ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 88
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 512.554 MSC: 17D99
doi: 10.17223/19988621/88/3

Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над полем характеристики 2

Алёна Викторовна Казакова

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия, alvkazakova@gmail.com

Аннотация. Пусть $N\Phi(K)$ – нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей, ассоциированная с системой корней Φ (базис $N\Phi(K)$ составляют все элементы $e_r \in \Phi^+$ базиса Шевалле). Мы описываем автоморфизмы нильтреугольного кольца Ли типа G_2 над полем K при ограничении $2K = 0$. Для исследования автоморфизмов существенно используются верхние и нижние центральные ряды, описываемые в данной работе.
Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, кольцо, стандартные автоморфизмы, гиперцентральный автоморфизм

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (соглашение 075-02-2024-1429).

Для цитирования: Казакова А.В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G2 над полем характеристики 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 26–36. doi: 10.17223/19988621/88/3

Original article

Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of type G_2 over the field of characteristic 2

Alyona V. Kazakova

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation, alvkazakova@gmail.com

Abstract. Let $N\Phi(K)$ be the nil-triangular subalgebra of the Chevalley algebra over an associative commutative ring K with the identity associated with a root system Φ (The basis of $N\Phi(K)$ consists of all elements $e_r \in \Phi^+$ of the Chevalley basis). This paper studies the well-known problem of describing automorphisms of Lie algebras and rings $N\Phi(K)$. Automorphisms of the Lie algebra $N\Phi(K)$ under restrictions $K = 2K = 3K$ on ring K are described by Y. Cao, D. Jiang, J. Wang (Intern. J. Algebra and Computation, 2007). When passing from algebras to Lie rings, the group of automorphisms expands. Thus, the subgroup of central automorphisms is extended, i.e. acting modulo the center, ring automorphisms induced by automorphisms of the main ring are added. For the type A_n, a description of automorphisms of Lie rings $N\Phi(K)$ over K was obtained by V.M. Levchuk

(Siberian Mathematical Journal, 1983). Automorphisms of the Lie ring $N\Phi(K)$ are described by V.M. Levchuk (Algebra and Logic, 1990) for type D_4 over K, and for other types by A.V. Litavrin (Thesis for: Cand. Sc. (Physics and Mathematics) – 01.01.06. Siberian Federal University, 2017), excluding types G_2 and F_4. The author (2022) obtained a description of automorphisms of Lie rings $N\Phi(K)$ of type G_2 when K is an integrity domain and $K = 2K = 3K$ or $3K = 0$. In this paper we describe automorphisms of a nil-triangular Lie ring of type G_2 over a field K under restriction $2K = 0$. To study automorphisms, the upper and lower central series described in this work are essentially used. A new non-standard automorphism was found, called an S-automorphism.
Keywords: Chevalley algebra, nil-triangular subalgebra, ring, automorphism, hypercentral automorphism

Acknowledgments: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2024-1429).

For citation: Kazakova, A.V. (2024) Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of type G_2 over the field of characteristic 2. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 26–36. doi: 10.17223/19988621/88/3

Введение

Алгебру Шевалле над полем K характеризуют системой корней Φ евклидова пространства и базисом Шевалле, который составляют подходящий базис подалгебры Картана и векторы e_r, $r \in \Phi$. Подалгебру с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ для системы Φ^+ положительных корней, как и в [1], обозначим через $N\Phi(K)$ и назовем *нильтреугольной*.

Далее K – ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ при ограничениях $K = 2K = 3K$ на кольцо K описаны в 2007 г. в [2].

Автоморфизмы алгебры $N\Phi(K)$ являются и автоморфизмами множества $N\Phi(K)$, рассматриваемого как кольцо. При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется, поскольку в кольце не обязано сохраняться умножение на скаляр. Так, расширяется подгруппа центральных автоморфизмов, т.е. действующих тождественно по модулю центра, добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца.

Для типа A_n описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ над K получил в 1983 г. В.М. Левчук [1]; в основном существование нестандартных автоморфизмов здесь зависит от аннулятора в кольце K элемента 2.

Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ выявлены в [3] также для типа D_4; в [4–6] их описание редуцировано к исключительным типам G_2 и F_4.

В [7] получено описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типа G_2, когда K есть область целостности и $K = 2K = 3K$ или $3K = 0$.

В статье описываются автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2, когда K есть поле характеристики 2 – теорема 3.1. В доказательстве теоремы 3.1 существенно используется структура центральных рядов кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2, полученная в лемме 1.1. Также найден новый нестандартный автоморфизм, называемый S-автоморфизмом.

1. Центральные ряды и гиперцентральные автоморфизмы

Для описания автоморфизмов колец нам потребуются определенные характеристические идеалы. Аннулятором множества M в произвольном кольце R называем множество $\mathrm{Ann}_R(M) = \{\alpha \in R \mid M\alpha = \alpha M = 0\}$.

