аналитическую формулу, которая в точности совпадает с так называемой эвристической формулой Максвелла [19]:

$$\alpha^* = \frac{(\alpha + 2) + 2(\alpha - 1)f_2}{(\alpha + 2) - (\alpha - 1)f_2}. \tag{9}$$

В обобщенных безразмерных координатах $\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}$ и $\beta^* = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}$ формула (9) имеет более простой и компактный вид:

$$\beta^* = \beta f_2. \tag{10}$$

Максвелл получил формулу (9), исследуя электропроводность суспензии независимым от приведенного выше методом, также не учитывая взаимного влияния (взаимодействия) частиц. Он отметил, что такое предположение закономерно, если диаметр частиц намного меньше среднего расстояния между центрами соседних частиц,

т.е. параметр $\delta = \frac{a}{l} \ll 1$. Ясно, что при достаточно малых концентрациях $f_2 \sim a^3/l^3$

это условие выполняется, поэтому многие авторы [18, 32, 33] до сих пор ошибочно считают, что формула Максвелла (9) применима только при малых объемных концентрациях дисперсных частиц ($0 < f_2 < 0.1$), т.е. в линейном приближении $O(f_2^2)$:

$$\alpha^* = 1 + 3\beta f_2 + O(f_2^2). \quad (11)$$

Формулу (11) часто несправедливо называют формулой Максвелла. Далее будет доказано, что область применимости формулы (9) существенно шире, чем (11). Поэтому, учитывая приведенное выше математически строгое обоснование формулы (9), мы будем ее называть аналитической формулой Максвелла, а формулу (11) – линейным приближением формулы Максвелла.

Если бы дистанционное взаимодействие частиц было единственным (или доминирующим) фактором, который влияет на свойства дисперсной среды с увеличением концентрации частиц, то вывод об ограниченности аналитической формулы Максвелла только линейным приближением (11) был бы правильным. На самом деле, и далее это будет доказано, на величину локального поля Лоренца и, соответственно, на оператор Ψ_{21} гораздо более сильное влияние, чем взаимодействие частиц, оказывает чисто геометрический фактор стесненности дисперсных частиц.

Ошибочное мнение, что формула (9) справедлива лишь в приближении $O(f_2^2)$, послужило причиной многочисленных попыток получить в рамках феноменологических теорий формулу для усреднения свойств среды при повышенных концентрациях дисперсной фазы, опираясь на различные дополнительные к (11) эвристические соображения. Так появились теории эффективной среды, дифференциальный подход, формула Бруггемана и др., которые, как выяснилось позднее [34], дают результат хуже, чем формула Максвелла (9). Такие (неаналитические) теории в данной работе не рассматриваются.

Отметим, что позднее Максвелла при исследовании свойств гомогенных жидких и твердых неполярных диэлектриков были получены формулы (Максвелла–Гарнетта, Клаузиуса–Моссотти, Лоренц–Лоренца и др.), полностью идентичные формуле Максвелла (10), которые подтверждались экспериментами. Полная идентичность этих формул не вызывает удивления, поскольку все перечисленные авторы полагали вещество однородным и изотропным, а молекулы вещества – сферической формы. Теоретические исследования по обоснованию справедливости аналитической формулы Максвелла при повышенных концентрациях дисперсных частиц (используя различные подходы) продолжают до сих пор [35–37]. В частности, в работе [35], исследуя процесс рассеяния монохроматического света в дисперсной среде, авторы не только дают оригинальный вывод аналитической формулы Максвелла (9), но и показывают, что, вопреки распространенному мнению, формула (9) может оставаться очень точной и при высокой концентрации дисперсных частиц.

Выше было показано, что формула (9) выводится математически строго при единственном предположении об отсутствии взаимодействия частиц. Поэтому без решения вопроса о степени влияния взаимодействия частиц на конечный результат теоретически установить границы применимости формулы (9) или (10) при повышенных концентрациях дисперсных частиц не представляется возможным.

Теоретические модели теплопроводности в дисперсных средах с учетом коллективного взаимодействия частиц

Одновременно с феноменологическими моделями теплопроводности в дисперсных средах развивались статистические, численные и другие методы, в которых учет взаимодействия частиц осуществлялся на более детальном, структурном уровне строения дисперсной среды. Ввиду чрезвычайной сложности задача решалась для статистически однородной и изотропной двухфазной среды, состоящей из непрерывной фазы и идентичных сферических дисперсных частиц.

Лорд Рэлей [38] разработал математическую модель для численного расчета эффективной проводимости, рассматривая простую кубическую решетку сфер (S.C. – simple cubic) и вычислил α^* с точностью до δ^{13} (или $f_2^{13/3}$). Затем в работах [39–41], используя современные ЭВМ, были выполнены более точные вычисления α^* для объемно центрированных (B.C.C. – body-centered cubic) и гексагональных или центрированных по граням (F.C.C. – face-centered cubic) периодических решеток сфер. В частности, в работе [41] величина α^* рассчитана с точностью до δ^{27} (или f_2^9). В результате было показано [34], что все традиционные формулы усреднения (формула Бруггемана и др.), основанные на (11) и различных дополнительных предположениях, предназначенные для оценки α^* при повышенных концентрациях, имеют точный коэффициент только при первой степени концентрации f_2 , что соответствует дипольному члену (порядка δ^3). В то время как аналитическая формула Максвелла при описании периодических структур из сфер дает точные коэффициенты до величин порядка δ^{12} , т.е. предсказывает α^* с точностью до $O(f_2^5)$.

