ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 88
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 515.122 MSC: 54C25, 54C30, 54D20, 54F65
doi: 10.17223/19988621/88/4

Некоторые свойства топологических ежей

Даниил Юрьевич Ляховец[1], Александр Владимирович Осипов[2]

[1, 2] Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия
[2] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
[1] zoy01111@gmail.com
[2] oab@list.ru

Аннотация. Рассматриваются топологические пространства «евклидовы ежи», представляющие собой подпространства евклидовых пространств $\mathbf{R}^n$, обладающие следующим свойством: вместе с каждой своей точкой они содержат весь отрезок, соединяющий данную точку с точкой начала координат.

Доказано, что для каждого $n \geq 2$ существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно негомеоморфных евклидовых ежей в $\mathbf{R}^n$. Также доказано, что для каждого счетного евклидова ежа существует гомеоморфный ему плоский ёж.

Также рассматривается два топологических пространства: квазиметрический ёж и фактор-ёж, у которых находятся следующие кардинальные и наследственные инварианты: вес, характер, плотность, спред, экстент, клеточность, теснота, число открытых множеств и число Линделёфа.

Наконец, рассматриваются секвенциальные ежи, которые топологически вкладываются в функциональные пространства. Приводятся критерии топологического вложения секвенциальных ежей в пространство непрерывных функций и в пространство бэровских функций.

Ключевые слова: евклидовый ёж, кардинальные инварианты, квазиметрика, фактор-топология, прямая Зоргенфрея, метрический ёж, секвенциальный ёж, пространство непрерывных функций, пространство бэровских функций, топологическое вложение

Для цитирования: Ляховец Д.Ю., Осипов А.В. Некоторые свойства топологических ежей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 37–52. doi: 10.17223/19988621/88/4

Original article

Some properties of topological hedgehogs

Daniil Yu. Lyakhovets[1], Alexander V. Osipov[2]

[1, 2] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation
[2] Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

[1] zoy01111@gmail.com
[2] oab@list.ru

Abstract. The topological spaces called Euclidean hedgehogs are considered. These are subspaces of the Euclidean spaces $\boldsymbol{R}^n$ with the following property: together with each of their points, they contain the entire segment connecting the given point with the point of origin.
It is proved that for all $n \geq 2$ there exist pairwise non-homeomorphic Euclidean hedgehogs in $\boldsymbol{R}^n$. It is also proved that for every countable Euclidean hedgehog there exists a flat hedgehog homeomorphic to it.
We also consider two topological spaces: the quasimetric hedgehog and the quotient hedgehog, which have the following cardinal and hereditary invariants: weight, character, density, spread, extent, cellularity, tightness, number of open sets, and Lindelöf number.
Finally, sequential hedgehogs are considered that are topologically embedded in function spaces. Criteria are given for the topological embedding of sequential hedgehogs in the space of continuous functions and in the space of Baire functions.
Keywords: Euclidean hedgehog, cardinal invariants, quasi-metric, factor topology, Sorgenfrey line, metric hedgehog, sequential hedgehog, space of continuous functions, space of Baire functions, topological embedding

For citation: Lyakhovets, D.Yu., Osipov, A.V. (2024) Some properties of topological hedgehogs. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 37–52. doi: 10.17223/19988621/88/4

1. Евклидовы ежи

Будем называть множество $J \subseteq \mathbf{R^n}$ ежом в $\mathbf{R^n}$, если для каждой точки $x \in J$ отрезок $[0_n, x]$ содержится в J, *где* $0_n := (0,...,0) \in \mathbf{R^n}$. 0_n будем называть *центральной точкой* и обозначать $o(J)$. Пространство $\langle J, \tau_e \rangle$ с топологией τ_e, наследуемой из евклидова пространства $\mathbf{R^n}$, будем называть *евклидовым ежом в* $\mathbf{R^n}$.

Евклидовый ёж в $\mathbf{R^2}$ будем называть *плоским ежом.*

Множество $A \subseteq J$ называется *иголкой* ежа J, если существует точка $x \in J \setminus \{o(J)\}$ такая, что открытый луч с началом в $o(J)$, проходящий через точку x, в пересечении с ежом J дает множество A. Иголку ежа J, проходящую через точку x, будем обозначать $N(x, J)$.

Точку $x \in J$ будем называть *концевой точкой* ежа J, если полуинтервал $(o(J), x]$ является иголкой ежа J. Множество всех концевых точек ежа J будем обозначать через $K(J)$.

Концевую точку иголки $N(x, J)$ будем обозначать $k(x, J)$. Точка $x \in J$ *промежуточная*, если x не концевая и не центральная. Множество всех промежуточных точек ежа J будем обозначать $I(J)$. Ёж *счетен,* если множество его иголок не более чем счетно. Будем называть ежа *единичным*, если длины всех его иголок равны 1. Ёж *нетривиальный*, если количество его иголок более двух. Ёж *замкнут*, если все его иголки замкнуты.

Определения, обозначения и терминология взяты из [1–3].

Теорема 1.1. Для каждого $n \geq 2$ существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно негомеоморфных евклидовых ежей в $\mathbf{R^n}$.

Доказательство. Покажем, что для любого ежа ежей, гомеоморфных ему, не более, чем $2^{2^{\aleph_0}}$. В самом деле, ёж – это подпространство в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, следовательно, в нем существует счетное плотное множество A, и достаточно посмотреть, куда при гомеоморфизме может перейти множество A. При гомеоморфизме плотное множество переходит в плотное множество. У каждой из счетного числа точек множества A всего $2^{\aleph_0}$ возможных образов, а значит, и всего гомеоморфных ежей $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Теперь заметим, что уже хотя бы единичных ежей столько же, сколько подмножеств S^1, а их $2^{2^{\aleph_0}}$, так как еж определяется множеством концевых точек. Ежи, гомеоморфные друг другу, делятся на классы, в каждом классе не более чем $2^{\aleph_0}$, а всего ежей $2^{\aleph_0}$, поэтому классов должно быть $2^{2^{\aleph_0}}$ (о/п пусть различных классов $\tau < 2^{2^{\aleph_0}}$, тогда всего ежей $\leq \tau \cdot 2^{\aleph_0} = \max\left(\tau, 2^{\aleph_0}\right) < 2^{2^{\aleph_0}}$ – противоречие).□

Лемма 1.1. Пусть J_1, J_2 – счётные замкнутые нетривиальные евклидовы ежи, и $f : J_1 \to J_2$ – гомеоморфизм. Тогда

1) $f(o(J_1)) = o(J_2)$;
2) $f(K(J_1)) = K(J_2)$;
3) $f(I(J_1)) = I(J_2)$.