В произвольном кольце Ли $R = (R, +, *)$ аналогично группам вводят *гиперцентральный* или *верхний* центральный ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_i \subseteq Z_{i+1} \subseteq \ldots,$$

$$Z_{i+1} := \{g \in R \mid g * R \subseteq Z_i\} \quad (i \geq 0),$$

и *нижний* центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_n \supseteq \ldots, \quad \Gamma_{n+1} := \Gamma_n * R \ \ (n \geq 1).$$

Автоморфизм, действующий тождественно по модулю центра Z_1, называют *центральным*. В 1990 г. в [3] введено обобщение центральных автоморфизмов – гиперцентральные автоморфизмы.

Автоморфизм группы или кольца Ли L, единичный по модулю m-го гиперцентра и неединичный по модулю $(m–1)$-го гиперцентра, называют *гиперцентральным высоты m* (кратко – *гиперцентральным*, когда L не совпадает с m-м гиперцентром).

Пусть Φ^+ – множество положительных корней системы Φ, а $\Pi = \{r_1, ..., r_l\}$ – ее фундаментальная система простых корней из Φ. Для любого $r \in \Phi$ через $ht(r)$ обозначим высоту корня r. По определению при $r = a_1r_1 + ... + a_lr_l$ полагаем $ht(r) = a_1 + ... + a_l$. Согласно теореме о базисе алгебры Шевалле [8. Теорема 4.2.1], для произвольных корней $r, s \in \Phi^+$ имеем $e_r * e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и

$$e_r * e_s = N_{r,s} e_{r+s}, \quad N_{s,r} = -N_{r,s} \quad (r + s \in \Phi),$$

где структурные константы $N_{r,s} = \pm 1, \pm 2$ или ± 3, причем равенство $N_{r,s} = \pm 3$ возможно только для Φ типа G_2. Выбор знаков $N_{r,s}$ далее зафиксируем в соответствии с [8. С. 211].

В [8] введен *стандартный* центральный ряд алгебры Ли $N\Phi(K)$, где

$$L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0,$$

$$L_i := \langle Ke_r \mid r \in \Phi^+, ht(r) \geq i \rangle \quad (1 \leq i \leq h-1).$$

Когда верхний и нижний центральные ряды в $N\Phi(K)$ стандартны, имеем

$$L_i = \Gamma_i = Z_{h-i} \ (1 \leq i \leq h).$$

Описание верхних и нижних центральных рядов завершено в [5, 6] для классических типов и требуется лишь для типа F_4 (см.: [9]). Приведем их для типа G_2. Пусть a, b – простые корни для Φ типа G_2, корень a – короткий, и $|a| < |b|$. Тогда $\Phi^+ = \{a, b, a + b, 2a + b, 3a + b, 3a + 2b\}$.

Аннулятор элемента t в кольце K обозначаем через Δ_t.

Лемма 1.1. [9] Пусть K – произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с 1. Для кольца Ли $NG_2(K) = L_1$ верны равенства

$$\Gamma_2 = Ke_{a+b} + 2Ke_{2a+b} + 3Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b},$$

$$\Gamma_3 = 2Ke_{2a+b} + 6Ke_{3a+b} + 3Ke_{3a+2b},$$

$$\Gamma_i = 6L_i, \ i = 4, 5, 6,$$

$$Z_1 = \Delta_2\Delta_3 \ e_{a+b} + \Delta_3 \ e_{2a+b} + L_5,$$

$$Z_2 = \Delta_2\Delta_3\ e_a + \Delta_2\Delta_3\ e_b + (\Delta_2 + \Delta_3)\ e_{a+b} + \Delta_3\ e_{2a+b} + L_4,$$
$$Z_i = (\Delta_2 + \Delta_3)L_1 + L_{6-i},\ \ i = 3, 4.$$

Замечание 1.2. Очевидно, для произвольного элемента $t \in K$, $t \neq 0$, не являющегося делителем нуля в кольце K, любой $\Delta_t = 0$. Поэтому для поля K получаем $\Delta_2\Delta_3 = 0$, и формулы в лемме 1.1 для Z_1 и Z_2 упрощаются.

Следствие 1.3. Верхний или нижний центральный ряд кольца Ли $NG_2(K)$ при $2K \neq K$ не является стандартным.

2. Некоторые автоморфизмы кольца Ли $NG_2(K)$

Кольцо Ли $N\Phi(K)$ порождают множества Ke_r ($r \in \Phi^+$), а при $p(\Phi)!K = K$, где $p(\Phi) = \max\ \{(r,r)/(s,s) \mid r, s \in \Phi\} = 1$, 2 или 3, даже Ke_r ($r \in \Pi$). К основным соотношениям относятся также и соотношения в кольце коэффициентов.