D.J. Jeffrey [18] рассчитал эффективный коэффициент теплопроводности в суспензиях с хаотичным расположением сфер с учетом парных взаимодействий:

$$\alpha^* = 1 + 3\beta f_2 + 3\beta(\beta + \Sigma)f_2^2 + O(f_2^3), \quad (12)$$

где Σ – сумма медленно сходящегося ряда. Из формулы (12) видно, что, в отличие от периодических структур, при хаотичном расположении дисперсных частиц парные взаимодействия вносят поправку в аналитическую формулу Максвелла ($\Sigma = 0$) уже с коэффициента при f_2^2 . В наиболее полной форме статистическая теория случайных дисперсных сред была разработана в работах физика-теоретика Фельдгерхофа [42, 43]. Там же дан краткий обзор и анализ предыдущих теоретических методов и результатов. В работе [43] приведены результаты численных расчетов коэффициентов ϵ^* с учетом парных и трех-частичных взаимодействий и мультипольных моментов при $\beta = 0.1, 0.3, -0.1, -0.3$ и $0 < f_2 < 0.4$. Там же дана приближенная формула для расчета диэлектрической проницаемости суспензии для частного случая, когда значения ϵ_1 и ϵ_2 близки друг к другу, т.е. $(\alpha - 1) \ll 1$.

В работе [44] в гидродинамической постановке идеальной несжимаемой жидкости в общем виде решена задача о динамике N частиц, произвольным образом расположенных в пространстве, с учетом N -частичных взаимодействий и полного набора мультипольных моментов. Затем, усредняя по ансамблю полученное решение для локальных скоростей, впервые в аналитическом виде была решена задача о взаимодействии фаз для произвольных значений параметра γ с учетом парных взаимодействий и мультипольных моментов (с точностью до δ^{14}), что важно, так как при случайном расположении частиц они могут находиться и на близком расстоянии (параметр $\delta \approx 0.5$):

$$\psi_{21}^g = \frac{3}{1+2\gamma} [1 + k(\gamma)f_2], \quad (13)$$

$$k(\gamma) = \frac{7}{72} \frac{\gamma-1}{1+2\gamma} + \frac{1415}{5632} \left(\frac{\gamma-1}{1+2\gamma} \right)^2 + \frac{5}{2112} \left(\frac{\gamma-1}{1+2\gamma} \right)^3,$$

где ψ_{21}^g – решение задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке; $\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, ρ_2 и ρ_1 – плотность дисперсной частицы и дисперсионной жидкости соответственно.

Используя решение (13) и формулы соответствия физической аналогии [45] динамики идеальной несжимаемой жидкости и процессов теплопередачи (верхний индекс t) – $\psi_{21}^g \rightarrow \psi_{21}^t$, $\gamma \rightarrow \frac{\alpha+1}{2}$, получим решение задачи о взаимодействии фаз для процессов теплопередачи в дисперсной среде взаимодействующих сферических частиц:

$$\psi_{21}^t = \frac{3}{\alpha+2} [1 + k(\beta)], \quad (14)$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3. \quad (15)$$

После подстановки (14) в (6) получим искомую аналитическую зависимость для эффективной теплопроводности дисперсной среды в виде:

$$\beta^* = f_2 \beta \frac{1 + k(\beta)f_2}{1 + k(\beta)f_2^2}. \quad (16)$$

Видно, что при малом взаимодействии дисперсных частиц ($k(\beta) \ll 1$) формула (16) совпадает с аналитической формулой Максвелла (10) при любых концентрациях дисперсных частиц. При изменении параметра α от нуля до бесконечности безразмерный параметр β изменяется в пределах $-0.5 < \beta < 1$, а коэффициент $k(\beta)$ – в пределах $-0.0086 < k(\beta) < 0.1117$.

Максимальная погрешность аналитической формулы Максвелла (10) из-за пренебрежения взаимодействием частиц имеет место при значении коэффициента $k(\beta) = 0,1117$ и для максимальной концентрации идентичных сфер при хаотической укладке $f_2^{\max} = 0.637$ составляет около 7%. На рис. 1 представлена зависимость

относительной погрешности $W = \frac{\alpha^* - \alpha_M^*}{\alpha_M^*} 100\%$ от объемной концентрации дис-

персных частиц и параметра β , где α_M^* – расчет по формуле Максвелла (9). Таким образом, полученные нами математически строгим методом аналитические формулы (15) и (16), которые учитывают коллективное взаимодействие дисперсных частиц, позволяют точно оценить погрешность (и область применимости) аналитической формулы Максвелла во всем диапазоне изменения безразмерных параметров α и f_2 .

Из рис. 1 видно, что для многих практически важных случаев относительная погрешность аналитической формулы Максвелла, которая не учитывает взаимодействия дисперсных частиц, не превышает 2–3% во всем диапазоне возможных концентраций. Дело в том, что в реальных дисперсных средах, в особенности при

значениях параметра $\alpha \gg 1$, с увеличением концентрации дисперсных частиц $f_2 \geq f_2^{cl}$ может происходить их объединение в кластеры и наблюдаться так называемый эффект перколяции (просачивания) [46]. При этом кластеры дисперсных частиц, объединяясь друг с другом, при некоторой пороговой концентрации f_2^p образуют перколяционный (стягивающий) кластер. При $f_2 = f_2^p$ наблюдается резкое изменение теплопроводности среды, поскольку скелет перколяционного кластера является «тепловым мостом». Перколяционный переход аналогичен фазовому переходу второго рода, который связан с появлением (или исчезновением) нового элемента симметрии в системе.