Доказательство. 1) Предположим противное. Пусть центральная точка ежа J_1 не перешла в центральную точку ежа J_2, значит она перешла в промежуточную или концевую точку. Тогда, если удалить ее образ из ежа J_2, компонент линейной связности в еже J_2 станет не более двух, но прообраз образа центральной точки – это центральная точка, а значит, при ее удалении компонент линейной связности будет не менее трех – противоречие с тем, что f гомеоморфизм. Пункты 2), 3) доказываются аналогично: при удалении концевой точки, количество компонент линейной связности не меняется; при удалении промежуточной их становится две. □

Лемма 1.2. Пусть J_1, J_2 – счётные замкнутые, нетривиальные единичные ежи. Следующие условия эквивалентны:

1) J_1 и J_2 гомеоморфны;
2) $K(J_1)$ и $K(J_2)$ гомеоморфны.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) – прямое следствие **леммы 1.1.**

Докажем 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть f – гомеоморфизм между $K(J_1)$ и $K(J_2)$; продолжим отображение f на $N(x, J_1)$ до гомеоморфизма $\overline{f}$ между J_1 и J_2. Рассмотрим $x \in K(J_1)$, в точке $t \in N(x, J_1)$ определим $\overline{f}$ равенством $\overline{f}(t) := \|t\| \cdot f(x)$. Положим $\overline{f}(o(J_1)) := o(J_2)$. Построенное продолжение изометрично отображает иголку $N(x, J_1)$ на иголку $N(f(x), J_1)$, кроме того, для любой точки $t \in J_1$ имеет место равенство $\left\|\overline{f}(t)\right\| = \|t\|$.

Покажем, что $\overline{f}$ – гомеоморфизм. Пусть $x \in J_1$ – предел последовательности точек $x_m \in J_1$. Если $x = o(J_1)$, то $\|x\| = 0$ и $\|x_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, а значит, $\overline{f}(x_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} o(J_2)$.

Пусть $x \neq o(J_1)$. Рассмотрим случай, когда все элементы последовательности x_m лежат на одной иголке, тогда это иголка $N(x, J_1)$, и последовательность $\overline{f}(x_m)$ сходится к $\overline{f}(x)$. Рассмотрим случай, когда $x_m \notin N(x,J_1)$. Так как $x \neq o(J_1)$, то $\|x\| > 0$, и без ограничения общности можно считать, что $\|x_m\| > 0$. Расстояние между концами $k(x)$ и $k(x_m)$ иголок $N(x, J_1)$ и $N(x_m, J_1)$ может быть выражено через расстояние между точками x_m и x с помощью геометрических соображений. Обозначим через α_m угол между иголками $N(x, J_1)$ и $N(x_m, J_1)$. Применив теорему косинусов, получим

$$\|x - x_m\|^2 = \|x\|^2 + \|x_m\|^2 - 2\cdot\|x\|\cdot\|x_m\|\cdot\cos\alpha_m \text{ и } \|k(x) - k(x_m)\|^2 = 2 - 2\cdot\cos\alpha_m .$$

Выразим $\cos\alpha_m$ из первого равенства, подставим во второе и получим

$$\|k(x) - k(x_m)\|^2 = 2 - 2\cdot\frac{\|x\|^2 + \|x_m\|^2 - \|x - x_m\|^2}{2\cdot\|x\|\cdot\|x_m\|} .$$

Легко видеть, что $\dfrac{\|x\|^2 + \|x_m\|^2 - \|x - x_m\|^2}{2\cdot\|x\|\cdot\|x_m\|} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$, следовательно, последовательность $k(x_m)$ сходится к $k(x)$. Тогда последовательность образов $f(k(x_m))$ сходится к образу $f(k(x))$, ведь f – гомеоморфизм (т.е. $\|f(k(x)) - f(k(x_m))\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$). Применив геометрические рассуждения, получим равенство

$$\|\overline{f}(x) - \overline{f}(x_m)\|^2 = \|\overline{f}(x)\|^2 + \|\overline{f}(x_m)\|^2 - \|\overline{f}(x)\|\cdot\|\overline{f}(x_m)\|\cdot\left(2 - \|f(k(x)) - f(k(x_m))\|^2\right),$$

из которого следует сходимость последовательности $\overline{f}(x_m)$ к $\overline{f}(x)$.

Любая сходящаяся к $x \neq o(J_1)$ последовательность элементов J_1 либо является последовательностью одного из двух рассмотренных выше типов (начиная с некоторого номера), либо может быть разбита на две такие подпоследовательности. Следовательно, переходит в сходящуюся последовательность.

Итак, мы доказали, что отображение $\overline{f}$ переводит сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность, следовательно, непрерывно. Непрерывность обратного отображения может быть доказана аналогично. □

Теорема 1.2. Для каждого счетного евклидова ежа существует гомеоморфный ему плоский ёж.

Доказательство. Покажем сначала, что для ежа $J_n \subseteq \boldsymbol{R}^n$ можно построить гомеоморфный ему ёж $J_n^1 \subseteq \boldsymbol{R}^n$ такой, что J_n^1 содержится в единичном еже. Рассмотрим гомеоморфизм $\pi : [0,+\infty) \to [0,1)$ и построим гомеоморфизм φ пространства $\boldsymbol{R}^n$ на открытый единичный шар с центром в нуле, положив $\varphi(0_n) := 0_n$ и $\varphi(x) := \pi(\|x\|)\cdot\dfrac{x}{\|x\|}$, если x отлично от 0_n.

Положим $J_n^1 := \varphi(J_n)$. Удлиним все иголки ежа J_n^1 до единичной длины и добавим все концевые точки. Получим замкнутый единичный ёж со счетным числом иголок, который содержит J_n^1, назовем его J_n^2. Рассмотрим $K(J_n^2)$ – множество концевых точек ежа J_n^2.

Известно (см., напр.: [2]), что для любого счётного метризуемого топологического пространства X существует подмножество рациональных чисел $Y \subseteq \boldsymbol{Q}$ такое, что X гомеоморфно Y. Пусть $Y \subseteq \boldsymbol{Q}$ такое, что $K(J_n^2) \cong Y$. Теперь отметим на окружности единичного радиуса множество, гомеоморфное Y. Это множество (назовем его Z) будет множеством концевых точек единичного ежа в плоскости. Так как $Z \cong Y$, а $K(J_n^2) \cong Y$, то по лемме 2 ёж с концевыми точками из Z гомеоморфен ежу J_n^2. Но тогда сужение этого гомеоморфизма на подпространство J_n^1 – это гомеоморфизм на подпространство ежа с концевыми точками из Z, а значит, полученный ёж гомеоморфен ежу J_n^1. □

2. Ежи Зоргенфрея

Прямая Зоргенфрея (S) – это вещественная прямая $\boldsymbol{R}$ в топологии, порожденной семейством полуинтервалов $\{[a, b): a, b \in \boldsymbol{R}, a < b\}$.

Для следующих определений полезно отметить, что прямая Зоргенфрея гомеомерфна полуинтервалу $[0, 1) \subseteq S$ с топологией, наследуемой из прямой Зоргенфрея. Также полезно отметить, что топология на полуинтервале $[0, 1)$ как подпространстве прямой Зоргенфрея совпадает с топологией, порожденной следующей квазиметрикой:

$$\rho_S(x, y) = \begin{cases} y - x, y \geq x \\ 1, \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть κ – кардинал.

