

Научная статья

УДК 512.54

MSC 15B33, 20H25, 20K15

doi: 10.17223/19988621/86/13

Инволюции группы автоморфизмов вполне разложимой абелевой группы конечного ранга

Егор Александрович Тимошенко¹, Иван Владиславович Третьяков²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tea471@mail.tsu.ru

² ivantretyakov00@gmail.com

Аннотация. В рамках исследования вопросов определяемости вполне разложимой абелевой группы конечного ранга ее группой автоморфизмов показано, что всякое множество попарно перестановочных инволюций такой группы автоморфизмов, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, сопряжено с множеством диагональных инволюций.

Ключевые слова: вполне разложимая группа, группа автоморфизмов, инволюция, матрица

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Для цитирования: Тимошенко Е.А., Третьяков И.В. Инволюции группы автоморфизмов вполне разложимой абелевой группы конечного ранга // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 167–175. doi: 10.17223/19988621/86/13

Original article

Involutions of the automorphism group of a completely decomposable finite-rank Abelian group

Egor A. Timoshenko¹, Ivan V. Tretyakov²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ tea471@mail.tsu.ru

² ivantretyakov00@gmail.com

Abstract. Let B be a completely decomposable torsion-free Abelian group of finite rank. It can be written as a direct sum $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_s$, where B_i 's are the homogeneous components of B (then, the types $\mathbf{t}(B_i)$ are pairwise different). These components can be enumerated in such a way that $\mathbf{t}(B_i) > \mathbf{t}(B_j)$ always implies $i < j$. Then the automorphism group $\text{Aut } B$ can be identified with the group of all matrices of the form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

such that $A_{ij} \in \text{Hom}(B_j, B_i)$ when $i < j$ and $A_{ii} \in \text{Aut } B_i$ for every i . We denote by $\underline{\text{Aut } B}$ the group of all matrices $A \in \text{Aut } B$ such that $A_{ij} = 0$ when $i < j$. The symbol Σ will stand for the group of all matrices A such that $A_{ij} \in \mathbf{Q} \otimes \text{Hom}(B_j, B_i)$ when $i < j$ and each entry A_{ii} coincides with the trivial automorphism ε_i of B_i .

Involutions $D_1, D_2, \dots, D_s \in \underline{\text{Aut } B}$ are defined as follows: the i th diagonal entry A_{ii} of D_k equals $-\varepsilon_i$ or ε_i depending on whether $i \leq k$ or $i > k$.

The main result is the following theorem:

Theorem 3. Let $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$ be pairwise commuting involutions such that the set $\{U^{-1}J_k U J_k \mid U \in \text{Aut } B\}$ is closed under multiplication and $J_k D_k \in \Sigma$ for every k . Then there exists a matrix $T \in \Sigma$ such that $T^{-1}J_k T = D_k$ for every k and $\underline{\text{Aut } B} \subset T^{-1}(\text{Aut } B)T$.

Keywords: completely decomposable group, automorphism group, involution, matrix

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2023-943).

For citation: Timoshenko, E.A., Tretyakov, I.V. (2023) Involutions of the automorphism group of a completely decomposable finite-rank Abelian group. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 167–175. doi: 10.17223/19988621/86/13

Пусть $B \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – некоторый класс абелевых групп. Мы будем говорить, что B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$, если изоморфизм групп автоморфизмов $\text{Aut } B$ и $\text{Aut } B'$, где $B' \in \mathbf{X}$, влечет изоморфизм $B \cong B'$.

Нас интересует случай, когда $\mathbf{X}$ – класс всех вполне разложимых групп (без кручения) конечного ранга. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга* k называют всякую группу, представляющую собой прямую сумму k групп ранга один. Поскольку всякая группа ранга один изоморфна некоторой *рациональной группе* (т.е. отличной от 0 подгруппе аддитивной группы поля $\mathbf{Q}$ рациональных чисел), для удобства можно сразу рассматривать группы из класса $\mathbf{X}$ как прямые суммы рациональных групп. Цикл работ Вильданова [1–4] посвящен определяемости абелевых групп их группами автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$ и некоторых его подклассах. В частности, в [4] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы 2-делимая группа $B \in \mathbf{X}$ определялась своей группой автоморфизмов среди всех 2-делимых групп, принадлежащих классу $\mathbf{X}$. Настоящая работа представляет собой очередной шаг к нахождению ответа на аналогичный вопрос для ситуации, когда группа $B \in \mathbf{X}$ может и не быть 2-делимой. Для групп ранга три эта задача была ранее решена авторами в статье [5].