Для автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ полезна (и очевидна)

Лемма 2.1. Автоморфизм Φ аддитивной группы кольца Ли $N\Phi(K)$ есть его автоморфизм тогда и только тогда, когда Φ сохраняет соотношения

$$xe_r + ye_r = (x+y)e_r\ \ (r \in \Phi^+,\ x, y \in K),$$
$$xe_r * ye_s = xyN_{r,s}e_{r+s}\ \ (r, s, r+s \in \Phi^+),$$
$$xe_r * ye_s = 0\ (r, s \in \Phi^+, r+s \notin \Phi^+).$$

В алгебре Шевалле типа Φ над K подалгебра $N\Phi(K)$ характеристична относительно каждого *корневого* автоморфизма $x_r(t)$ ($r \in \Phi$, $t \in K$) [8. § 4.3]. Его ограничение дает автоморфизм подалгебры $N\Phi(K)$, называемый *внутренним*. Действием на базе он определяется по правилу

$$x_r(t) : e_r \to e_r,\ \ e_s \to \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}t^i e_{ir+1}\ \ \ (s \in \Phi^+ \setminus \{r\}),$$
$$M_{r,s,0} := 1,\ \ M_{r,s,i} := (1/i!)N_{r,s}N_{r,r+s}\ldots N_{r,(i-1)r+s}.$$

Все корневые автоморфизмы $x_r(t)$ порождают подгруппу J *внутренних* автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$. Известно, что она изоморфна фактор-группе унипотентной группы $U = U\Phi(K)$ по центру.

Диагональный автоморфизм $h(\chi) : e_r \to \chi(r)e_r$ ($r \in \Phi^+$) алгебры Ли $N\Phi(K)$ сопоставляет любому K-характеру χ решетки корней, т.е. гомоморфизму подгруппы $\langle\Phi\rangle^+$ аддитивной группы V^+ в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K [8. § 7.1]. Хорошо известно, что χ определяется однозначно значениями на простых корнях.

Кольцевые автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ выделяем по аналогии с [8].

Произведения внутренних, диагональных, кольцевых и центральных автоморфизмов называют *стандартными* автоморфизмами.

Один нестандартный автоморфизм, известный для Φ типа A_n с 1950-х гг., определен Гиббсом [10] для всех $k \in K$, а для Φ типа G_2 – по правилу ($r \in \Phi^+$)

$$\xi(k) : e_a \to e_a,\ e_b \to e_b + ke_{3a+b},\ e_r \to e_r. \qquad (1)$$

В соответствии с [2] и [11] его называют автоморфизмом Гиббса. Ясно, что при $k \neq 0$ он является гиперцентральным автоморфизмом высоты 2.

Далее мы выделим нестандартные автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 при $t \in K$ следующих четырех типов:

$$\xi_1(t): e_{2a+b} \to e_{2a+b} + te_{a+b},$$
$$e_r \to e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+, \tag{2}$$

$$\xi_2(t):\quad e_{2a+b} \to e_{2a+b} + te_b,\quad e_{3a+b} \to e_{3a+b} + te_{a+b},$$
$$e_r \to e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+, \tag{3}$$

$$\xi_3(t): e_b \to e_b + te_{2a+b},\quad e_{a+b} \to e_{a+b} + te_{3a+b},$$
$$e_r \to e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+, \tag{4}$$

$$\xi_4(t): e_b \to e_{2a+b},\quad e_{a+b} \to e_{3a+b},\quad e_{2a+b} \to e_b,\quad e_{3a+b} \to e_{a+b},$$
$$e_r \to e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+. \tag{5}$$

Автоморфизм $\xi_4(t)$ назовем *S-автоморфизмом*, так как он связан с подстановками положительных корней.

Лемма 2.2. Отображения ξ_i ($i = 1, 2, 3$) при $2K = 0$ и ξ_4 при $4K = 0$ являются автоморфизмами кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над кольцом K.

Доказательство. Нетрудно проверить, что отображения ξ_i – автоморфизмы K-модуля $N\Phi(K)$ типа G_2. Из того, что в кольце $N\Phi(K)$ выполняются обычные свойства линейности $(\alpha x + \beta y)^\phi = \alpha(x)^\phi + \beta(y)^\phi$, следует, что ϕ – линейное преобразование, под действием которого сохраняется умножение на скаляр.