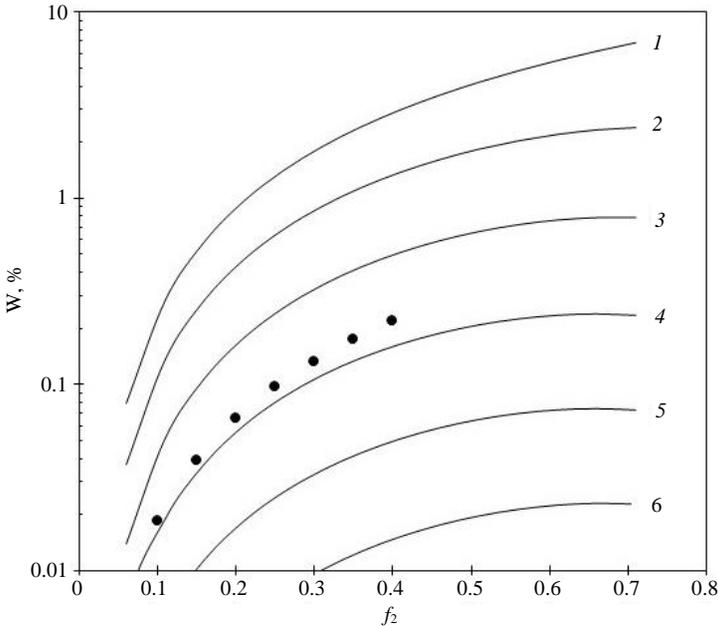


Рис. 1. Относительная погрешность аналитической формулы Максвелла (9) из-за предположения, что взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь: 1 – $\beta = 1$ ($\alpha \rightarrow \infty$), 2 – $\beta = 0.75$ ($\alpha = 10$), 3 – $\beta = 0.5$ ($\alpha = 4$), 4 – $\beta = 0.3$ ($\alpha = 2.286$), 5 – $\beta = 0.175$ ($\alpha = 1.636$), 6 – $\beta = 0.1$ ($\alpha = 1.33$); круглые маркеры – статистическая теория и численный расчет Фельдерхофа с учетом парных и тройных взаимодействий идентичных сфер при $\beta = 0.3$ [43]

Fig. 1. The relative error of Maxwell's analytical formula (9) due to the assumption that the interaction of dispersed particles can be neglected: (1) $\beta = 1$, $\alpha \rightarrow \infty$; (2) $\beta = 0.75$, $\alpha = 10$; (3) $\beta = 0.5$, $\alpha = 4$; (4) $\beta = 0.3$, $\alpha = 2.286$; (5) $\beta = 0.175$, $\alpha = 1.636$; and (6) $\beta = 0.1$, $\alpha = 1.33$. The circles indicate a statistical theory and a numerical calculation of Felderhof with account for pairwise and triple interactions of identical spheres at $\beta = 0.3$ [43]

Если принять меры, которые препятствуют контакту дисперсных частиц, то кластеры не образуются и аналитическая формула Максвелла применима при значениях параметра $0 < \alpha < \infty$ и любых практически достижимых концентрациях дисперсной фазы. Этот теоретический вывод, который подтверждается экспериментами, приведенными во второй части исследования, имеет принципиальное значение, так как, опираясь на него, из аналитической формулы Максвелла математически строго следуют два важных следствия.

Два важных следствия из аналитической формулы Максвелла

Известно, что дисперсные среды, которые имеют точные решения для α^* , представимые простыми аналитическими формулами, как правило, обладают свойствами симметрии [24]. Это объясняется тем, что пространственное распределение неоднородностей в таких средах соответствует некоторым предельным структурам. Так, например, для любых анизотропных сред предельными являются две слоистые структуры, которые описываются точными решениями границ Винера (7).

Дисперсная среда, для которой формула (10) является точным решением уравнения Лапласа, в приближении отсутствия взаимодействия частиц также обладает свойствами симметрии. Действительно, поскольку формула (10) дает достаточно высокую точность во всем диапазоне параметров α и f_2 (см. рис. 1), мы можем увеличивать объемную концентрацию дисперсной фазы до такой степени, что она образует сплошной континуум. В этом случае, поменяв местами в формуле (10)

нижние индексы ($1 \leftrightarrow 2$): $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$, $\alpha^* \rightarrow \frac{\alpha^*}{\alpha}$ и $f_2 \rightarrow f_1 = 1 - f_2$, т.е. применив преобразование инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$, мы получим точное решение, которое описывает дисперсную среду с другой (предельной) геометрией матрицы и дисперсной фазы:

$$\frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha} = \frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha} f_1. \quad (17)$$