Множество J_κ, называемое ёжом колючести κ, определим следующим образом:

$$J_\kappa := \{\langle x, \alpha \rangle : x \in (0,1), \alpha \in \kappa\} \cup \{\overline{0}\}$$

Если $\alpha \in \kappa$, то будем называть множество $I_\alpha := \{\langle x, \alpha \rangle : x \in (0,1)\} \cup \{\overline{0}\}$ иголкой ежа J_κ.

Множество J_κ можно представить как κ полуинтервалов (иголок I_α), склеенных по точке $\overline{0}$. Если на каждом из этих полуинтервалов I_α рассмотреть топологию, порожденную прямой Зоргенфрея (при этом каждая иголка I_α ежа J_κ будет гомеоморфна прямой Зоргенфрея), то на множестве J_κ возникает две естественных топологии:

• Фактор-топология $\tau_{f,\kappa}$, т.е. стандартная топология, определяемая операцией склейки топологических пространств (в данном случае κ штук полуинтервалов $[0, 1)$ в топологии Зоргенфрея по точке $\overline{0}$). Из определения фактор-топологии несложно вывести следующую формулу:

$$\tau_{f,\kappa} = \left\{U \subseteq J_\kappa : \forall \alpha \in \kappa : \text{множество} \left\{x \in [0,1) : \langle x, \alpha \rangle \in U \vee (x = 0 \wedge \overline{0} \in U)\right\} \text{открыто в } S\right\}.$$

• Топология $\tau_{\rho,\kappa}$, порожденная квазиметрикой ρ_κ на множестве J_κ (аналогичной квазиметрике ρ_S), т.е. топология, порожденная семейством шаров

$$\mathrm{B} := \{ B_{\rho_\kappa}(x, \varepsilon) : x \in J_\kappa, \varepsilon \in \boldsymbol{R}^+\},$$

где

$$\rho_\kappa(\overline{0}, \overline{0}) := 0;$$

$$\rho_\kappa(\bar{0},\langle y,\beta\rangle) := y, \text{ при } y\in(0,1) \text{ и } \beta\in\kappa;$$

$$\rho_\kappa(\langle x,\alpha\rangle,\bar{0}) := x, \text{ при } x\in(0,1) \text{ и } \alpha\in\kappa;$$

$$\rho_\kappa(\langle x,\alpha\rangle,\langle y,\beta\rangle) := \begin{cases} y-x, & \text{если } \alpha=\beta\wedge y\geq x \text{ при } x,y\in(0,1) \text{ и } \alpha,\beta\in\kappa; \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

шар с центром в точке a радиуса ε: $B_{\rho_\kappa}(a,\varepsilon) := \{b\in J_\kappa : \rho_\kappa(a,b)<\varepsilon\}$.

Таким образом, мы будем рассматривать два топологических пространства:

• фактор-ёж $(J_\kappa, \tau_{f,\kappa})$ (будем обозначать FJ_κ);

• квазиметрический ёж $(J_\kappa, \tau_{\rho,\kappa})$ (будем обозначать QJ_κ).

Заметим, что в обоих пространствах каждая иголка $I_\alpha \in J_\kappa$ (как подпространство) гомеоморфна прямой Зоргенфрея S. Кроме того, отметим, что пространства FJ_κ и QJ_κ различны и даже негомеоморфны за исключением случая, когда κ конечно.

Далее будут рассмотрены следующие кардинальные инварианты пространств $(J_\kappa, \tau_{f,\kappa})$ и $(J_\kappa, \tau_{\rho,\kappa})$: характер ($\chi(X)$), вес ($w(X)$), количество открытых множеств ($o(X)$), плотность ($d(X)$), спред ($s(X)$), число Линделёфа ($L(X)$), экстент ($e(X)$), клеточность (или число Суслина) ($c(X)$), теснота ($t(X)$) и сетевой вес ($nw(X)$). Затем будут найдены их наследственные кардинальные инварианты. Все кардинальные инварианты будут найдены для двух случаев: Когда иголок ω; когда их κ, где $\kappa \geq \omega$.

Определения кардинальных инвариантов пространства X, рассматриваемых в работе**:**

- Вес $\omega(X) := \min\{|\mathrm{B}| : \mathrm{B}\text{-база в } X\} + \omega$.
- Характер $\chi(X) := \sup\{\chi(p,X) : p\in X\}, \textit{где}\, \chi(p,X) := \min\{|V| : V - \text{база пространства } X \text{ в точке } p\} + \omega$.
- Количество открытых множеств $o(X) := |\tau|$.
- Плотность $d(X) := \min\{|S| : S\subseteq X, \bar{S} = X\} + \omega$.
- Спред $s(X) := \sup\{|D| : D - \text{дискретное подпространство } X\} + \omega$.
- Число Линделёфа $L(X) := \min\{\kappa : \forall \text{ открытое покрытие } \gamma \text{ пространства } X \text{ содержит подпокрытие } \mu\subseteq\gamma, \text{т.ч.} |\mu|\leq\kappa\} + \omega$.
- Экстент $e(X) := \sup\{|D| : D - \text{замкнутое дискретное подпространство в } X\} + \omega$.
- Клеточность (или число Суслина) пространства X:
$$c(X) := \sup\{|\gamma| : \gamma\subseteq\tau \text{ и } \gamma \text{ дизъюнктно}\} + \omega.$$
- Теснота $t(X) := \sup\{t(p,X)\} : p\in X$, где
$$t(p,X) := \min\{\kappa : \forall Y\subseteq X[p\in\bar{Y} \to \exists A\subseteq Y(|A|\leq\kappa\wedge p\in\bar{A})]\} + \omega.$$
- Сетевой вес пространства X, $nw(X) := \min\{|\gamma| : \gamma\text{-сеть в } X\} + \omega$. (Напомним, что семейство $\gamma\subseteq P(X)$ называется сетью пространства X, если $\tau\subseteq\{\bigcup\mu : \mu\subseteq\gamma\}$.)

Если κ – кардинальный инвариант, то наследственный кардинальный инвариант $h\kappa$, порожденный кардинальным инвариантом κ, определяется следующим образом: $h\kappa(X) := \sup\{\kappa(Y)\} : Y\in X$.

Замечание: $|J_\kappa| = \max\{\kappa, \boldsymbol{c}\}$, где $\boldsymbol{c}$ – континуум.

Утверждение 2.1. $\chi(QJ_\omega) = \chi(QJ_\kappa) = \omega$.

Доказательство. В силу того, что топология пространства QJ_κ порождена псевдометрикой, семейство шаров радиуса $1/n$ с центром в точке p является базой в точке p, а значит, характер равен ω.□

Утверждение 2.2. 1. $\omega_1 \le \chi(FJ_\omega) \le \boldsymbol{c}$.

2. $\kappa^+ \le \chi(FJ_\kappa) \le 2^\kappa$.

Доказательство. 1. Возьмем произвольную точку на иголке, заметим, что она принадлежит прямой Зоргенфрея, а значит, характер в ней равен ω. (Достаточно просто рассмотреть систему полуинтервалов длины $1/n$ с началом в этой точке, которые будут являться базой в этой точке.)