Проверим соотношения из леммы 2.1 при $t \in K$.

$$\xi_1(xe_{2a+b} * e_a) = \xi_1(N_{2a+b,a}e_{3a+b}) = N_{2a+b,a}\xi_1(e_{3a+b}) = N_{2a+b,a}e_{3a+b},$$
$$\xi_1(e_{2a+b}) * \xi_1(e_a) = (e_{2a+b} + te_{a+b}) * e_a = N_{2a+b,a}e_{3a+b} + N_{a+b,a}te_{2a+b}.$$

Инвариантность этих соотношений следует сейчас из равенства $N_{a+b,a}\, t = 0$, откуда $2t = 0$.

$$\xi_1(xe_{2a+b} * e_{a+b}) = \xi_1(N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b}) = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b},$$
$$\xi_1(e_{2a+b}) * \xi_1(e_{a+b}) = (e_{2a+b} + te_{a+b}) * e_{a+b} = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b}.$$

$$\xi_1(xe_{2a+b} * e_{2a+b}) = \xi_1(0) = 0,$$
$$\xi_1(e_{2a+b}) * \xi_1(e_{2a+b}) = (e_{2a+b} + te_{a+b}) * (e_{2a+b} + te_{a+b}) = 0.$$

Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_1 – автоморфизм. Далее.

$$\xi_2(e_a * e_{2a+b}) = \xi_2(N_{a,2a+b}e_{3a+b}) = N_{a,2a+b}\xi_2(e_{3a+b}) = N_{a,2a+b}(e_{3a+b} + te_{a+b}),$$
$$\xi_2(e_a) * \xi_2(e_{2a+b}) = e_a * (e_{2a+b} + te_b) = N_{a,2a+b}e_{3a+b} + N_{a,b}te_{a+b},$$

инвариантность этого соотношения, очевидно, равносильна условию $(N_{a,b} - N_{a,2a+b})t = 0$, где $N_{a,b} = -1$, $N_{a,2a+b} = 3$. Поэтому $4t = 0$.

$$\xi_2(e_{2a+b} * e_{3a+b}) = 0,$$
$$\xi_2(e_{2a+b}) * \xi_2(e_{3a+b}) = (e_{2a+b} + te_b) * (e_{3a+b} + te_{a+b}) = tN_{2a+b,a+b}e_{3a+2b} + tN_{b,3a+b}e_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения, очевидно, равносильна условию $(N_{2a+b,a+b} + N_{b,3a+b})t = 0$. Так как $N_{2a+b,a+b} = -3$, $N_{b,3a+b} = 1$, то $2t = 0$.

$$\xi_2(e_{2a+b} * e_{a+b}) = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b},$$
$$\xi_2(e_{2a+b}) * \xi_2(e_{a+b}) = (e_{2a+b} + te_b) * e_{a+b} = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b}.$$

$$\xi_2(e_{3a+b} * e_b) = N_{3a+b,b}e_{3a+2b},$$
$$\xi_2(e_{3a+b}) * \xi_2(e_b) = (e_{3a+b} + te_{a+b}) * e_b = N_{3a+b,b}e_{3a+2b}.$$

$$\xi_2(e_{3a+b} * e_a) = 0,$$

$$\xi_2(e_{3a+b}) * \xi_2(e_a) = (e_{3a+b} + te_{a+b}) * e_a = N_{a+b,a}e_{2a+b},$$

инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенств $N_{a+b,a}t = 0$, откуда $2t = 0$. Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_2 – автоморфизм. Далее.

$$\xi_3(e_b * e_a) = \xi_3(N_{b,a}e_{a+b}) = N_{b,a}\xi_3(e_{a+b}) = N_{b,a}(e_{a+b} + te_{3a+b}),$$

$$\xi_3(e_b) * \xi_3(e_a) = (e_b + te_{2a+b}) * e_a = N_{b,a}e_{a+b} + N_{2a+b,a}te_{3a+b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{b,a} - N_{2a+b,a})t = 0$. Поскольку $N_{2a+b,a} = -3$, $N_{b,a} = 1$, то $4t = 0$.

$$\xi_3(e_b * e_{a+b}) = 0,$$

$$\xi_3(e_b) * \xi_3(e_{a+b}) = (e_{2a+b} + te_b) * (e_{3a+b} + te_{a+b}) = N_{2a+b,a+b}te_{3a+2b} + N_{b,3a+b}te_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{2a+b,a+b} + N_{b,3a+b})t = 0$. Так как $N_{2a+b,a+b} = -3$, $N_{b,3a+b} = 1$, то $2t = 0$.

$$\xi_3(e_{a+b} * e_a) = N_{a+b,a}e_{2a+b},$$

$$\xi_3(e_{a+b}) * \xi_3(e_a) = (e_{a+b} + te_{3a+b}) * e_a = N_{a+b,a}e_{2a+b}.$$

$$\xi_3(e_{a+b} * e_b) = 0,$$

$$\xi_3(e_{a+b}) * \xi_3(e_b) = (e_{a+b} + te_{3a+b}) * (e_b + te_{2a+b}) = N_{a+b,2a+b}te_{3a+2b} + N_{3a+b,b}te_{3a+2b}.$$