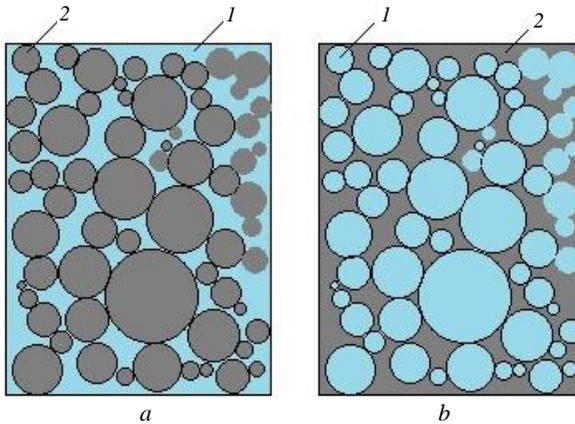


Рис. 2. Два типа однородных и изотропных дисперсных сред, образованных идентичными сферическими элементами: *a* – структура дисперсной среды, которую описывает аналитическая формула Максвелла (9) или (10); *b* – структура дисперсной среды, которая описывается формулой (17). В структуре *b* сферы находятся в контакте друг с другом и образуют континуум (матрицу), при этом элементы дисперсной фазы имеют различную (несферическую) форму и размер. 1 – дисперсионная жидкость (матрица); 2 – дисперсная фаза

Fig. 2. Two types of homogeneous and isotropic dispersive media formed by identical spherical elements: (*a*) the structure of the dispersive medium described by Maxwell's analytical formula (9) or (10) and (*b*) the structure of the dispersive medium described by formula (17). In structure (*b*), the spheres are in contact with each other, and they form a continuum (matrix), while the elements of the dispersed phase are of different (non-spherical) shapes and sizes. 1, dispersive liquid (matrix) and 2, dispersed phase

На рис. 2 схематично показаны два типа дисперсных структур, образованных идентичными сферическими элементами, которые описываются формулами (10) и (17).

Отметим, что формула (17), по-видимому, впервые была получена в работе [47] и получила в литературе [48] название «формула Максвелла–Эйкена». Однако если формула Максвелла (10) применима при $0 < f_2 < 0.1$, как ошибочно считают многие авторы, то формула (17) применима только в диапазоне $0.9 < f_1 < 1$, что и утверждается в работе [33]. Следовательно, без решения вопроса об области применимости аналитической формулы Максвелла формулу (17) нельзя использовать в более широком диапазоне концентраций.

Примечательно, что полученные аналитические решения (10) и (17) в точности совпадают с границами изменения эффективных коэффициентов теплопроводности для любых однородных и изотропных двухфазных дисперсных сред, известными как «границы Хашина–Штрикмана (Х-Ш)», которые были получены в работе [29] вариационным методом и для $\alpha > 1$ имеют вид:

$$1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\alpha-1} + \frac{f_1}{3}} \leq \alpha^* \leq \alpha \left(1 + \frac{f_1}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{f_2}{3}} \right). \quad (18)$$

Отмеченное выше совпадение не очень удивляет, если вспомнить, что сфера имеет предельную геометрию любых выпуклых тел: при заданном объеме тела сфера обладает минимальной площадью поверхности.

Следствие 1. Аналитическая формула Максвелла (10) и формула (17), полученная из (10) в результате преобразования инверсии фаз, в точности совпадают с границами (18) Хашина–Штрикмана (Х-Ш), которые определяют диапазон изменения α^* для любых однородных и изотропных двухфазных сред.

В работе [49] показано, что благодаря полной статистической симметрии [24], характерной для двумерных случайно неоднородных систем, в случае равных концентрации фаз ($f_1 = f_2$) задача об эффективной электропроводности допускает единственное точное решение, инвариантное относительно перестановки фаз: $\sigma^* = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$. При этом порог протекания (перколяции) имеет место при $f_1^p = f_2^p = 0.5$.

Покажем, что и для трехмерного случая среди бесконечного множества двухфазных сред, ограниченных точными решениями (10) и (17), существуют среды, обладающие полной статистической симметрией, которые инвариантны относительно перестановки фаз. Действительно, в силу линейности определяющих уравнений и граничных условий из решений (10) и (17) легко построить линейную комбинацию, инвариантную относительно преобразования инверсии фаз.

Для этого умножим уравнение (10) на $f_1(\alpha + 2)$, а уравнение (17) на $f_2(2\alpha + 1)$. После сложения этих уравнений, получим

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2} (\alpha + 2) f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha} (2\alpha + 1) f_2 = 0. \quad (19)$$

Следствие 2. Существует точное решение (19), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, предназначенное для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в трехмерных неупорядоченных структурно симметричных двухфазных средах.

Таким образом, и в трехмерном случае однородная и изотропная двухфазная среда обладает полной статистической симметрией и для заданных значений параметров λ_1 , λ_2 и f_2 имеет единственное точное решение.

Полученное точное решение (19) пригодно для оценки эффективного коэффициента теплопроводности (и других подобных макроскопических коэффициентов) в структурно-симметричных двухфазных средах, в которых нельзя четко выделить непрерывную компоненту (матрицу). В частном случае, при равных объемных концентрациях компонент $f_1 = f_2 = 0.5$, формула (19) упрощается до уравнения

$$(\alpha^*)^2 + \frac{2\alpha}{\alpha+1}\alpha^* - 2\alpha = 0, \quad (20)$$

которое имеет единственное положительное решение $\alpha^* = f(\alpha)$.

Нетрудно убедиться, что полученное аналитическое решение (19), как и известное уравнение Бруггемана

$$\frac{\alpha^* - 1}{2\alpha^* + 1} f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{2\alpha^* + \alpha} f_2 = 0 \quad [49],$$

инвариантно относительно преобразования инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$, т.е. относительно перестановки нижних индексов, которые обозначают номер фазы смеси. Однако в отличие от формулы (19), которая выводится математически строго, обоснованность вывода уравнения Бруггемана и область его применимости остаются источником непрекращающихся споров [35, 50]. В частности, в работе [51] отмечается, что уравнение Бруггемана применимо лишь в случаях, когда коэффициенты теплопроводности фаз близки друг к другу.