Покажем, что в точке $\bar{0}$ нет счетной базы и построим континуальную базу.

От противного, пусть $\gamma = \{\gamma_n : n \in \omega\}$ – счетная база в точке $\bar{0}$. Построим открытое множество O_γ в FJ_κ, которое не содержит ни один элемент базы γ. Рассмотрим множество $\gamma_n \cap I_n$, при $n \in \boldsymbol{N}$. Данное множество содержит некоторый полуинтервал $\{\bar{0}\} \cup (0, k_n)$. Пусть $O_\gamma := \{\bar{0}\} \cup \bigcup \left\{ \left(0, \dfrac{k_n}{2}\right) : n \in \boldsymbol{N} \right\}$. Несложно заметить, что O_γ – открытая окрестность точки $\bar{0}$, не содержащая ни один элемент из базы γ, а значит, в точке $\bar{0}$ нет счетной базы.

Осталось показать, что существует база мощности $\boldsymbol{c}$. Пусть $n = \langle n_k \rangle_{k \in \omega} \in \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$. Тогда положим $V_n := \{\bar{0}\} \cup \bigcup \left\{ \left(0, \dfrac{1}{n_k}\right) \times \{k\} : k \in \boldsymbol{N} \right\}$, несложно заметить, что семейство V_n для всех $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ является базой в точке $\bar{0}$. При этом мощность этой базы равна $\omega^\omega = 2^\omega = \boldsymbol{c}$.

Замечание: получена наилучшая оценка, так как существуют теоретико-множественные модели (например, модели в которых выполняется обобщенная континуум гипотеза), где оба равенства достижимы.

2. Доказательство аналогично предыдущему. □

Утверждение 2.3. 1. $nw(QJ_\omega) = w(QJ_\omega) = \boldsymbol{c}$.

2. $nw(QJ_\kappa) = w(QJ_\kappa) = \max(\boldsymbol{c}, \kappa)$.

Доказательство. 1. Известно, что вес и сетевой вес прямой Зоргенфрея континуален (см.: [2]). Таким образом, в силу монотонности сетевого веса $\boldsymbol{c} = nw(S) \le$ $\le nw(QJ_\omega)$. Кроме того, существует счетная база в нуле (утв. 1), а значит, существует база состоящая из $\boldsymbol{c}\cdot\omega + \omega = \boldsymbol{c}$, следовательно, $w(QJ_\omega) \le \boldsymbol{c}$. Из того, что $nw(X) \le w(X)$ следует, что $\boldsymbol{c} \le nw(QJ_\omega) \le w(QJ_\omega) \le \boldsymbol{c}$. Второй пункт доказывается так же, как первый. □

Утверждение 2.4. 1. $w(FJ_\omega) = \boldsymbol{c}$.

2. $\max(\kappa^+, \boldsymbol{c}) \le w(FJ_\kappa) \le \max(2^\kappa, \boldsymbol{c})$.

Доказательство. 1. Вес и сетевой вес прямой Зоргенфрея континуален, значит в силу монотонности веса $nw(FJ_\omega) \ge \boldsymbol{c}$. Континуальную базу можно построить, взяв с каждой иголки базу прямой Зоргенфрея и в точке ноль континуальную базу, построенную ранее.

2. $\kappa^+ \le \chi(FJ_\kappa) \le 2^\kappa$ (утв. 2.2), кроме того, вес прямой Зоргенфрея континуален, значит в силу монотонности веса и неравенства $\chi(X) \le w(X)$ получается нижняя оценка: $\max(\kappa^+, \boldsymbol{c}) \le w(FJ_\kappa)$. По построению в утверждении 2.2 характер в нуле не больше 2^κ, а характер в других точках счётен. Таким образом, $w(FJ_\kappa) \le \max(2^\kappa, \kappa, \boldsymbol{c}) = \max(2^\kappa, \boldsymbol{c})$. □

Утверждение 2.5. $nw(FJ_\kappa) = \max(\kappa, \boldsymbol{c})$.

Доказательство. Как и ранее, $nw(FJ_\kappa) \ge \boldsymbol{c}$, кроме того, $nw(X) \ge c(X)$, следовательно, $nw(FJ_\kappa) \ge \kappa$, так как $nw(X) \le |X|$, следовательно, $nw(FJ_\kappa) = \max(\kappa, \boldsymbol{c})$. □

Утверждение 2.6. 1. $d(FJ_\omega) = d(QJ_\omega) = \omega$.
2. $d(FJ_\kappa) = d(QJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Если рассмотреть точки с рациональными координатами на каждой иголке и взять объединение всех этих точек, то полученное множество будет плотным. В силу того, что иголок ω, то точек будет в объединении $\omega\cdot\omega = \omega$.

2. Заметим, что мощность любого плотного подмножества пространства FJ_κ (и QJ_κ) не меньше κ, так как оно пересекается с каждой иголкой. Построение плотного подмножества мощности κ такое же, как при доказательстве пункта 1. □

Утверждение 2.7. 1. $L(QJ_\omega) = L(FJ_\omega) = \omega$.
2. $L(QJ_\kappa) = L(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Пусть γ – открытое покрытие рассматриваемого пространства. В силу того, что $L(S) = \omega$ (см.: [2]), из покрытия $\{U \cap I_n : U \in \gamma\}$ иголки I_n, где $n \in \omega$, можно выделить счетное подпокрытие μ_n, где для каждого μ_n существует $\gamma_n \subseteq \gamma$, такое что для любого $U \in \mu_n$ существует $V \in \gamma_n : U \subseteq V$. Тогда объединение γ_n по всем $n \in \omega$ и элемента покрытия γ, содержащего ноль, – это подпокрытие рассматриваемого пространства покрытия γ, мощность которого ω.

2. Аналогично пункту 1. Только для оценки снизу нужно заметить, что если взять в качестве покрытия окрестность нуля радиуса 1/2 и $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \times \{\alpha\}$ по всем $\alpha \in \kappa$, то в этом покрытии κ элементов, и подпокрытия меньшей мощности в нем не получить. □

Утверждение 2.8. 1. $c(QJ_\omega) = c(FJ_\omega) = \omega$.
2. $c(QJ_\kappa) = c(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. В силу того, что $c(X) \le d(X)$ (см.: [2]),

$$c(QJ_\omega) \le d(QJ_\omega) = \omega \text{ утв.2.6. } \Rightarrow c(QJ_\omega) = \omega,$$

также

$$c(FJ_\omega) \le d(FJ_\omega) = \omega \text{ утв.2.6 } \Rightarrow c(FJ_\omega) = \omega.$$

2. Поскольку можно взять по интервалу на каждой иголке, то $\kappa \le c(QJ_\kappa)$, $\kappa \le c(FJ_\kappa)$, а значит

$$\kappa \le c(QJ_\kappa) \le d(QJ_\kappa) = \kappa \text{ утв.2.6 } \Rightarrow c(QJ_\kappa) = \kappa,$$

$$\kappa \le c(FJ_\kappa) \le d(FJ_\kappa) = \kappa \text{ утв.2.6 } \Rightarrow c(FJ_\kappa) = \kappa. \square$$