Символом ■ будет обозначаться конец доказательства. Для группы Y ранга 1 через $t(Y)$ обозначается тип этой группы (подробнее о типах см.: [6]). Пусть дано семейство рациональных групп Y_i , где индекс i пробегает некоторое множество. Для индексов i, j введем обозначение $\Gamma_{ji} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Y_j \subset Y_i\}$. Нетрудно показать, что справедливы следующие свойства:

1. Всякий гомоморфизм $Y_j \rightarrow Y_i$ представляет собой умножение на некоторое число $\alpha \in \Gamma_{ji}$. Таким образом, $(\Gamma_{ji}, +)$ – абелева группа, которая изоморфна группе гомоморфизмов $\text{Hom}(Y_j, Y_i)$.

2. Γ_{ii} – подкольцо поля $\mathbf{Q}$, порожденное элементом 1 и элементами p^{-1} , где p пробегает множество всех простых чисел таких, что $pY_i = Y_i$.

3. $\Gamma_{jk}\Gamma_{ki} \subset \Gamma_{ji}$ для любых индексов i, j, k .

4. Если неравенство $\mathbf{t}(Y_i) \geq \mathbf{t}(Y_j)$ не выполняется, то $\Gamma_{ji} = 0$.

5. Если $\mathbf{t}(Y_i) \geq \mathbf{t}(Y_j)$, то $\Gamma_{ji} \neq 0$ и $\mathbf{t}(\Gamma_{ji}) = \mathbf{t}(Y_i) : \mathbf{t}(Y_j)$.

Группу $B \in \mathbf{X}$ можно записать в виде $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_s$, где каждое прямое слагаемое B_i представляет собой прямую сумму n_i копий одной и той же рациональной группы Y_i , причем группы $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$ попарно неизоморфны (известно [6. Предложение 86.1], что любые два таких разложения группы B изоморфны). Учитывая частичный порядок, который задан на множестве всех типов, можно пронумеровать однородные компоненты B_i так, что для любого i тип $\mathbf{t}(Y_i)$ будет одним из максимальных элементов множества $\{\mathbf{t}(Y_1), \mathbf{t}(Y_{i+1}), \dots, \mathbf{t}(Y_s)\}$. Тогда при $i < j$ имеем $\Gamma_{ij} = 0$, а кольцо эндоморфизмов $E(B)$ группы B изоморфно (см.: [7]) кольцу блочно-верхнетреугольных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ss} \end{pmatrix} \quad (1)$$

таких, что каждый блок A_{ij} принадлежит множеству $\Delta_{ij} = M(n_i, n_j, \Gamma_{ji})$, состоящему из всех матриц размера $n_i \times n_j$ с элементами из Γ_{ji} . Поэтому в последующем мы будем отождествлять кольцо $E(B)$ с указанным матричным кольцом, считая, что $\text{Aut } B$ есть группа матриц, обратимых в этом кольце. Матрица $A \in E(B)$ вида (1) лежит в $\text{Aut } B$ тогда и только тогда, когда каждый блок A_{ii} принадлежит полной линейной группе $GL(n_i, \Gamma_{ii})$ над кольцом Γ_{ii} (иначе говоря, определитель каждого блока A_{ii} должен быть обратимым элементом в Γ_{ii}); строгое обоснование этого факта можно найти в [7].