Поскольку $N_{a+b,2a+b} = 3$, $N_{3a+b,b} = -1$, то $2t = 0$.

$$\xi_3(e_{a+b} * e_{2a+b}) = N_{a+b,2a+b}e_{3a+2b},$$

$$\xi_3(e_{a+b}) * \xi_3(e_{2a+b}) = (e_{a+b} + te_{3a+b}) * e_{2a+b} = N_{a+b,2a+b}e_{3a+2b}.$$

Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_3 – автоморфизм. Далее.

$$\xi_4(te_b * e_a) = \xi_4(N_{b,a}te_{a+b}) = N_{b,a}te_{3a+b},$$

$$\xi_4(te_b) * \xi_4(e_a) = te_{2a+b} * e_a = N_{2a+b,a}te_{3a+b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{b,a} - N_{2a+b,a})t = 0$. Так как $N_{2a+b,a} = -3$, $N_{b,a} = 1$, то $4t = 0$.

$$\xi_4(te_b * e_{3a+b}) = \xi_4(N_{b,3a+b}te_{3a+2b}) = N_{b,3a+b}te_{3a+2b},$$

$$\xi_4(te_b) * \xi_4(e_{3a+b}) = te_{2a+b} * e_{a+b} = N_{2a+b,a+b}te_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{b,3a+b} - N_{2a+b,a+b})t = 0$. Из того, что $N_{b,3a+b} = 1$, $N_{2a+b,a+b} = -3$ следует равенство $4t = 0$.

$$\xi_4(te_{a+b} * e_{2a+b}) = \xi_4(N_{a+b,2a+b}te_{3a+2b}) = N_{a+b,2a+b}te_{3a+2b},$$

$$\xi_4(te_{a+b}) * \xi_4(e_{2a+b}) = te_{3a+b} * e_b = N_{3a+b,b}te_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{a+b,2a+b} - N_{3a+b,b})t = 0$. Из серии равенств $N_{a+b,2a+b} = 3$, $N_{3a+b,b} = -1$ следует, что $4t = 0$. Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_4 – автоморфизм.

3. Автоморфизмы кольца $NG_2(K)$ при $2K = 0$

Исследуем описание автоморфизмов кольца Ли $NG_2(K)$ или $N\Phi(K)$ типа G_2 над полем K при $2K = 0$.

Теорема 3.1. Пусть R – кольцо Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над полем K при $2K = 0$. Тогда справедливы два случая.

1. Автоморфизм ϕ кольца R есть произведение стандартного автоморфизма, автоморфизмов вида (3) и (4), а также гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 вида (1), (2);

2. Автоморфизм ϕ кольца R есть произведение S-автоморфизма вида (5), стандартного автоморфизма, автоморфизмов вида (3) и (4), а также гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 вида (1), (2).

Доказательство. Исследуем произвольный автоморфизм $\phi \in \mathrm{Aut}\, R$. Кольцо R порождается аддитивными подгруппами Ke_a, Ke_b и Ke_{2a+b}. Поэтому действие на них характеризует автоморфизм ϕ. Вначале исследуем действие по модулю $R^2 = Ke_{a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}$. Находим аннуляторы кольца R и его степени R^2:

$$\mathrm{Ann}\, R = Ke_{3a+2b}, \quad \mathrm{Ann}\, R^2 = Ke_a + Ke_{a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}.$$

Учитывая характеристичность членов верхнего и нижнего центральных рядов кольца R и характеристичность идеалов $\mathrm{Ann}\, R^2$ при $x, y, z \in K$, получаем

$$(xe_a)^{\phi} = x^{\sigma} e_a \mod R^2,$$

$$(ye_b)^{\phi} = y^{\lambda'} e_a + y^{\lambda} e_b + y^{\lambda''} e_{2a+b} \mod R^2,$$

$$(ze_{2a+b})^{\phi} = z^{\mu'} e_a + z^{\mu''} e_b + z^{\mu} e_{2a+b} \mod R^2 \tag{6}$$

для подходящих эндоморфизмов $\sigma, \lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu''$ аддитивной группы K^+ поля K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R). Рассмотрим два случая.