Утверждение 2.9. $s(FJ_\omega) = s(QJ_\omega) = \omega$; $s(FJ_\kappa) = s(QJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. Известно, что $c(X) \le s(X) \le hL(X)$ (см.: [2]), значит

$$\omega = c(QJ_\omega) \le s(QJ_\omega) \le hL(QJ_\omega) = \omega \text{ (утв. 2.8, утв. 2.12)};$$

$$\omega = c(FJ_\omega) \le s(FJ_\omega) \le hL(FJ_\omega) = \omega;$$

$$\kappa = c\left(QJ_\kappa\right) \le s\left(QJ_\kappa\right) \le hL\left(QJ_\kappa\right) = \kappa \text{ (утв. 2.8, утв. 2.12);}$$

$$\kappa = c\left(FJ_\kappa\right) \le s\left(FJ_\kappa\right) \le hL\left(FJ_\kappa\right) = \kappa .\square$$

Отметим, что, ссылаясь на утв. 1.12, мы не получаем логического круга.

Утверждение 2.10. $e(FJ_\omega) = e(QJ_\omega) = \omega$; $e(FJ_\kappa) = e(QJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. Заметим, что экстент не меньше числа иголок (так как можно взять по одной точке из каждой иголки и получить замкнутый дискрет). Кроме того, верно неравенство: $e(X) \le L(X)$ (см.: [2]), значит $\omega = e\left(QJ_\omega\right) \le L\left(QJ_\omega\right) = \omega$; $\omega = e\left(FJ_\omega\right) \le L\left(FJ_\omega\right) = \omega$; $\kappa = e\left(QJ_\kappa\right) \le L\left(QJ_\kappa\right) = \kappa$; $\kappa = e\left(FJ_\kappa\right) \le L\left(FJ_\kappa\right) = \kappa$.□

Утверждение 2.11. 1. $o(FJ_\omega) = o(QJ_\omega) = \boldsymbol{c}$.

2. $o(FJ_\omega) = o(QJ_\omega) = \boldsymbol{c}^\kappa$.

Доказательство. 1. Доказательство проведtm в два этапа: покажем, что число открытых множеств не больше континуума; покажем, что число открытых множеств не меньше континуума.

• Известно, что $o(X) \le |X|^{hd(X)}$ (см.: [2]), а значит $o(FJ_\omega) \le |FJ_\omega|^\omega = \boldsymbol{c}$, $o(QJ_\omega) \le$ $\le |QJ_\omega|^\omega = \boldsymbol{c}$ (утв. 2.13).

• $w(X) \le o(X)$, следователльно, $\boldsymbol{c} \le w(QJ_\omega) \le o(QJ_\omega)$, $\boldsymbol{c} \le w(FJ_\omega) \le o(FJ_\omega)$.

Итак, $o(FJ_\omega) = o(QJ_\omega) = \boldsymbol{c}$.

2. Доказательство аналогично пункту 1., только нижняя оценка получается из того, что на каждой иголке можно взять $\boldsymbol{c}$ различных открытых множеств. □

Приступим к изучению наследственных кардинальных инвариантов ежей Зоргенфрея.

Несложно показать, что вес, спред и характер являются наследственными кардинальными инвариантами. Кроме того известно, что $hc(X) = he(X) = s(X)$ (см.: [2]). Значит, значения $hw(X)$, $h\chi(X)$, $hs(X)$, $hc(X)$, $he(X)$ нами уже найдены.

Перейдем к менее тривиальным вопросам.

Утверждение 2.12. 1. $hL(QJ_\omega) = hL(FJ_\omega) = \omega$.

2. $hL(QJ_\kappa) = hL(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Известно, что для прямой Зоргенфрея $hL(S) = \omega$ (см.: [2]). Возьмем произвольное подпространство $Y \subseteq QJ_\omega (Y \subseteq FJ_\omega)$. Пусть γ – открытое покрытие подпространства Y. Рассмотрим $Y_n = I_n \cap Y$ по всем $n \in \omega$, определим $\gamma_n := \left\{U \cap Y_n : U \subseteq \gamma\right\}$. Заметим, что γ_n является открытым покрытием подпространства Y_n. В силу того, что Y_n гомеоморфно подпространству S, из покрытия γ_n подпространства Y_n можно выделить счетное подпокрытие μ_n. Рассмотрим $\mu := \bigcup\left\{\mu_n : n \in \omega\right\}$ и элемент покрытия γ, содержащего ноль. Для каждого $U \in \mu$ существует $V(U) \in \gamma$, в том числе $U \subseteq V(U)$. Тогда $\gamma' := \left\{V\left(U\right) : U \in \mu\right\} \subseteq \gamma$ является покрытием подпространства $Y := \bigcup\left\{Y_n : n \subseteq \omega\right\}$, и при этом $\left|\gamma'\right| : \omega \cdot \sup\left\{\left|\mu_n\right| : n \in \omega\right\} = \omega$. Второй пункт доказывается аналогично первому. □

Утверждение 2.13. 1. $hd(QJ_\omega) = hd(FJ_\omega) = \omega$.

2. $hd(QJ_\kappa) = hd(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Известно, что $hd(S) = \omega$ (см.: [2]). Возьмем произвольное подпространство $Y \subseteq QJ_\omega (Y \subseteq FJ_\omega)$. Рассмотрим $Y_n = I_n \cap Y$ по всем $n \in \omega$. В силу того, что Y_n гомеоморфно подпространству S, плотное множество P_n в Y_n

содержит не более ω точек. В силу того, что $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \omega\}$, множество $P := \bigcup\{P_n : n \in \omega\}$ – плотное множество в Y. При этом $|P| \leq \omega$, а значит, $hd(QJ_\omega) = hd(FJ_\omega) = \omega$. Второй пункт доказывается аналогично первому заменой ω на κ. □

Утверждение 2.14. $ht(FJ_\omega) = ht(FJ_\kappa) = \omega$.

Доказательство. Возьмем произвольное подпространство Y и произвольную точку $p \in \overline{Y}$. Есть два случая: $p \in Y$ и $p \notin Y$. Если $p \in Y$, в качестве $A \subseteq Y$ возьмем множество $\{p\}$.

Если $p \notin Y$, рассмотрим два случая.

Случай 1. $p \neq \overline{0}$. Тогда существует $\alpha \in \kappa$. Рассмотрим систему полуинтервалов $\left[x, \frac{1}{n}\right) \times \{\alpha\}$. В силу того, что $p \in \overline{Y}$, для каждого $n \in \omega$ существует $p_n \in Y : p_n \in \left[x, \frac{1}{n}\right) \times \{\alpha\}$. Тогда в качестве подмножества Y возьмем $A := \{p_n : n \in \omega\}$, $|A| = \omega$.