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения:

– через $\underline{\text{Aut } B}$ обозначим группу всех матриц $A \in \text{Aut } B$ вида (1), для которых $A_{ij} = 0$ при $i < j$;

– через Σ обозначим группу матриц вида (1), для которых $A_{ij} \in M(n_i, n_j, \mathbf{Q})$ при $i < j$, а каждый блок A_{ii} равен единичной матрице E (далее размер матрицы, обозначаемой символом E , в каждом конкретном случае будет ясен из контекста);

– через $E_{ij}(C)$ будем обозначать матрицу A вида (1), для которой $A_{ij} = C$, а все остальные блоки равны 0;

– через π_{ij} , где $i \leq j$, обозначим отображение, которое сопоставляет матрице A вида (1) значение ее блока A_{ij} ;

– через π мы обозначим эндоморфизм группы $\text{Aut } B$, сопоставляющий всякой матрице A вида (1) матрицу $\pi(A) \in \underline{\text{Aut } B}$ такую, что $\pi_i(\pi(A)) = A_{ii}$ при всех i .

Подгруппа $\underline{\text{Aut } B}$ группы $\text{Aut } B$, очевидно, изоморфна прямому произведению групп $\text{Aut } B_i \cong GL(n_i, \Gamma_{ii})$ по всем $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Данная подгруппа играет важную роль при исследовании вопроса об определяемости группы $B \in \mathbf{X}$ группой $\text{Aut } B$.

Используя семейства коммутирующих инволюций, Вильданов показал [3, 4], что для 2-делимой группы B строение группы $\text{Aut } B$ однозначно определяется строением $\text{Aut } B$. В настоящей статье мы докажем, что всякое семейство коммутирующих инволюций, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, сопряжено с множеством инволюций, содержащимся в $\text{Aut } B$.

Нам понадобится еще одно свойство групп Γ_{ji} :

Лемма 1. Если $\alpha \in \Gamma_{ki} \setminus 2\Gamma_{ki}$ и $\beta \in \Gamma_{jk} \setminus 2\Gamma_{jk}$, то $\alpha\beta \in \Gamma_{ji} \setminus 2\Gamma_{ji}$.

Доказательство. Из условия следует, что αY_k содержится в Y_i , но не в $2Y_i$. Легко убедиться, что факторгруппа $Y_i/2Y_i$ состоит из двух элементов, поэтому $Y_i = 2Y_i + \alpha Y_k$. Аналогично показывается, что $Y_k = 2Y_k + \beta Y_j$. Если $\alpha\beta \in 2\Gamma_{ji}$, то

$$Y_i = 2Y_i + 2\alpha Y_k + \alpha\beta Y_j \subset 2Y_i + 2\Gamma_{ki}Y_k + 2\Gamma_{ji}Y_j \subset 2Y_i + 2Y_i + 2Y_i = 2Y_i,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Через φ_X , где X – элемент какой-либо группы, будем обозначать внутренний автоморфизм этой группы, переводящий всякий ее элемент A в элемент $X^{-1}AX$. Напомним, что *инволюцией* называется элемент группы, квадрат которого равен нейтральному элементу группы. Пусть инволюции $D_1, D_2, \dots, D_s \in \text{Aut } B$ таковы, что $\pi_{ii}(D_k) = -E$, если $i \leq k$, и $\pi_{ii}(D_k) = E$, если $i > k$. В доказательстве следующей теоремы, использующем некоторые идеи из [5], важную роль играют свойства множества $\Lambda(A) = \{T^{-1}ATA \mid T \in \text{Aut } B\}$, где A – инволюция.

Теорема 2. Пусть $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$ – попарно коммутирующие инволюции, для которых $\pi(J_k) = D_k$ и множество $\Lambda(J_k)$ замкнуто относительно умножения при всех k . Тогда существуют матрица $X \in \text{Aut } B \cap \Sigma$ и система матриц $C_{ij} \in \Delta_{ij}$, где $i < j$, такие, что:

(i) для автоморфизма $\psi = \varphi_X$ и любых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ выполнено

$$\pi_{ij}(\psi(J_k)) = \begin{cases} E, & \text{если } i = j > k, \\ -E, & \text{если } i = j \leq k, \\ C_{ij}, & \text{если } i \leq k < j, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

(ii) если $C_{ij} \in 2\Delta_{ij}$, то $C_{ij} = 0$;

(iii) если $C_{ij} \neq 0$, то $n_i = n_j = 1$;

(iv) если $i < k < j$, то $C_{ik} = 0$ или $C_{kj} = 0$.