1. Одновременно $x^{\lambda}, y^{\mu} \neq 0$ при $x, y \neq 0$, $x, y \in K$. Учитывая, что K – поле, умножив ϕ последовательно на автоморфизм вида (3) при $t = c = z^{\mu''}(z^{\mu})^{-1}$ и автоморфизм вида (4) при $t = (y^{\lambda} + y^{\lambda''}c)^{-1} y^{\mu''}$, получаем

$$(xe_a)^{\phi} = x^{\sigma} e_a \mod R^2,$$

$$(ye_b)^{\phi} = y^{\lambda'} e_a + (y^{\lambda} + y^{\lambda''} z^{\mu''} (z^{\mu})^{-1}) e_b \mod R^2,$$

$$(ze_{2a+b})^{\phi} = z^{\mu'} e_a + z^{\mu} e_{2a+b} \mod R^2.$$

Отображение ψ: $y^{\psi} = (y^{\lambda} + y^{\lambda''} z^{\mu''} (z^{\mu})^{-1})$ будет эндоморфизмом аддитивной группы поля K, так как

$$(x+y)^{\psi} = (x+y)^{\lambda} + (x+y)^{\lambda''} z^{\mu''} (z^{\mu})^{-1} = x^{\lambda} + y^{\lambda} + ((x^{\lambda''} + y^{\lambda''}) z^{\mu''} (z^{\mu})^{-1}) = x^{\psi} + y^{\psi}.$$

Учитывая, что ϕ – автоморфизм, получаем, что $\psi \neq 0$. Отсюда получаем, что λ' и μ' равны 0, используя равенства

$$0 = (ye_b)^{\phi} * (ze_{2a+b})^{\phi} = (y^{\lambda} + y^{\lambda''} z^{\mu''} (z^{\mu})^{-1}) z^{\mu'} e_{a+b} + y^{\lambda'} z^{\mu} e_{3a+b} \mod Ann\, R.$$

Исследуем $\sigma \in \mathrm{End}\, K^+$. Учитывая характеристичность идеалов $\mathrm{Ann}\, R^2$, R^2 и серию равенств

$$Ke_a + R^2 = \mathrm{Ann}\, R^2 = (\mathrm{Ann}\, R^2)^{\phi} = (Ke_a)^{\phi} + (R^2)^{\phi} = K^{\sigma} e_a + R^2,$$

из равенства $K^{\sigma} = K$ получаем сюръективность σ.

Докажем инъективность σ. Пусть $x, y \in K$ и $x \neq y$, тогда

$$(xe_a)^{\phi} = x^{\sigma} e_a \mod R^2,$$

$$(ye_a)^{\phi} = y^{\sigma} e_a \mod R^2.$$

Предположим, что $x^{\sigma} = y^{\sigma} = c$, тогда

$$(xe_a)^{\phi} = ce_a + Y_1, Y_1 \in R^2,$$

$$(ye_a)^{\phi} = ce_a + Y_2, Y_2 \in R^2.$$

Пусть $Y_1 - Y_2 = Y \in R^2$ и $A = ce_a + Y_1$, $B = ce_a + Y_2$, откуда

$$1)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = A^{\phi^{-1}} - B^{\phi^{-1}} = (x-y)e_a,$$

$$2)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = Y^{\phi^{-1}} \in R^2.$$

Учитывая характеристичность R^2 и 1), из 2) получаем, что $Y^{\phi^{-1}} = 0$, откуда $x = y$. Инъективность σ доказана. Отсюда вытекает включение $\sigma \in \mathrm{Aut}\, K^+$. По модулю Ann R имеем

$$Ke_{a+b} + Ke_{3a+b} = (Ke_b * e_a)^\phi + (Ke_{2a+b} * e_a)^\phi = K^\psi 1^\sigma e_{a+b} + K^\mu 1^\sigma e_{3a+b},$$

откуда $K^\psi 1^\sigma = K$, $K^\mu 1^\sigma = K$ и аналогично $1^\psi K^\sigma = K$, $1^\mu K^\sigma = K$. Отсюда и из того, что K – поле, вытекают равенства $K^\psi = K = K^\mu$, т.е. сюръективность $\psi, \mu \in \mathrm{Aut}\, K^+$.

Докажем инъективность μ. Пусть $x, y \in K$ и $x \neq y$, тогда

$$(xe_{3a+b})^\phi = x^\mu e_{3a+b} \mod R^2,$$

$$(ye_{3a+b})^\phi = y^\mu e_{3a+b} \mod R^2.$$

Предположим, что $x^\mu = y^\mu = c$, тогда

$$(xe_{3a+b})^\phi = ce_{3a+b} + Y_1,\ Y_1 \in R^2,$$

$$(ye_{3a+b})^\phi = ce_{3a+b} + Y_2,\ Y_2 \in R^2.$$

Пусть $Y_1 - Y_2 = Y \in R_2$ и $A = ce_{3a+b} + Y_1$, $B = ce_{3a+b} + Y_2$, откуда

$$1)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = A^{\phi^{-1}} - B^{\phi^{-1}} = (x-y)e_{3a+b},$$

$$2)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = Y^{\phi^{-1}} \in R^2.$$

Учитывая характеристичность R_2 и 1), из 2) получаем, что $Y^{\phi^{-1}} = 0$, откуда $x = y$. Инъективность μ доказана. Аналогичное доказательство для $\psi \in \mathrm{End}\, K^+$. Отсюда получаем, что $\psi, \mu \in \mathrm{Aut}\, K^+$.