Случай 2. $p = \overline{0}$. Покажем, что существует $\alpha \in \kappa$, что для всех $n \in \omega$ существует $p_n \in Y : p_n \in \{\overline{0}\} \cup \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \{\alpha\}$. От противного, пусть для всех $\alpha \in \kappa$ существует $n \in \omega$ такое, что для любого $p_n \in Y : p_n \notin \{\overline{0}\} \cup \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \{\alpha\}$. Выделим для каждого α такое n и заметим, что мы построили окрестность точки $\overline{0}$, которая не пересекается с Y, а значит, $\overline{0} \notin Y$ – противоречие. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю. □

Утверждение 2.15. $ht(QJ_\omega) = ht(QJ_\kappa) = \omega$.

Доказательство. Возьмем произвольное подпространство Y. Заметим, что это подпространство будет квазиметрическим, так же как и исходное (достаточно просто рассмотреть следы открытых шаров в данном подпространстве). Из того, что квазиметрические пространства имеют счетный характер, и $t(X) \leq \chi(X)$ следует, что $ht(QJ_\omega) = ht(QJ_\kappa) = \omega$. □

Очевидным следствием является, что $t(FJ_\omega) = t(QJ_\omega) = t(FJ_\kappa) = t(QJ_\kappa) = \omega$.

Полученные результаты приведены в таблице.

Оценки кардинальных функций

Кардинальные функции	QJ_ω	FJ_ω	QJ_κ	FJ_κ
$\lvert X\rvert = h\lvert X\rvert$	c	c	max(c, κ)	max(c, κ)
$w(X) = hw(X)$	c	c	max(c, κ)	$\begin{cases}\geq \max(\kappa^+, c)\\ \leq \max(2^\kappa, c)\end{cases}$
$\chi(X) = h\chi(X)$	ω	$\geq \omega, \leq c$	ω	$\geq \kappa^+, \leq 2^\kappa$
$o(X) = ho(X)$	c	c	c^κ	c^κ
$L(X)$	ω	ω	κ	κ
$d(X)$	ω	ω	κ	κ
$c(X)$	ω	ω	κ	κ
$e(X)$	ω	ω	κ	κ

Окончание таблицы

Кардинальные функции	QJ_ω	FJ_ω	QJ_κ	FJ_κ
$s(X) = hc(X) =$ $= he(X) = hs(X)$	ω	ω	κ	κ
$t(X)$	ω	ω	ω	ω
$hL(X)$	ω	ω	κ	κ
$hd(X)$	ω	ω	κ	κ
$ht(X)$	ω	ω	ω	ω

3. Топологическое вложение ежей в функциональные пространства

Пространство X называется менгеровским [4], если для любой последовательности $(\mathcal{U}_n : n \in \boldsymbol{N})$ открытых покрытий X найдутся конечные подсемейства $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, такие, что $\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ является покрытием X. Пространство X называется пространством со счетной веерной теснотой [5], если для любой точки $x \in X$ и последовательности множеств $A_n \subset X$ таких, что $x \in \overline{A_n}$ $(n \in \boldsymbol{N})$, найдутся конечные множества $F_n \subset A_n$ такие, что $x \in \overline{\bigcup\{F_n : n \in \boldsymbol{N}\}}$.

Пусть $S_\omega = \{\infty\} \cup \{(n,m) : n,m \in \boldsymbol{N}\}$ – секвенциальный ёж колючести ω, в котором все точки вида (n, m) изолированы, и множества вида $N(\varphi) = \{\infty\} \cup \{(n,m) : n \in \boldsymbol{N}, m \geq \varphi(n)\}$ образуют базу открытых окрестностей точки ∞, где $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$. Легко видеть, что S_ω не является пространством со счетной веерной теснотой.

А.В. Архангельский [5] доказал, что любая конечная степень X является менгеровским пространством тогда и только тогда, когда $C_p(X)$ имеет счетную веерную тесноту. Следовательно, если любая конечная степень X является менгеровским пространством, то S_ω не может быть вложено в $C_p(X)$. А.В. Архангельский поставил следующий естественный вопрос [6. проблема II.2.7]: может ли пространство S_ω быть топологически вложенным в $C_p(X)$ для некоторого менгеровского пространства X?

М. Сакай в предположении континуум-гипотезы доказал, что существует множество Лузина X (а следовательно, и менгеровское) такое, что S_ω может быть вложено в $C_p(X)$ [7].

Обозначим через $C_p(X)$ пространство $C(X)$ непрерывных на тихоновском пространстве X вещественнозначных функций с топологией поточечной сходимости. Пусть $B_0(X) = C(X)$; на пространстве X, наделенном топологией поточечной сходимости, для каждого $\alpha \leq \omega_1$ индуктивно определяются классы Бэра $B_\alpha(X)$ как множества поточечных пределов последовательностей функций из объединения $\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(X)$. Итак, $B(X) = \bigcup_{\beta<\omega_1} B_\beta(X)$ – это множество всех функций Бэра, определенных на тихоновском пространстве X, снабженном топологией поточечной сходимости.

Напомним, что подмножество пространства X, являющееся полным прообразом нуля для некоторой непрерывной на X вещественнозначной функции, называется нуль-множеством. Подмножество $O \subseteq X$ называется конуль-множеством (или функционально открытым) в X, если его дополнение $X \backslash O$ является нуль-множеством в X.

Семейство множеств Бэра пространства X – это наименьшее замкнутое относительно счетных объединений и пересечений семейство множеств, содержащее нуль-множества вещественнозначных непрерывных на X функций. Множества Бэра мультипликативного класса 0, обозначаемые $Z(X)$ – это нуль-множества непрерывных вещественнозначных функций. Множества аддитивного класса 0, обозначаемые $CZ(X)$ – это дополнения множеств из $Z(X)$.

Символ $\mathbf{0}$ будем использовать для обозначения постоянной, равной нулю функции. Открытая базисная окрестность точки $\mathbf{0}$ имеет вид $[F,(-\varepsilon, \varepsilon)] = \{f \in C(X)\colon f(F) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, где $F \in [X]^{<\infty}$ – семейство конечных подмножеств X, $\varepsilon > 0$.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – семейства подмножеств бесконечного множества.

- $S_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ обозначает следующую гипотезу: для любой последовательности $(A_n : n \in \boldsymbol{N})$ элементов множества $\mathcal{A}$ найдется последовательность $(B_n : n \in \boldsymbol{N})$ такая, что для всех n выполнены включения $B_n \in A_n$ и $\{B_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ – это элемент семейства $\mathcal{B}$.
- $S_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ обозначает следующую гипотезу: для любой последовательности $(A_n : n \in \boldsymbol{N})$ элементов семейства $\mathcal{A}$ найдется последовательность $(B_n : n \in \boldsymbol{N})$ конечных наборов множеств такая, что для всех n выполнены включения $B_n \subset A_n$ и $\bigcup\{B_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ – это элемент семейства $\mathcal{B}$.