Доказательство проведем индукцией по s . При $s = 1$ утверждение теоремы очевидно, так как в этом случае $J_1 = -E$ и можно взять $X = E$.

Пусть теперь $s > 1$ и утверждение теоремы верно для случая $s - 1$ однородных компонент. Обозначим гомоморфизм групп $\text{Aut } B \rightarrow \text{Aut}(B_2 \oplus \dots \oplus B_s)$, который «вычеркивает» из матрицы первую строку и первый столбец, через ρ . Поскольку ρ – сюръекция, множество $\{T^{-1}\rho(J_k)\rho(J_k) \mid T \in \text{Aut}(B_2 \oplus \dots \oplus B_s)\}$ замкнуто относительно умножения при всех k . Применяя предположение индукции к группе $B_2 \oplus \dots \oplus B_s$ и семейству инволюций $\rho(J_2), \dots, \rho(J_s)$, можно найти такую матрицу $X \in \text{Aut } B \cap \Sigma$, что $\pi_{1j}(X) = 0$ при любом $j > 1$ и условия (i)–(iv) выполняются для подходящей системы матриц $C_{ij} \in \Delta_{ij}$, где $1 < i < j$, при любых значениях индексов $i, j, k \in \{2, 3, \dots, s\}$. Ясно, что для $\psi = \varphi_X$ матрицы $\psi(J_k)$ коммутируют между собой и множества $\Lambda(\psi(J_k))$ замкнуты относительно умножения при всех $k \geq 1$.

Для любой матрицы F имеем $\varphi_F \circ \psi = \varphi_{XF}$. Из всех матриц $F \in \text{Aut } B \cap \Sigma$ с тем свойством, что $\rho(\varphi_{XF}(J_k)) = \rho(\psi(J_k))$ при всех $k > 1$, мы выберем ту, для которой количество ненулевых блоков $\pi_{1j}(\varphi_{XF}(J_1))$ является наименьшим. Заменяя X матрицей $XF \in \text{Aut } B \cap \Sigma$ в равенстве $\psi = \varphi_X$, можем сразу считать, что инволюция $\psi(J_1)$ минимальна в указанном нами смысле.

Легко видеть, что $\pi(\psi(J_k)) = D_k$ для любого $k \geq 1$ и $\pi_{ij}(\psi(J_k)) = 0$, если $i < j \leq k$ или $k < i < j$ (так как $\psi(J_k)$ – инволюция). Для всех $j > 1$ положим $C_{1j} = \pi_{1j}(\psi(J_1))$. Предположим, что для некоторого $j > 1$ выполняется $C_{1j} \in 2\Delta_{1j} \setminus \{0\}$. Для матрицы $F = E + E_{1j}(C) \in \text{Aut } B \cap \Sigma$, где $C \in \Delta_{1j}$, имеем $F^{-1} = E - E_{1j}(C)$ и

$$\begin{aligned} F^{-1}\psi(J_1)F &= \psi(J_1) - E_{1j}(C)\psi(J_1) + \psi(J_1)E_{1j}(C) - E_{1j}(C)\psi(J_1)E_{1j}(C) = \\ &= \psi(J_1) - E_{1j}(C) - E_{1j}(C) - E_{1j}(C)E_{1j}(C) = \psi(J_1) - E_{1j}(2C). \end{aligned}$$

Если матрица C выбрана так, что $2C = C_{1j}$, то первая «строка» матрицы $\varphi_{XF}(J_1)$ содержит меньше ненулевых блоков, чем $\psi(J_1)$. Поскольку при этом выполнено $\rho(\varphi_{XF}(J_k)) = \rho(\psi(J_k))$ для всех $k > 1$, приходим к противоречию с минимальностью $\psi(J_1)$. Это означает, что условие (ii) выполнено в том числе и для $i = 1$.