С точностью до умножения ϕ на диагональный автоморфизм мы получим $1^\sigma = 1^\psi = 1^\mu = 1$.

Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R дает (по модулю Ann R)

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\psi 1^\sigma e_{a+b},$$

$$(xe_b * e_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\psi x^\sigma e_{a+b},$$

$$(xe_{2a+b} * e_a)^\phi = (xe_{2a+b})^\phi * e_a^\phi = x^\mu 1^\sigma e_{3a+b},$$

$$(xe_{2a+b} * e_a)^\phi = e_{2a+b}^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\mu x^\sigma e_{3a+b}.$$

Поэтому $x^\psi = x^\sigma = x^\mu$ для любого $x \in K$, т.е. $\psi = \sigma = \mu$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in \mathrm{Aut}\, K$ в силу равенств (по модулю Ann R)

$$x^\sigma y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

С точностью до умножения ϕ на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$ мы получим, что $\sigma = 1$, откуда ($x \in K$)

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mod Q(r) \quad (r \in \Phi^+ \setminus \{2a+b\}),\ (xe_{2a+b})^\phi = xe_{2a+b} \mod R^2,$$

где $Q(r) := \sum_{s>r} Ke_s$. Считаем, что $s > r$, если коэффициенты разложения $s - r$ по базе $\Pi(\Phi^+)$ положительны.

Умножаем ϕ последовательно на внутренние автоморфизмы вида $\chi_b(u)$, $\chi_{2a+b}(u)$, $\chi_a(u)$, $\chi_{a+b}(u)$, $\chi_{3a+b}(u)$, автоморфизмы вида (1), (2) и на аннуляторные автоморфизмы из леммы [12], получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a,$$

$$(ye_b)^\phi = ye_b,$$

$$(ze_{2a+b})^\phi = ze_{2a+b} + ce_{3a+b} \ (x, y, z, c \in K).$$

Так как $0 = (e_b * ze_{2a+b})^\phi = ce_{3a+2b}$, получаем, что $c = 0$. Значит

$$(xe_a)^\phi = xe_a,\ (ye_b)^\phi = ye_b,\ (ze_{3a+b})^\phi = ze_{3a+b}.$$

2. Хотя бы один из x^λ, y^μ равен 0 при $x, y \neq 0$, $x, y \in K$.

Лемма 3.2. В (6) для $NG_2(K)$ над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей характеристики 2, если хотя бы один из x_1^λ, y_1^μ равен 0 для некоторых $x_1, y_1 \neq 0$, $x_1, y_1 \in K$, то одновременно $x^{\lambda''}, y^{\mu''} \neq 0$ для любых $x, y \neq 0$, $x, y \in K$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $x \in K$, $x^\lambda = 0$. Откуда $(xe_b)^\phi = x^{\lambda'}e_a + x^{\lambda''}e_{2a+b} \bmod R^2$. Проверим, что $y^{\mu''} \neq 0$ для любого $y \neq 0$, $y \in K$. Пусть существует такой $(y_1 \neq 0) \in K$ такой, что $y_1^{\mu''} = 0$, тогда

$$(y_1e_{3a+b})^\phi = (e_a * y_1e_{2a+b})^\phi = (e_a)^\phi * (e_{2a+b})^\phi = 1^\sigma y_1^\mu e_{3a+b} \quad \operatorname{mod} \operatorname{Ann} R,$$

$$(y_1e_{3a+2b})^\phi = (y_1e_{3a+b} * e_b)^\phi = (y_1e_{3a+b})^\phi * (y_1e_b)^\phi = 0,$$

т.е. получаем противоречие, так как ϕ – автоморфизм и идеал Ann R характеристичен. Отсюда $y^{\mu''} \neq 0$ для любого $(y \neq 0) \in K$.

Проверим, что $x^{\lambda''} \neq 0$ для любого $x \neq 0$, $x \in K$. Пусть существует такой $(x_1 \neq 0) \in K$ такой, что $x_1^{\lambda''} = 0$, тогда

$$(x_1e_{a+b})^\phi = (e_a * x_1e_b)^\phi = (e_a)^\phi * (x_1e_b)^\phi = 0,$$

т.е. получаем противоречие, так как ϕ – автоморфизм.

Для случая $y^\mu = 0$ для некоторого $(y \neq 0) \in K$ доказывается аналогично предыдущему случаю $x^\lambda = 0$ для некоторого $(x \neq 0) \in K$. Лемма доказана.

Умножая ϕ на автоморфизм (5), переходим к случаю 1. Теорема доказана.