Отметим, что формула (6) применима для двухфазных дисперсных сред, составленных из однородных компонент, в самом общем случае. Она содержит неизвестный параметр (оператор) Ψ_{21} , в котором сосредоточена вся информация о форме и размерах дисперсных частиц, их ориентации и распределении в пространстве. Формула (8) дает решение задачи о взаимодействии фаз (определение Ψ_{21}) для сферических частиц произвольного радиуса. Таким образом, из приведенной выше теории следует, что аналитическая формула Максвелла и все следствия из нее справедливы для сред, в которых одна из фаз представлена полидисперсными сферическими частицами. Последнее согласуется с работой [29], где получено точное решение $\alpha^* \equiv \alpha_M^*$ для полидисперсной изотропной модели двухфазной среды, дисперсные частицы которой состоят из двух концентрических сфер – ядра радиусом a_2 и оболочки радиусом a_1 . При этом для каждой частицы соблюдаются соотношения: $\frac{a_2^3}{a_1^3} = f_2 = const$ и $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \alpha = const$. Если размер

частиц изменяется в диапазоне $0 < a_1 < a_1^m \ll \sqrt[3]{\Omega}$, то они полностью заполняют трехмерное пространство ($f_1 = 1 - f_2$) и первая фаза ($i = 1$) является непрерывной. Очевидно, что эта модель дисперсной среды полностью эквивалентна максвелловской полидисперсной среде, и, соответственно, мы имеем: $\alpha^* \equiv \alpha_M^*$.

В частном случае одинаковых дисперсных сферических частиц их максимальная объемная концентрация зависит от типа пространственной упаковки. Так, например, доказано (Гаусс), что максимально плотная упаковка жестких шаров одинакового размера не может превысить $f_2^{\max} \leq 0.74$. В этих случаях ана-

литическая формула Максвелла (при выводе которой предполагается, что $0 < f_2 < 1$) неприменима при концентрациях, близких к f_2^{\max} и выше.

Заключение

Математически строго обосновано, что аналитическая формула Максвелла, предназначенная для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в суспензии сферических частиц, которая не учитывает их взаимодействия, дает достаточно высокую точность практически во всем диапазоне объемных концентраций дисперсных частиц $0 < f_2 < 1$. Используя это свойство, из аналитической формулы Максвелла получено два важных следствия.

Первое следствие определяет точные границы, внутри которых находятся эффективные коэффициенты теплопроводности однородных и изотропных суспензий сферических частиц, которые совпадают с известными границами Хашина–Штрикмана.

Второе следствие определяет точное решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, предназначенное для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в трехмерных неупорядоченных структурно-симметричных двухфазных средах, когда трудно выделить непрерывную фазу.

Список источников

1. *Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С., Шрагер Г.Р.* Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2019. 328 с.
2. *Бошенятов Б.В.* О перспективах применения микропузырьковых газожидкостных сред в технологических процессах // Известия вузов. Физика. 2005. Т. 48, № 11. С. 49–54.
3. *Torquato S.* Random Heterogeneous Materials – Microstructure and Macroscopic Properties. New York : Springer, 2002.
4. *Boshenyatov B.* Laws of bubble coalescence and their modeling // New Developments in Hydrodynamics Research / M.J. Ibragimov, M.A. Anisimov (eds.). New-York : Nova Science Publishers, 2012. P. 211–239.
5. *Boshenyatov B.V., Popov V.V.* Acoustic measurement of the gas content (void fraction) of dispersions of very small bubbles in liquids // Fluid Mechanics, Soviet Research. 1990. V. 19, № 2. P. 112–117.
6. *Бошенятов Б.В.* Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 p.
7. *Boshenyatov B.V., Chernyshev I.V.* The effective viscosity of a microbubbly medium // Fluid Mechanics, Soviet Research. 1991. V. 20, № 6. P. 124–129.
8. *Бошенятов Б.В., Попов В.В.* Затухание низкочастотных звуковых волн в микропузырьковой газожидкостной среде // Фундаментальные исследования. 2009. № 3-S. С. 99–102.
9. *Бошенятов Б.В.* Исследование нерезонансного эффекта затухания низкочастотных звуковых волн в микропузырьковой газожидкостной среде // Известия вузов. Физика. 2005. Т. 48, № 11. С. 43–48.
10. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-3. С. 740–741.
11. *Бошенятов Б.В.* Роль гидродинамического взаимодействия при коалесценции пузырьков газа в жидкости // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427, № 3. С. 321–323.