Рассмотрим два случая.

I. Пусть $n_1 = 1$. Мы докажем индукцией по $k \in \{2, 3, \dots, s\}$, что если $j > k$, то $\pi_{1j}(\psi(J_k)) = C_{1j}$ и либо $C_{1k} = 0$, либо $C_{kj} = 0$. Допустим, что для значений, которые меньше k , требуемые утверждения истинны. Тогда $C_{1l}C_{lj} = 0$, если $2 \leq l < k$ и $l < j$. Так как $\psi(J_1)$ и $\psi(J_k)$ коммутируют, то для всякого $j > k$ имеем

$$\begin{aligned} -C_{1j} + \pi_{1j}(\psi(J_k)) &= \pi_{1j}(\psi(J_k)\psi(J_1)) = \pi_{1j}(\psi(J_1)\psi(J_k)) = \\ &= -\pi_{1j}(\psi(J_k)) + C_{12}C_{2j} + \dots + C_{1k}C_{kj} + C_{1j} = -\pi_{1j}(\psi(J_k)) + C_{1k}C_{kj} + C_{1j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Допустим, что выполняется $C_{1k} \neq 0$ и $C_{kj} \neq 0$. Тогда имеем $C_{1k} \notin 2\Delta_{1k}$, $C_{kj} \notin 2\Delta_{kj}$ и $n_k = n_j = 1$. Так как $\Delta_{1k} = \Gamma_{k1}$, $\Delta_{kj} = \Gamma_{jk}$ и $\Delta_{1j} = \Gamma_{j1}$, мы можем применить лемму 1 и заключить, что $C_{1k}C_{kj} \notin 2\Delta_{1j}$. Но из (2) вытекает $C_{1k}C_{kj} = 2\pi_{1j}(\psi(J_k)) - 2C_{1j} \in 2\Delta_{1j}$ – противоречие. Значит, $C_{1k} = 0$ или $C_{kj} = 0$, откуда в силу (2) получаем равенство $\pi_{1j}(\psi(J_k)) = C_{1j}$. Таким образом, условия (i) и (iv) также справедливы для любых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Выберем произвольный индекс j со свойством $n_j > 1$. Мы выведем равенство $C_{1j} = 0$ из замкнутости множества $\Lambda(A)$, где $A = \psi(J_{j-1})$, относительно умножения. Гомоморфизм групп $\sigma: \text{Aut } B \rightarrow \text{Aut}(B_1 \oplus \dots \oplus B_j)$, «вычеркивающий» из матрицы все строки и столбцы с номерами $> j$, сюръективен, а следовательно, множество $\{T^{-1}\sigma(A)T\sigma(A) \mid T \in \text{Aut}(B_1 \oplus \dots \oplus B_j)\}$ также замкнуто относительно умножения. Поэтому мы можем, не умаляя общности, считать, что $j = s$.

Разбивая главную диагональ на блоки порядков $n_1 + \dots + n_{s-1}$ и n_s , запишем

$$A = \begin{pmatrix} -E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ 0 & U_{22}^{-1} \end{pmatrix}; \quad (3)$$

легко видеть, что $UW = WU = E$ и, следовательно, $W = U^{-1}$. Тогда

$$U^{-1}AU = W \begin{pmatrix} -U_{11} & CU_{22} - U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & U_{11}^{-1}(CU_{22} - 2U_{12}) \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Если $D_{s-1}A \in \Lambda(A)$, то существует матрица $U \in \text{Aut } B$ вида (3), удовлетворяющая равенству $U^{-1}AU = D_{s-1}$. Для такой матрицы U выполнено $CU_{22} - 2U_{12} = 0$. Тогда

$C = 2U_{12}U_{22}^{-1} \in (2\Delta_{1s}, \dots, 2\Delta_{s-1,s})^t \cdot \Delta_{ss}$ и, в частности, $C_{1s} = \pi_{1s}(A) \in 2\Delta_{1s}\Delta_{ss} = 2\Delta_{1s}$.