Список источников

1. *Левчук В.М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов // Сибирский математический журнал. 1983. Т. 24, № 4. С. 64–80.
2. *Cao Y., Jiang D., Wang J.* Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings // Intern. J. Algebra and Computation. 2007. V. 17 (3). P. 527–555.
3. *Левчук В.М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп Шевалле // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.
4. *Литаврин А.В.* Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Известия Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2015. Т. 13, № 3. С. 41–55.
5. *Левчук В.М., Литаврин А.В.* Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 467–477. doi: 10.17377/semi.2016.13.040. URL: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf
6. *Литаврин А.В.* Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов : дис. … канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2017.
7. *Казакова А.В.* Автоморфизмы нильтреугольного подкольца алгебры Шевалле типа G_2 // Сборник статей Всерос. молодежной науч. конф. «Все грани математики», Томск, 2022. Томск : Красное знамя, 2022. С. 28.

8. *Carter R.* Simple Groups of Lie Type. New York : Wiley and Sons, 1972. 331 p.
9. *Казакова А.В., Кириллова Е.А.* Автоморфизмы и центральные ряды нильтреугольных подколец алгебр Шевалле // Мальцевские чтения : тезисы докладов междунар. конф., Новосибирск, 2020. Новосибирск : Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. С. 191.
10. *Gibbs J.A.* Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. V. 14 (2). P. 203–208. doi: 10.1006/jabr.2001.886
11. *Левчук В.М., Литаврин А.В.* Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2016. Т. 17, № 2. С. 324–327.
12. *Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.* The automorphism group of certain radical rings // Journal of Algebra. 2001. V. 243. P. 473–485.

References

1. Levchuk V.M. (1983) Connections between a unitriangular group and certain rings. Chapter 2: Groups of automorphisms. *Siberian Mathematical Journal*. 24. pp. 543–557. DOI: 10.1007/BF00969552.
2. Cao Y., Jiang D., Wang J. (2007) Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings. *International Journal of Algebra and Computation.* 17(3). pp. 527–555.
3. Levchuk V.M. (1990) Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups. *Algebra and Logic*. 29. pp. 211–224. DOI: 10.1007/BF01979936.
4. Litavrin A.V. (2015) Avtomorfizmy nil'potentnoy podalgebry $N\Phi(K)$ algebry Shevalle simplekticheskogo tipa [Automorphisms of the nilpotent subalgebra $N\Phi(K)$ of the Chevalley algebra of symplectic type]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika – The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 13(3). pp. 41–55.
5. Levchuk V.M., Litavrin A.V. (2016) Gipercentral'nye avtomorfizmy nil'treugol'nyh podalgebr algebr Shevalle [Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 13. pp. 467–477. URL: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf.
6. Litavrin A.V. (2017) *Avtomorfizmy nil'treugol'nykh podkolets algebr Shevalle klassicheskikh tipov* [Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of classic types]. Dissertation. Siberian Federal University.
7. Kazakova A.V. (2022) Avtomorfizmy nil'treugol'nogo podkol'tsa algebry Shevalle tipa G_2 [Automorphisms of the nil-triangular subring of the Chevalley algebra of type G_2]. *Collection of papers of the All-Russia Young Researchers' Scientific Conference "All Faces of Mathematics," Tomsk, 2022. Tomsk: Krasnoye Znamya.* p. 28.
8. Carter R. (1972) *Simple Groups of Lie Type.* New York: Wiley and Sons.
9. Kazakova A.V., Kirillova E.A. (2020) Avtomorfizmy i central'nyye ryady nil'treugol'nyh podkolets algebr Shevalle [Automorphisms and central series of niltriangular subrings of Chevalley algebras]. *Collection of Abstracts of the International Conference "Mal'tsev Meeting," Novosibirsk, 2020. Novosibirsk: Novosibirsk State University.* p. 191.
10. Gibbs J.A. (1970) Automorphisms of certain unipotent groups. *Journal of Algebra.* 14(2). pp. 203–228. DOI: 10.1006/jabr.2001.886.
11. Levchuk V.M., Litavrin A.V. (2016) Avtomorfizmy nil'treugol'nykh podkolets algebr Shevalle ortogonal'nykh tipov [Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of orthogonal types]. *Vestnik sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni Akademika M.F. Reshetneva – Siberian Aerospace Journal*. 17(2). pp. 324–327.
12. Kuzucuoglu F., Levchuk V.M. (2001) The automorphism group of certain radical rings. *Journal of Algebra.* 243. pp. 473–485. DOI: 10.1006/jabr.2001.886.

***Сведения об авторе*:**
Казакова Алёна Викторовна – аспирант Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск, Россия. E-mail: alvkazakova@gmail.com

***Information about the author*:**
Kazakova Alyona V. (Postgraduate Student at the Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: alvkazakova@gmail.com

Статья поступила в редакцию 26.01.2024; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 26.01.2024; accepted for publication 10.04.2024