12. Бошенятов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие и присоединенная масса дисперсных частиц // Известия вузов. Физика. 2014. Т. 57, № 8-2. С. 50–60.
13. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Кульбицкий Ю.Н. Гидродинамика дисперсных и газожидкостных потоков // Доклады АН СССР. 1984. Т. 278, № 1. С. 65–68.
14. Гуськов О.Б., Струминский В.В. Динамика дисперсных потоков в присутствии границ // Доклады АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 832–835.
15. Batchelor G.K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // Journal of Fluid Mechanics. 1972. V. 52, № 2. P. 245–268. doi: 10.1017/S0022112072001399
16. Batchelor G.K., Green J.T. The hydrodynamic interaction of two small freely moving spheres in a linear flow field // Journal of Fluid Mechanics. 1972. V. 56, № 2. P. 375–400. doi: 10.1017/S0022112072002927
17. Batchelor G.K., Green J.T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 // Journal of Fluid Mechanics. 1972. V. 56 (3). P. 401–427. doi: 10.1017/S0022112072002435
18. Jeffrey D.J. Conduction through a random suspension of spheres // Proceedings of the Royal Society of London. 1973. V. A335. P. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
19. Maxwell J.C. Electricity and magnetism. 1st ed. Clarendon Press, 1873.
20. Einstein A. EineneueBestimmung der Molekuldimensionen // Annals of Physics. 1906. V. 19. P. 289–306.
21. Гуськов О.Б. О движении кластера сферических частиц в идеальной жидкости // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 2. С. 186–193.
22. Boshenyatov B.V. The contribution of interactions of spherical inclusions into electrical and thermal conductivity of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. 2016. V. 7, № 2. P. 95–104. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v7.i2.10
23. Buryachenko V.A. General integral equations of micromechanics of heterogeneous materials // International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2015. V. 13 № 1. P. 11–53. doi: 10.1615/IntJMultCompEng.2014011234
24. Фокин А.Г. Макроскопическая проводимость случайно-неоднородных сред. Методы расчета // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 10. С. 1069–1093. doi: 10.1070/PU1996v039n10ABEH000173
25. Felderhof B.U. Virtual mass and drag in two-phase flow // Journal of Fluid Mechanics. 1991. V. 225. P. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
26. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А. Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 820–824.
27. Гуськов О.Б. Метод самосогласованного поля применительно к динамике вязких суспензий // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 4. С. 557–572.
28. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1991. 248 с.
29. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // Journal of Applied Physics. 1962. V. 33, № 10. P. 3125–3131. doi: 10.1063/1.1728579
30. Lorenz L. Ueber die refractionconstante // Annalen der Physik. 1880. V. 247, № 9. P. 70–103.
31. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с. (Теоретическая физика; т. 6).
32. Zuzovsky M., Brenner H. Effective Conductivities of Composite Materials Composed of Cubic Arrangements of Spherical Particles Embedded in an Isotropic Matrix // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1977. V. 28 (6). P. 979–992. doi: 10.1007/BF01601666
33. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49 (21-22). P. 4209–4219. doi: 10.1016/j.jheatmasstransfer.2006.03.015

34. *Kristensson G.* Homogenization of spherical inclusions // *Progress in Electromagnetics Research (PIER)*. 2003. V. 42. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
35. *Pierre M., Guérin C.-A., Sentenac A.* Maxwell-Garnett mixing rule in the presence of multiple scattering: Derivation and accuracy // *Physical Review B*. 2005. V. 72, № 1. Art. 014205. doi: 10.1103/PhysRevB.72.014205
36. *Сушко М.Я.* О диэлектрической проницаемости суспензий // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2007. Т. 132, № 2. С. 478–484. doi: 10.1134/S1063776107080146
37. *Sevostianov I., Mogilevskaya S.G., Kushch V.I.* Maxwell's methodology of estimating effective properties: Alive and well // *International Journal of Engineering Science*. 2019. V. 140. P. 35–88. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
38. *Rayleigh Lord.* LVI. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1892. V. 34, № 211. P. 481–502. doi: 10.1080/14786449208620364
39. *McPhedran R.C., McKenzie D.R.* The conductivity of lattices of spheres. I. The simple cubic lattice // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1978. V. 359 (1696). P. 45–63. doi: 10.1098/rspa.1978.0031
40. *McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H.* The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices // *Proceedings of the Royal Society of London Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1978. V. 362. P. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
41. *Sangani A.S., Acrivos A.* The effective conductivity of a periodic array of spheres // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1983. V. 386. P. 263–275. doi: 10.1098/rspa.1983.0036
42. *Felderhof U.* Bounds for the effective dielectric constant of disordered two-phase materials // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1982. V. 15. P. 1731–1739. doi: 10.1088/0022-3719/15/8/019
43. *Felderhof U.* Bounds for the effective dielectric constant of a suspension of uniform spheres // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1982. V. 15. P. 3953–3966. doi: 10.1088/0022-3719/15/18/011
44. *Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // *Доклады Академии наук*. 2011. Т. 438, № 5. С. 626–628.
45. *Бошнятов Б.В.* К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // *Доклады Академии наук*. 2014. Т. 459, № 6. С. 693–695. doi: 10.7868/S0869565214360080
46. *Boudenne A., Ibos L., Fois M., Majesté J.C., Géhin E.* Electrical and thermal behavior of polypropylene filled with copper particles // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2005. V. 36, № 11. P. 1545–1554. doi: 10.1016/j.compositesa.2005.02.005
47. *Eucken A.* Allgemeine Gesetzmäßigkeiten für das Wärmeleitvermögen verschiedener Stoffarten und Aggregatzustände // *Forschung Gabiete Ingenieur*. 1940. Bd. 11 (1). S. 6–20.
48. *Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C.* Predicting the effective thermal conductivity of unfrozen porous foods // *Journal of Food Engineering*. 2006. V. 5. P. 297–307.
49. *Дыхне А.М.* Проводимость двумерной двухфазной системы // *ЖЭТФ*. 1970. Т. 59, вып. 7. С. 110–115.
50. *Сушко М.Я., Крицькив С.К.* Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем // *Журнал технической физики*. 2009. Т. 79, вып. 3. С. 79–101.
51. *Tjaden B., Cooper S.J., Brett D.J.L., Kramer D., Shearing P.R.* On the origin and application of the Bruggeman correlation for analyzing transport phenomena in electrochemical systems // *Current Opinion in Chemical Engineering*. 2016. V. 12. P. 44–51. doi: 10.1016/j.coche.2016.02.006
52. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы : в 2 т. М. : Мир, 1990. Т. 1. 415 с.