Ввиду условия (ii) отсюда следует $C_{1s} = 0$.

Рассмотрим случай, когда $D_{s-1}A \notin \Lambda(A)$. Зафиксируем матрицы

$$T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix},$$

для которых выполнено $T_{22}, U_{22} \in GL(n_s, \Gamma_{ss})$ и $T_{22} + U_{22} = E$ (существование таких матриц следует из [8. Лемма 1]). С учетом вычислений (4) имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}AT \cdot A \cdot U^{-1}AU &= T^{-1}AT \cdot A \begin{pmatrix} -E & CU_{22} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -E & CT_{22} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C - CU_{22} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & C(T_{22} + U_{22} - E) \\ 0 & E \end{pmatrix} = D_{s-1}. \end{aligned}$$

Значит, $D_{s-1}A$ представляет собой произведение двух матриц $T^{-1}ATA$ и $U^{-1}AUA$, принадлежащих $\Lambda(A)$. Отсюда вытекает $D_{s-1}A \in \Lambda(A)$, что противоречит нашему предположению.

Итак, доказано, что если $n_j > 1$, то $C_{1j} = 0$. Следовательно, условие (iii) также выполнено для всех $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

II. Осталось рассмотреть случай $n_1 > 1$. Пользуясь замкнутостью множества $\Lambda(A)$, где $A = \psi(J_1)$, относительно умножения, покажем, что $\psi(J_1) = D_1$. Разбивая главную диагональ на блоки, имеющие порядки n_1 и $n_2 + \dots + n_s$, мы можем вновь воспользоваться записями (3) и (4).

Если $D_1A \in \Lambda(A)$, то $U^{-1}AU = D_1$ для подходящей матрицы $U \in \text{Aut } B$ вида (3). Тогда $CU_{22} - 2U_{12} = 0$ и, далее, $C = 2U_{12}U_{22}^{-1} \in (2\Delta_{12}, \dots, 2\Delta_{1s})$. Следовательно, при всех $j > 1$ имеем $C_{1j} = \pi_{1j}(A) \in 2\Delta_{1j}$. Применяя (ii), получаем, что $C_{1j} = 0$ для всех $j > 1$, т.е. $A = D_1$.

Рассмотрим случай, когда $D_1A \notin \Lambda(A)$. Так как $n_1 > 1$, то существуют матрицы

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

для которых $T_{11}, U_{11} \in GL(n_1, \Gamma_{11})$ и $T_{11}^{-1} + U_{11}^{-1} = E$. С учетом (4) имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}AT \cdot A \cdot U^{-1}AU &= T^{-1}AT \cdot A \begin{pmatrix} -E & U_{11}^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -E & T_{11}^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C - U_{11}^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & (T_{11}^{-1} + U_{11}^{-1} - E)C \\ 0 & E \end{pmatrix} = D_1. \end{aligned}$$

Значит, D_1A есть произведение матриц $T^{-1}ATA$ и $U^{-1}AUA$, принадлежащих $\Lambda(A)$. Отсюда $D_1A \in \Lambda(A)$, что противоречит нашему предположению.

Мы показали, что инволюция $A = \psi(J_1)$ совпадает с D_1 . Так как A и $\psi(J_k)$, где $k > 1$, коммутируют, то для всякого $j > 1$ имеем

$$\pi_{1j}(\psi(J_k)) = \pi_{1j}(\psi(J_k)D_1) = \pi_{1j}(D_1\psi(J_k)) = -\pi_{1j}(\psi(J_k))$$

и, следовательно, $\pi_{1j}(\psi(J_k)) = 0$. Таким образом, условия (i), (iii) и (iv) выполнены для всех $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Теорема доказана. ■

Далее мы установим, что каждое семейство инволюций, обладающее указанными в теореме 2 свойствами, сопряжено (вообще говоря, не в $\text{Aut } B$, а в более широкой группе) с семейством диагональных инволюций $D_1, D_2, \dots, D_s$.