Покрытие $\mathcal{U}$ пространства X называется:

- ω-*покрытием*, если X не принадлежит $\mathcal{U}$ и любое конечное подмножество пространства X содержится в некотором элементе $\mathcal{U}$. Заметим, что если $\mathcal{U}$ – ω-покрытие множества X, и $X \notin \mathcal{U}$, то любое конечное подмножество X лежит в бесконечном числе элементов покрытия $\mathcal{U}$;
- γ-*покрытием*, если бесконечно и любая точка $x \in X$ принадлежит всем элементам $\mathcal{U}$ за исключением конечного числа. Заметим, что любое γ-покрытие содержит счетное γ-покрытие;
- γ_F-*сокращаемым покрытием*, если оно является γ-покрытием, состоящим из конуль-множеств и найдется γ-покрытие $\{F(U) : U \in \mathcal{U}\}$, состоящее из нуль-множеств, такое что $F(U) \subset U$ для всех $U \in \mathcal{U}$.

Для топологического пространства X мы обозначим:

- $\mathcal{O}$ – семейство всех открытых покрытий X;
- Ω – семейство всех открытых ω-покрытий X;
- Γ – семейство всех открытых γ-покрытий X;
- Γ_F – семейство всех счетных γ_F-сокращаемых покрытий X;
- $\mathcal{B}$ – семейство всех счетных бэровских покрытий X;
- $\mathcal{B}_\Gamma$ – семейство всех счетных бэровских γ-покрытий X;
- $\mathcal{B}_\Omega$ – семейство всех счетных бэровских ω-покрытий X;
- $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ называется свойством Ротбергера;
- $S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ называется свойством Менгера;
- $U_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)$ называется свойством Гуревича.

Пусть X – топологическое пространство, и $x \in X$. Говорят, что подмножество A пространства X сходится к x: $x = \lim A$, если A бесконечно, $x \notin A$, и для любой U окрестности точки x множество $A \backslash U$ конечное.

Обозначим:

- $\Omega_x = \{A \subseteq X : c\}$;
- $\Omega_x^\omega = \{A \subseteq X : |A| = \aleph_0 \text{ и } x \in \overline{A} \setminus A\}$;
- $\Gamma_x = \{A \subseteq X : x = \lim A\}$;
- $\Gamma_x^\omega = \{A \subseteq X : |A| = \aleph_0 \text{ и } x = \lim A\}$.

Нам потребуется следующая теорема:

Теорема 3.1. [7. Theorem 3.2] Следующие условия эквивалентны для пространства X:

(1) S_ω не вкладывается в $C_p(X)$;

(2) X обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_F, \Omega)$.

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое топологическое свойство. А.В. Архангельский назвал пространство X *проективно* $\mathcal{P}$, если любой непрерывный образ X, удовлетворяющий второй аксиоме счетности, обладает свойством $\mathcal{P}$. □

Из теоремы 3.1 и [8. Теорема 11.1] вытекает следующий результат:

Теорема 3.2. Следующие условия эквивалентны для пространства X:

(1) S_ω не вкладывается в $C_p(X)$.

(2) X обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_F, \Omega)$.

(3) $C_p(X)$ обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_x^\omega, \Omega_x^\omega)$.

(4) $C_p(X)$ обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_x, \Omega_x)$.

Заметим, что если любая конечная степень пространства X проективно менгеровское пространство, то X проективно $S_{fin}(\Omega, \Omega)$ (Proposition 4.4 из [7]).

Следствие 3.3. Для пространства X, любая конечная степень которого является проективно менгеровским пространством, следующие условия эквивалентны:

(1) S_ω не вкладывается в $C_p(X)$.

(2) X обладает свойством $S_{fin}(\Omega, \Omega)$.

Следствие 3.4. [7. Proposition 4.12] Любая конечная степень X является проективно менгеровским пространством в том и только в том случае, когда S_ω не вкладывается в $C_p(X^n)$ для каждого $n \in \boldsymbol{N}$.

На следующей диаграмме проиллюстрированы эти импликации (см. также: [8]):

$$
\begin{array}{ccc}
 & & X \text{ проективно } S_{fin}(\Omega,\Omega) \\
 & & \Downarrow \\
 & & X \text{ является } S_{fin}(\Gamma_F,\Omega) \\
 & & \Updownarrow \\
S_\omega \not\subset C_p(X) & \Leftrightarrow & X \text{ проективно } S_{fin}(\Gamma,\Omega) \\
 & & \Downarrow \\
 & & X \text{ проективно менгеровское}
\end{array}
$$

Лемма 3.5. ([9. Lemma 80]) Пусть $X=\{x\}\cup\{x_{n,m}:n,m\in \boldsymbol{N}\}$ – хаусдорфово пространство такое, что $x_{n,m}\to x$ $(m\to\infty)$ для каждого $n\in \boldsymbol{N}$; и для любого $\varphi\in \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ $x\notin\overline{\{x_{n,m}:n\in \boldsymbol{N},m\le\varphi(n)\}}$. Тогда S_ω вкладывается в X.

Теорема 3.6. Следующие условия эквивалентны для пространства X:

(1) S_ω не вкладывается в $B(X)$.

(2) X обладает свойством $S_{fin}(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B}_\Omega)$.

(3) X обладает свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B}_\Omega)$.

(4) $B(X)$ обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_x,\Omega_x)$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $S_\omega=\{\mathbf{0}\}\cup\{f_{n,k}:n,k\in \boldsymbol{N}\}\subseteq B(X)$, где $f_{n,k}\to\mathbf{0}$ $(k\to\infty)$. Для каждого $n,k\in \boldsymbol{N}$ положим $U_{n,k}=\left\{x\in X:|f_{n,k}(x)|<\frac{1}{n}\right\}$. Все $U_{n,k}$ являются бэровскими подмножествами X. Пусть $\mathcal{U}_n=\{U_{n,k}:k\in \boldsymbol{N}\}$. Если множество $I=\{n\in \boldsymbol{N}:X\in\mathcal{U}_n\}$ бесконечно, то найдется последовательность $\{f_{n,k_n}:n\in I\}$, равномерно сходящаяся к $\mathbf{0}$. Это противоречие, поэтому, не теряя общности, можно считать, что $U_{n,k}\ne X$ для всех $n,k\in \boldsymbol{N}$. Нетрудно проверить, что из условия $f_{n,k}\to\mathbf{0}$ $(k\to\infty)$ следует, что $\mathcal{U}_n$ является бэровским γ-покрытием X. Тогда, по условию (3), найдется $\{U_{n,k_n}:n\in \boldsymbol{N}\}$ – ω-покрытие пространства X такое, что $U_{n,k_n}\in\mathcal{U}_n$ для всех $n\in \boldsymbol{N}$. Тогда $\mathbf{0}\in\overline{\{f_{n,k_n}:n\in \boldsymbol{N}\}}$; это противоречие.