References

1. Arhipov V.A., Vasenin V.A., Usanina A.S., Shrager G.R. (2019) *Dinamicheskoe vzaimodeystvie chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction of particles of the dispersed phase in heterogeneous flows]. Tomsk: Izdatel'skiy dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.
2. Boshenyatov B.V. (2005) O perspektivakh primeneniya mikropuzyr'kovykh gazozhidkostnykh sred v tekhnologicheskikh protsessakh [On the prospects of applying microbubble gas-liquid media in technological processes]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 48(11 appendix). pp. 49–54.
3. Torquato S. (2002) *Random Heterogeneous Materials - Microstructure and Macroscopic Properties*. New York: Springer.
4. Boshenyatov B. (2012) Laws of bubble coalescence and their modeling. In: *New Developments in Hydrodynamics Research*. New York: Nova Science Publishers. pp. 211–239.
5. Boshenyatov B.V., Popov V.V. (1990) Acoustic measurement of the gas content (void fraction) of dispersions of very small bubbles in liquids. *Fluid Mechanics, Soviet Research*. 19(2). pp. 112–117.
6. Boshenyatov B.V. (2016) *Mikropuzyr'kovye gazozhidkostnye sredy i perspektivy ikh ispol'zovaniya* [Microbubble gas-liquid media and their prospects of applying]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
7. Boshenyatov B.V., Chernyshev I.V. (1991) The effective viscosity of a microbubbly medium. *Fluid Mechanics, Soviet Research*. 20(6). pp. 124–129.
8. Boshenyatov B.V., Popov V.V. (2009) Zatokhanie nizkochastotnykh zvukovykh voln v mikropuzyr'kovoy gazozhidkostnoy srede [Attenuation of low-frequency sound waves in a microbubble gas-liquid medium]. *Fundamental'nye issledovaniya*. 3(appendix). pp. 99–102.
9. Boshenyatov B.V. (2005) Issledovanie nerezonansnogo effekta zatukhaniya nizkochastotnykh zvukovykh voln v mikropuzyr'kovoy gazozhidkostnoy srede [Investigation of the non-resonant effect of attenuation of low-frequency sound waves in a microbubble gas-liquid medium]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 48(11). pp. 43–48.
10. Gus'kov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Vzaimodeystvie faz i prisoedinennaya massa dispersnykh chastits v potentsial'nykh potokakh zhidkosti [Interaction of phases and virtual mass of dispersed particles in potential flows of fluid]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika zhidkost i igaza – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(3). pp. 740–741.
11. Boshenyatov B.V. (2009) The role of hydrodynamic interaction in the process of bubble coalescence in liquid. *Doklady Physics*. 54. pp. 345–347. doi: 10.1134/S102833580907009X
12. Boshenyatov B.V. (2014) Gidrodinamicheskoe vzaimodeystvie i prisoedinennaya massa dispersnykh chastits [Hydrodynamic interaction and the associated mass of dispersed particles]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(8–2). pp. 50–60.
13. Struminskii V.V., Gus'kov O.B., Kul'bitskii Yu.N. (1984) Dynamics of disperse streams in the presence of boundaries. *Soviet Physics. Doklady*. 29(9). pp. 719–721.
14. Guskov O.B., Struminskii V.V. (1985) Dynamics of disperse flows in the presence of boundaries. *Soviet Physics. Doklady*. 30(12). pp. 995–997.
15. Batchelor G.K. (1972) Sedimentation in a dilute dispersion of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*. 52(2). pp. 245–268. doi: 10.1017/S0022112072001399
16. Batchelor G.K., Green J.T. (1972) The hydrodynamic interaction of two small freely moving spheres in a linear flow field. *Journal of Fluid Mechanics*. 56(2). pp. 375–400. doi: 10.1017/S0022112072002927
17. Batchelor G.K., Green J.T. (1972) The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 . *Journal of Fluid Mechanics*. 56(3). pp. 401–427. doi: 10.1017/S0022112072002435