Теорема 3. Если инволюции $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$ удовлетворяют требованиям, перечисленным в условии теоремы 2, то существует матрица $T \in \Sigma$, для которой $\varphi_T(J_k) = D_k$ при всех k и $\underline{\text{Aut}} B \subset \varphi_T(\text{Aut } B)$.

Доказательство. Пусть $\psi = \varphi_X$ и $\{C_{ij}\}_{i < j}$ – автоморфизм и система матриц, найденные нами в доказательстве теоремы 2. Обозначим через V сумму матриц $E_{ij}(C_{ij})$ по всем i, j , для которых $i < j$. В силу условия (iv) имеем $V^2 = 0$. Из этого следует, что для матрицы $F = E + \frac{1}{2}V \in \Sigma$ выполнено $F^{-1} = E - \frac{1}{2}V$.

Пусть A – какая-либо матрица из $\underline{\text{Aut}} B$ и $\pi_{ii}(A) = A_{ii}$ для всех i . Из очевидных равенств $E_{ij}(C_{ij})A = E_{ij}(C_{ij}A_{jj})$ и $AE_{ij}(C_{ij}) = E_{ij}(A_{ii}C_{ij})$ получаем, что

$$VA = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^s E_{ij}(C_{ij}A_{jj}), \quad AV = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^s E_{ij}(A_{ii}C_{ij})$$

$$\text{и } \pi_{ij}(VAV) = \sum_{k=i+1}^{j-1} \pi_{ik}(VA)\pi_{kj}(V) = \sum_{k=i+1}^{j-1} (C_{ik}A_{kk})C_{kj}, \text{ когда } i < j.$$

Из (iv) следует, что все слагаемые $C_{ik}A_{kk}C_{kj}$ равны 0, а значит, $VAV = 0$. Тогда

$$FAF^{-1} = F(A - \frac{1}{2}AV) = A - \frac{1}{2}AV + \frac{1}{2}VA - \frac{1}{4}VAV = A + \frac{1}{2}(VA - AV).$$

Предположим, что $i < j$ и матрица $2\pi_{ij}(FAF^{-1}) = C_{ij}A_{jj} - A_{ii}C_{ij}$ отлична от 0. Тогда имеем $C_{ij} \neq 0$, откуда в силу (ii) и (iii) получаем $C_{ij} \in \Delta_{ji} \setminus 2\Delta_{ji}$ и $n_i = n_j = 1$. Из этого вытекает, что группа $\Delta_{ji} = \Gamma_{ji}$ не является 2-делимой, а следовательно, $\mathbf{t}(Y_i) > \mathbf{t}(Y_j)$, $2Y_i \neq Y_i$ и $2Y_j \neq Y_j$. Таким образом, $\Gamma_{ji} \subset \Gamma_{ii}$ и 2 не является обратимым элементом колец Γ_{ii} и Γ_{jj} . Обратимые элементы $A_{ii} \in \Gamma_{ii}$ и $A_{jj} \in \Gamma_{jj}$ – это просто рациональные числа с нечётными числителем и знаменателем. Значит,

$$\pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}C_{ij}(A_{jj} - A_{ii}) \in \frac{1}{2}\Gamma_{ji} \cdot 2\Gamma_{ii} = \Gamma_{ji} = \Delta_{ji}.$$

Тем самым мы установили, что $FAF^{-1} \in \text{Aut } B$. Так как $\varphi_F(FAF^{-1}) = A$, получаем, что $\underline{\text{Aut}} B \subset \varphi_F(\text{Aut } B) = \varphi_F(\psi(\text{Aut } B))$.