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\mathcal{U}_n=\{U_{n,k}:k\in \boldsymbol{N}\}$ – последовательность бэровских γ-покрытий пространства X, и для любой $\varphi\in \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ семейство $\mathcal{U}_\varphi=\{U_{n,k}:n\in \boldsymbol{N},k\le\varphi(n)\}$ не является ω-покрытием X. Для всех $n,k\in\mathbb{N}$ возьмем бэровскую функцию $f_{n,k}:X\to[0,1]$ такую, что $f_{n,k}(x)=0$ в каждой точке $x\in U_{n,k}$ и $f_{n,k}=1$ для всех $x\in X\setminus U_{n,k}$. Тогда $f_{n,k}\to\mathbf{0}$ $(k\to\infty)$. Рассмотрим $\varphi\in\mathbb{N}$. Поскольку $\mathcal{U}_\varphi$ не является ω-покрытием X, найдется конечное множество $F\subset X$, не содержащееся ни в каком элементе покрытия $\mathcal{U}_\varphi$. Тогда можно легко заметить, что

$$\{f\in B(X):f(F)\subset(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}\cap\{f_{n,k}:n\in \boldsymbol{N},k\le\varphi(n)\}=\varnothing.$$

По лемме 3.5 S_ω вкладывается в $\{\mathbf{0}\}\cup\{f_{n,m}:n,m\in \boldsymbol{N}\}\subset B(X)$.

Эквивалентность условий (2) и (3) следует из теоремы 9 [10.]:

$$S_{fin}(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B}_\Omega)=S_1(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B}_\Omega).$$

Эквивалентность условий (3) и (4) следует из теоремы 9 [11]:

$$S_1(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B}_\Omega)=S_{fin}(\Gamma_x,\Omega_x). \qquad \square$$

По теореме 6 из [10] имеет место эквивалентность $S_1(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B})=S_{fin}(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B})$. Заметим также, что если все конечные степени X обладают свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma,\mathcal{B})$, то X обладает свойством $S_{fin}(\mathcal{B}_\Omega,\mathcal{B}_\Omega)$ [10. Теорема 20].

Следствие 3.7. Для пространства X, все конечные степени которого обладают свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B})$, следующие условия эквивалентны:

(1) S_ω не вкладывается в $B(X)$.

(2) X обладает свойством $S_{fin}(\mathcal{B}_\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$.

Следствие 3.8. Любая конечная степень X обладает свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда S_ω не вкладывается в $B(X^n)$ для любого натурального числа n.

Подведем итог в следующей диаграмме:

$$\begin{array}{c} X \text{ является } S_{fin}(\mathcal{B}_\Omega, \mathcal{B}_\Omega) \\ \Downarrow \\ S_\omega \not\subset B(X) \;\Leftrightarrow\; X \text{ является } S_{fin}(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B}_\Omega) \\ \Downarrow \\ X \text{ является } S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B}) \end{array}$$

Предложение 3.9. Существует пространство X такое, что S_ω вкладывается в $B(X)$, но S_ω не вкладывается в $C_p(X)$.

Доказательство. Пусть X – это действительная прямая $\mathbf{R}$ с естественной топологией. По теореме 2.2 из [12] любое σ-компактное пространство является элементом класса $S_{fin}(\Omega, \Omega)$. Следовательно, X обладает свойством $S_{fin}(\Gamma, \Omega)$. По теореме 3.2 S_ω не вкладывается в $C_p(X)$. Поскольку пространство X не обладает свойством $S_1(\Gamma, \Omega)$, то оно не обладает свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B}_\Omega)$. Следовательно, по теореме 3.6 S_ω вкладывается в $B(X)$.

Список источников

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология: учебник. М. : Мир, 1986. 752 с.
2. Handbook of set-theoretic topology: handbook / K. Kunen, J.E. Vaughan (eds.) Amsterdam ; New York ; Oxford : Elsevier Science Publishers, 1984. 1273 p.
3. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях : учебник. М. : Наука, 1974. 424 с.
4. *Hurewicz W.* Über eine verallgemeinerung des Borelschen Theorems // Mathematische Zeitschrift. 1925. V. 24. S. 401–421.
5. *Arhangel'skii A.V.* Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces // Sov. Math. Dokl. 1986. V. 33. P. 396–399.
6. *Arhangel'skii A.V.* Projective σ-compactness, ω_1-caliber, and C_p-spaces // Topology and its Applications. 2000. V. 104. P. 13–26.
7. *Sakai M.* The projective Menger property and an embedding of S_ω into function spaces // Topology and its Applications. 2017. V. 220. P. 118–130.
8. *Osipov A.V.* Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram // Topology and its Applications. 2020. V. 278. Art. 107232.
9. *Bonanzinga M., Cammaroto F., Matveev M.* Projective versions of selection principles // Topology and its Applications. 2010. V. 157. P. 874–893.
10. *Scheepers M., Tsaban B.* The combinatorics of Borel covers // Topology and its Applications. 2002. V. 121. P. 357–382.
11. *Osipov A.V.* Classification of selectors for sequences of dense sets of Baire functions // Topology and its Applications. 2019. V. 258. P. 251–267.

12. *Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J.* The combinatorics of open covers II // Topology and its Applications. 1996. V. 73. P. 241–266.

References

1. Engelking R. (1989) *General Topology*. Berlin: Heldermann.
2. Kunen K., Vaughan J.E., Eds. (1984) *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Amsterdam: Elsevier.
3. Arkhangelsky A.V., Ponomarev V.I. (1974) *Osnovy obshchey topologii v zadachakh i uprazhneniyakh* [Fundamentals of general topology in problems and exercises]. Moscow: Nauka.
4. Hurewicz W. (1926) Über eine verallgemeinerung des Borelschen Theorems. *Mathematische Zeitschrift*. 24. pp. 401–421.
5. Arhangel'skii A.V. (1986) Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces. *Soviet Mathematics – Doklady*. 33. pp. 396–399.
6. Arhangel'skii A.V. (2000) Projective σ-compactness, ω_1-caliber, and C_p-spaces. *Topology and Its Applications*. 104(1–3). pp. 13–26.
7. Sakai M. (2017) The projective Menger property and an embedding of S_ω into function spaces. *Topology and Its Applications*. 220. pp. 118–130.
8. Osipov A.V. (2020) Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram. *Topology and Its Applications*. 278. 107232.
9. Bonanzinga M., Cammaroto F., Matveev M. (2010) Projective versions of selection principles. *Topology and Its Applications*. 157. pp. 874–893.
10. Scheepers M., Tsaban B. (2002) The combinatorics of Borel covers. *Topology and Its Applications*. 121. pp. 357–382.
11. Osipov A.V. (2019) Classification of selectors for sequences of dense sets of Baire functions. *Topology and Its Applications*. 258. pp. 251–267.
12. Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J. (1996) The combinatorics of open covers. II. *Topology and Its Applications*. 73. pp. 241–266.

***Сведения об авторах*:**
Ляховец Даниил Юрьевич – аспирант Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: zoy01111@gmail.com
Осипов Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий сектором топологии Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН; Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия. E-mail: oab@list.ru

***Information about the authors*:**
Lyakhovets Daniil Yu. (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: zoy01111@gmail.com
Osipov Alexander V. (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: oab@list.ru

Статья поступила в редакцию 20.03.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 20.03.2023; accepted for publication 10.04.2024