18. Jeffrey D.J. (1973) Conduction through a random suspension of spheres. *Proceedings of the Royal Society of London*. A335. pp. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
19. Maxwell J.C. (1873) *Electricity and Magnetism*. Oxford: Clarendon Press.
20. Einstein A. (1906) EineneueBestimmung der Molekuldimensionen. *Annals of Physics*. 19. pp. 289–306.
21. Gus'kov O.B. (2014) The motion of a cluster of spherical particles in an ideal fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 78(2). pp. 126–131. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.07.004
22. Boshenyatov B.V. (2016) The contribution of interactions of spherical inclusions into electrical and thermal conductivity of composite materials. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*. 7(2). pp. 95–104. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v7.i2.10
23. Buryachenko V.A. (2015) General integral equations of micromechanics of heterogeneous materials. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 13(1). pp. 11–53. doi: 10.1615/IntJMultCompEng.2014011234
24. Fokin A.G. (1996) Macroscopic conductivity of random inhomogeneous media. Calculation methods. *Physics-Uspokhi*. 39(10). pp. 1009–1032. doi: 10.1070/PU1996v039n10ABEH000173
25. Felderhof B.U. (1991) Virtual mass and drag in two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 225. pp. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
26. Struminskii V.V., Gus'kov O.B., Korol'kov G.A. (1986) Hydrodynamic interaction of particles in potential flow of an ideal fluid. *Soviet Physics. Doklady*. 31(10). pp. 787–789.
27. Gus'kov O.B. (2013) A self-consistent field method applied to the dynamics of viscous suspensions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 77(4). pp. 401–411. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.11.009
28. Dul'nev G.N., Novikov V.V. (1991) *Protsessy perenosa v neodnorodnykh sredakh [Transfer processes in inhomogeneous media]*. Leningrad: Energoatomizdat.
29. Hashin Z., Shtrikman S. (1962) A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*. 33(10). pp. 3125–3131. doi: 10.1063/1.1728579
30. Lorenz L. (1880) Ueber die refractionsconstante. *Annals of Physics*. 247(9). pp. 70–103.
31. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
32. Zuzovsky M., Brenner H. (1977) Effective conductivities of composite materials composed of cubic arrangements of spherical particles embedded in an isotropic matrix. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*. 28(6). pp. 979–992. doi: 10.1007/BF01601666
33. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. (2006) Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 49(21–22). pp. 4209–4219. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.03.015
34. Kristensson G. (2003) Homogenization of spherical inclusions. *Progress in Electromagnetics Research, PIER*. 42. pp. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
35. Pierre M., Guérin C-A, Sentenac A. (2005) Maxwell-Garnett mixing rule in the presence of multiple scattering: Derivation and accuracy. *Physical Review B*. 72(1). Article 014205. doi: 10.1103/PhysRevB.72.014205
36. Sushko M.Y. (2007) Dielectric permittivity of suspensions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 105. pp. 426–431. doi: 10.1134/S1063776107080146
37. Sevostianov I., Mogilevskaya S.G., Kushch V.I. (2019) Maxwell's methodology of estimating effective properties: Alive and well. *International Journal of Engineering Science*. 140. pp. 35–88. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
38. Rayleigh Lord LVI. (1892) On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 34(211). pp. 481–502. doi: 10.1080/14786449208620364
39. McPhedran R.C., McKenzie D.R. (1978) The conductivity of lattices of spheres I. The simple cubic lattice. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 359(1696). pp. 45–63. doi: 10.1098/rspa.1978.0031

40. McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H. (1978) The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices. *Proceedings of the Royal Society of London Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*. 362. pp. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
41. Sangani A.S., Acrivos A. (1983) The effective conductivity of a periodic array of spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 386. pp. 263–275. doi: 10.1098/rspa.1983.0036
42. Felderhof U. (1982) Bounds for the effective dielectric constant of disordered two-phase materials. *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 15. pp. 1731–1739. doi: 10.1088/0022-3719/15/8/019
43. Felderhof U. (1982) Bounds for the effective dielectric constant of a suspension of uniform spheres. *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 15. pp. 3953–3966. doi: 10.1088/0022-3719/15/18/011
44. Guskov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Hydrodynamic interaction of spherical particles in an inviscid-fluid flow. *Doklady Physics*. 56(6). pp. 352–354. doi: 10.1134/S1028335811060073
45. Boshenyatov B.V. (2014) The theory of electric and thermal conductivity in bubble gas–liquid media. *Doklady Physics*. 59(12). pp. 601–603. doi: 10.1134/S1028335814120088
46. Boudenne A., Ibos L., Fois M., Majesté J.C., Géhin E. (2005) Electrical and thermal behavior of polypropylene filled with copper particles. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 36(11). pp. 1545–1554. doi: 10.1016/j.compositesa.2005.02.005
47. Eucken A. (1940) Allgemeine Gesetzmäßigkeiten für das Wärmeleitvermögen verschiedener Stoffarten und Aggregatzustände. *Forschung Gabiete Ingenieur*. 11(1). pp. 6–20. doi: 10.1007/BF02584103
48. Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C. (2006) Predicting the effective thermal conductivity of unfrozen porous foods. *Journal of Food Engineering*. 5. pp. 297–307. doi: 10.1016/j.jfoodeng.2005.04.021
49. Dykhne A.M. (1971) Conductivity of a two-dimensional two-phase system. *Soviet Physics JETP*. 32(1). pp. 63–65.
50. Sushko M.Y., Kriskiv S.K. (2009) Compact group method in the theory of permittivity of heterogeneous systems. *Technical Physics*. 54. pp. 423–427. doi: 10.1134/S1063784209030165
51. Tjaden B., Cooper S.J., Brett D.J.L., Kramer D., Shearing P.R. (2016) On the origin and application of the Bruggeman correlation for analyzing transport phenomena in electrochemical systems. *Current Opinion in Chemical Engineering*. 12. pp. 44–51. doi: 10.1016/j.coche.2016.02.006
52. Conway J.H., Sloane N.J.A. (1988) *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York: Springer-Verlag.

Сведения об авторах:

Бошнятов Борис Владимирович – доктор технических наук, главный научный сотрудник Института прикладной механики Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: bosbosh@mail.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Карнет Юлия Николаевна – кандидат физико-математических наук, Ученый секретарь Института прикладной механики Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: iam@iam.gas.ru

Information about the authors:

Boshenyatov Boris V. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: bosbosh@mail.ru

Glazunov Anatoliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Karnet Yuliya N. (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: iam@iam.ras.ru

Статья поступила в редакцию 07.08.2022; принята к публикации 04.12.2023

The article was submitted 07.08.2022; accepted for publication 04.12.2023