Допустим теперь, что блочно-диагональная матрица A совпадает с одной из инволюций D_k , и найдем матрицу $\pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(C_{ij}A_{jj} - A_{ii}C_{ij})$, где $i < j$:

$$\text{– если } k < i < j, \text{ то } \pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(C_{ij}E - EC_{ij}) = 0;$$

$$\text{– если } i \leq k < j, \text{ то } \pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(C_{ij}E + EC_{ij}) = C_{ij};$$

$$\text{– если } i < j \leq k, \text{ то } \pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(-C_{ij}E + EC_{ij}) = 0.$$

Сравнивая полученное с (i), видим, что при любом k справедливы равенства $FD_kF^{-1} = D_k + \frac{1}{2}(VD_k - D_kV) = \psi(J_k)$. Тогда имеем $D_k = \varphi_F(FD_kF^{-1}) = \varphi_F(\psi(J_k))$,

и остается только положить $T = XF$, так как $X \in \Sigma$ и $\varphi_F \circ \psi = \varphi_{XF}$. ■

Пример 4. Покажем, что изоморфизм φ_F (и, значит, φ_T) из теоремы 3, вообще говоря, переводит $\text{Aut } B$ в какую-то группу, отличную от $\text{Aut } B$. Для этого рассмотрим группу $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$ такую, что для $i \in \{1, 2\}$ рациональная группа Y_i

не является 2-делимой, содержит Y_{i+1} в качестве 2-сервантной подгруппы и при этом $t(Y_i) > t(Y_{i+1})$.

Если (в обозначениях теоремы 3) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$FAF^{-1} = FA \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку Y_3 не содержится в $2Y_1$, получаем, что $FAF^{-1} \notin \text{Aut } B$. Таким образом, группа $\text{Aut } B$ не содержит матрицу, которая могла бы быть прообразом матрицы $A \in \text{Aut } B$ при отображении φ_F . Следовательно, $\varphi_F(\text{Aut } B) \neq \text{Aut } B$.

Список источников

1. Вильданов В.К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3 (1). С. 174–177.
2. Vildanov V.K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. V. 197, № 5. P. 590–594. doi: 10.1007/s10958-014-1739-9
3. Vildanov V.K. On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. V. 230, № 3. P. 372–376. doi: 10.1007/s10958-018-3742-z
4. Вильданов В.К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2014.
5. Тимошенко Е.А., Третьяков И.В. Определяемость вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/76/3
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М. : Мир, 1977. Т. 2.
7. Третьяков И.В., Тимошенко Е.А. Инволюции в группе автоморфизмов вполне разложимой группы // Все грани математики и механики : всерос. молодежная науч. конф. студентов : сб. ст. Томск : Изд-во НТЛ, 2021. С. 139–154.
8. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31, № 1. P. 182–193. doi: 10.1016/0021-8693(74)90013-1

References

1. Vildanov V.K. (2011) Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya ranga 2 svoey gruppoy avtomorfizmov [Determinability of completely decomposable torsion-free Abelian group of rank 2 by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
2. Vildanov V.K. (2014) Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 197(5). pp. 590–594. DOI: 10.1007/s10958-014-1739-9.
3. Vildanov V.K. (2018) On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 372–376. DOI: 10.1007/s10958-018-3742-z.

4. Vildanov V.K. (2014) *Opredelyaemost' abelevoy gruppy ee gruppy avtomorfizmov i tsentrom kol'tsa endomorfizmov* [Determinability of an Abelian group by its automorphism group and the center of its endomorphism ring]. Dissertation. Tomsk State University.
5. Timoshenko E.A., Tretyakov I.V. (2022) *Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy gruppy ranga 3 ee gruppy avtomorfizmov* [Determinability of a completely decomposable rank 3 group by its automorphism group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/76/3.
6. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups*. Vol. 2. New York; London: Academic Press.
7. Tretyakov I.V., Timoshenko E.A. (2021) *Involutsii v gruppe avtomorfizmov vpolne razlozhimoy gruppy* [Involutions in the automorphism group of a completely decomposable group]. *All-Russia Youth Scientific Student Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: NTL. pp. 139–154.
8. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra*. 31(1). pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

Сведения об авторах:

Тимошенко Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Третьяков Иван Владиславович – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

Information about the authors:

Timoshenko Egor A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Tretyakov Ivan V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

Статья поступила в редакцию 02.09.2022; принята к публикации 04.12.2023

The article was submitted 02.09.2022; accepted for publication 04.12.2023